品質工学、静特性、誤差因子１つの場合でデータの構造式、変動に目標値 m が除去できる理由

(0)(両辺)の２乗和を取ります

$\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}(y_{ij}-m)^2=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}\{(\bar{\bar{y}}-m)+(\bar{y}_{i\cdot}-\bar{\bar{y}})+(y_{ij}-\bar{y}_{i\cdot})\}^2$

(1) (両辺)を展開します

(左辺)= $\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}{y_{ij}}^2-2m\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}y_{ij}+knm^2$

(右辺)= $kn(\bar{\bar{y}}-m)^2+\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}(\bar{y}_{i\cdot}-\bar{\bar{y}})^2+\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}(y_{ij}-\bar{y}_{i\cdot})^2$

$+2(\bar{\bar{y}}-m)\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}(\bar{y}_{i\cdot}-\bar{\bar{y}})+2(\bar{\bar{y}}-m)\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}(y_{ij}-\bar{y}_{i\cdot})+2\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}(\bar{y}_{i\cdot}-\bar{\bar{y}})(y_{ij}-\bar{y}_{i\cdot})$

実は、赤字部分はすべて 0 になります。

さらに(両辺)からknm^2を引くと

$$\boxed{\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}{y_{ij}}^2-2m\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}y_{ij}=kn(\bar{\bar{y}}^2-2m\bar{\bar{y}})+\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}(\bar{y}_{i\cdot}-\bar{\bar{y}})^2+\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}(y_{ij}-\bar{y}_{i\cdot})^2}$$

と変形できます。

(2)目標値m項が除外できます

よく見ると、

$\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}y_{ij}=kn\bar{\bar{y}}$ =(データの総和)

ですから、

$\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}{y_{ij}}^2-2m\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}y_{ij}=kn(\bar{\bar{y}}^2-2m\bar{\bar{y}})+\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}(\bar{y}_{i\cdot}-\bar{\bar{y}})^2+\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}(y_{ij}-\bar{y}_{i\cdot})^2$

の赤字部分は除去できます。

$\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}{y_{ij}}^2=kn(\bar{\bar{y}}^2)+\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}(\bar{y}_{i\cdot}-\bar{\bar{y}})^2+\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}(y_{ij}-\bar{y}_{i\cdot})^2$

そして、$kn(\bar{\bar{y}}^2)=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}\bar{\bar{y}}^2$に戻すと、元の式は

$$\boxed{\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}{y_{ij}}^2=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}\bar{\bar{y}}^2+\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}(\bar{y}_{i\cdot}-\bar{\bar{y}})^2+\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}(y_{ij}-\bar{y}_{i\cdot})^2}$$

と目標値m項が除外でき、データの構造式も

$$\boxed{y_{ij}=\bar{\bar{y}}+(\bar{y}_{i\cdot}-\bar{\bar{y}})+(y_{ij}-\bar{y}_{i\cdot})}$$

と書くことができます。

この目標値を無くした式が教科書で一般的に書かれた

データの構造式であり、

２乗和が各変動成分

となっています。

公式暗記せず、意味を理解して、数式で導出すれば

しっかり理解できますね！