品質工学、静特性、誤差因子２つの場合でデータの構造式、変動に目標値 m が除去できる理由

(0)(両辺)の２乗和を取ります

$\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}(y_{ij}-m)^2=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}\{(\bar{\bar{y}}-m)+(\overline{y_{i\cdot}}-\bar{\bar{y}})+(\overline{y_{\cdot j}}-\bar{\bar{y}})+(y_{ij}-\overline{y_{i\cdot}}-\overline{y_{\cdot j}}+\bar{\bar{y}})\}^2$

(1) (両辺)を展開します

(左辺)＝ $\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}{y_{ij}}^2-2m\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}y_{ij}+knm^2$

(右辺)＝ $kn(\bar{\bar{y}}-m)^2+\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}(\overline{y_{i\cdot}}-\bar{\bar{y}})^2+\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}(\overline{y_{\cdot j}}-\bar{\bar{y}})^2+\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}(y_{ij}-\overline{y_{i\cdot}}-\overline{y_{\cdot j}}+\bar{\bar{y}})^2$

$+2(\bar{\bar{y}}-m)\{\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}(\overline{y_{i\cdot}}-\bar{\bar{y}})+\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}(\overline{y_{\cdot j}}-\bar{\bar{y}})+\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}(y_{ij}-\overline{y_{i\cdot}}-\overline{y_{\cdot j}}+\bar{\bar{y}})\}$

$+2\sum_{i=1}^{k}(\overline{y_{i\cdot}}-\bar{\bar{y}})\sum_{j=1}^{n}\{(\overline{y_{\cdot j}}-\bar{\bar{y}})+(y_{ij}-\overline{y_{i\cdot}}-\overline{y_{\cdot j}}+\bar{\bar{y}})\}$

$+2\sum_{j=1}^{n}(\overline{y_{\cdot j}}-\bar{\bar{y}})\sum_{j=1}^{n}(y_{ij}-\overline{y_{i\cdot}}-\overline{y_{\cdot j}}+\bar{\bar{y}})$

実は、赤字部分はすべて 0 になります。(実際解いてみるといい演習になります。)

さらに(両辺)からknm^2を引くと

$\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}{y_{ij}}^2-2m\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}y_{ij}$

$=kn(\bar{\bar{y}}^2-2m\bar{\bar{y}})+\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}(\overline{y_{i\cdot}}-\bar{\bar{y}})^2+\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}(\overline{y_{\cdot j}}-\bar{\bar{y}})^2+\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}(y_{ij}-\overline{y_{i\cdot}}-\overline{y_{\cdot j}}+\bar{\bar{y}})^2$

と変形できます。

(2)目標値m項が除外できます

よく見ると、

$\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}y_{ij}=kn\bar{\bar{y}}$ ＝(データの総和)

ですから、

$\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}{y_{ij}}^2-2m\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}y_{ij}$

$=kn(\bar{\bar{y}}^2-2m\bar{\bar{y}})+\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}(\overline{y_{i\cdot}}-\bar{\bar{y}})^2+\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}(\overline{y_{\cdot j}}-\bar{\bar{y}})^2+\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}(y_{ij}-\overline{y_{i\cdot}}-\overline{y_{\cdot j}}+\bar{\bar{y}})^2$

の赤字部分は除去できます。

$\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}{y_{ij}}^2=kn(\bar{\bar{y}}^2)+\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}(\overline{y_{i\cdot}}-\bar{\bar{y}})^2+\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}(\overline{y_{\cdot j}}-\bar{\bar{y}})^2+\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}(y_{ij}-\overline{y_{i\cdot}}-\overline{y_{\cdot j}}+\bar{\bar{y}})^2$

そして、$kn(\bar{\bar{y}}^2)=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}\bar{\bar{y}}^2$に戻すと、元の式は

$\boxed{\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}{y_{ij}}^2=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}\bar{\bar{y}}^2+\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}(\overline{y_{i\cdot}}-\bar{\bar{y}})^2+\sum_{i=1}^{k}\sum_{=1}^{n}(\overline{y_{\cdot j}}-\bar{\bar{y}})^2+\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}(y_{ij}-\overline{y_{i\cdot}}-\overline{y_{\cdot j}}+\bar{\bar{y}})^2}$

