# HM-1　２次関数

01-01　２次関数とそのグラフ
01-02　２次関数の値域
01-03　2 次方程式
01-04　2 次不等式
01-05　2 次方程式の解の存在範囲
01-06　絶対値等を含む関数
01-07　絶対値等を含む方程式・不等式
01-08　命題・条件・集合
01-09　全称命題と存在命題
01-10　必要条件・十分条件

A:Advanced(発展問題)、B:Basic(標準問題)


ＱＣプラネッツ© https://qcplanets.com/

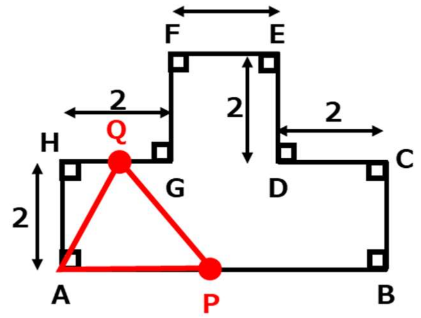
## 01-01　2次関数とそのグラフ

【B1】次のグラフを描け。

(1) $y = x^2 + 2x + 3$　(2) $y = -x^2 - 4x$　(3) $y = x^2 + 4x + 4$ (4) $y = -\frac{1}{2}x^2 + 3x$

【B2】1本のひもがあり、長さは12である。このひもを使って、長方形を作る。長方形の面積の最大値を求めよ。

【B3】下図のような8角形がある。すべての角は90°である。頂点Aから秒速1,2でP,Qが頂点B,Cにそれぞれ向かう。(P:A→B,Q:A→H→G→F→E→D→C)
(1)頂点Aを出発してt秒後の△APQの面積Sをもとめ、面積の変動をグラフに示せ。
(2)△APQの面積が6になる時刻tを求めよ。




## 01-02　2次関数の値域

【B1】次の関数の値域を求めよ。ただし、$a$は実数の定数とする。
(1) $y = 2x^2 + 4x + 3$　(2) $y = -3x^2 + 4x + 1$　$(0 \leqq x \leqq 1)$ (3) $y = ax^2 - 2x + 1$

【B2】$0 \leqq x \leqq 2$を定義域とする関数$f(x) = x^2 + ax$の最大値を$M$、最小値を$m$とする。
(1) $M$を$a$で表し、関数$M = g(a)$のグラフを描け。
(2) $m$を$a$で表し、関数$m = h(a)$のグラフを描け。

【B3】関数$f(x) = x^2 - 3x + 4$の区間$t \leqq x \leqq t + 1$における最大値を$M$、最小値を$m$とする。
(1) $M$を$t$で表し、関数$M = g(t)$のグラフを描け。
(2) $m$を$t$で表し、関数$m = h(t)$のグラフを描け。

## 01-03　2次方程式

【B1】2次方程式$2x^2 - 4x - 3 = 0$の解を$\alpha,\ \beta$ とするとき、以下の値を求めよ。

(1) $\alpha^2 + \beta^2$　(2) $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}$　(3) $\frac{\beta}{\alpha - 1} + \frac{\alpha}{\beta - 1}$　(4) $\alpha^2 - \beta^2$

【B2】次の2つの2次方程式が、唯一の共通な実数解をもつための条件を求め、そのときの共通でない方の解の和を求めよ。

$$x^2 + ax + b = 0、\quad x^2 + bx + a = 0$$


ＱＣプラネッツ© https://qcplanets.com/

## 01-04　2 次不等式

【B1】次の 2 次不等式を解け。
(1) $2x^2-4x-3>0$　(2) $2x^2-4x+3>0$　(3) $9x^2-12x-1<0$
(4) $9x^2+6x+1\leqq 0$　(5) $x^2-ax+a-1<0$

【B2】不等式$ax^2+bx+2>0$の解が$-\frac{1}{2}<x<\frac{1}{3}$　となるように定数$a,b$の値を求めよ。

## 01-05　2 次方程式の解の存在範囲

【B1】2 次方程式　$x^2+ax+b=0$に関して、次の各々が成り立つために実数$a,b$が満たすべき条件を求めよ。
(1) 2 つの正の解をもつ（重解も含む)。　(2) 正の解と負の解をもつ。
(3) $0<x<1$に実数解をもつ場合。

【B2】2 次方程式　$x^2-2(a-4)x+2a=0$の解が次の条件を満たすように実数$a$が満たすべき条件を求めよ。
(1) 解は 2 つとも 2 より大きい。（重解も含む）　(2) 解は 2 つとも 0 と 2 の間にある。
(3) 一方の解