と目標値m項が除外でき、データの構造式も

$\boxed{y_{ij}=\bar{\bar{y}}+(\overline{y_{i\cdot}}-\bar{\bar{y}})+(\overline{y_{\cdot j}}-\bar{\bar{y}})+(y_{ij}-\overline{y_{i\cdot}}-\overline{y_{\cdot j}}+\bar{\bar{y}})}$

と書くことができます。

この目標値を無くした式が教科書で一般的に書かれた

データの構造式であり、

２乗和が各変動成分

となっています。

(3)2 乗和を S で表記

①目標値 m を省かない場合

$\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}\left(y_{ij}-m\right)^2=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}\left\{(\bar{\bar{y}}-m)+(\overline{y_{i\cdot}}-\bar{\bar{y}})+\left(\overline{y_{\cdot j}}-\bar{\bar{y}}\right)+\left(y_{ij}-\overline{y_{i\cdot}}-\overline{y_{\cdot j}}+\bar{\bar{y}}\right)\right\}^2$

は展開すると、

$\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}\left(y_{ij}-m\right)^2=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}(\bar{\bar{y}}-m)^2+\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}(\overline{y_{i\cdot}}-\bar{\bar{y}})^2+\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}\left(\overline{y_{\cdot j}}-\bar{\bar{y}}\right)^2+\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}\left(y_{ij}-\overline{y_{i\cdot}}-\overline{y_{\cdot j}}+\bar{\bar{y}}\right)^2$

と展開できます。（前項をもとに実際演習してみてください。）

各項の 2 乗和を S で表記します。

●全変動　: $S=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}\left(y_{ij}-m\right)^2$

●平均変動　: $S_m=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}(\bar{\bar{y}}-m)^2$

●誤差因子 N による変動　: $S_N=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}(\overline{y_{i\cdot}}-\bar{\bar{y}})^2$

●誤差因子 O による変動　: $S_O=\sum_{i=1}^{k}\sum_{=1}^{n}\left(\overline{y_{\cdot j}}-\bar{\bar{y}}\right)^2$

●誤差変動　: $S_e=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}\left(y_{ij}-\overline{y_{i\cdot}}-\overline{y_{\cdot j}}+\bar{\bar{y}}\right)^2$

すると、

$\boxed{S= S_m+ S_N + S_O + S_e}$

が成り立ち、２乗和の分解ができることがわかります。

②目標値 m を省く場合

前項の計算結果から

$\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}{y_{ij}}^2=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}\bar{\bar{y}}^2+\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}(\overline{y_{i\cdot}}-\bar{\bar{y}})^2+\sum_{i=1}^{k}\sum_{=1}^{n}\left(\overline{y_{\cdot j}}-\bar{\bar{y}}\right)^2+\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}\left(y_{ij}-\overline{y_{i\cdot}}-\overline{y_{\cdot j}}+\bar{\bar{y}}\right)^2$

の各項の 2 乗和を S で表記すると、

●全変動　: $S=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}{y_{ij}}^2$

●平均変動　: $S_m=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}\bar{\bar{y}}^2$

●誤差因子 N による変動　: $S_N=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}(\overline{y_{i\cdot}}-\bar{\bar{y}})^2$

●誤差因子 O による変動　: $S_O=\sum_{i=1}^{k}\sum_{=1}^{n}\left(\overline{y_{\cdot j}}-\bar{\bar{y}}\right)^2$

●誤差変動　: $S_e=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}\left(y_{ij}-\overline{y_{i\cdot}}-\overline{y_{\cdot j}}+\bar{\bar{y}}\right)^2$

すると、

$\boxed{S= S_m+ S_N + S_O + S_e}$

が成り立ち、２乗和の分解ができることがわかります。

公式暗記せず、意味を理解して、数式で導出すれば
しっかり理解できますね！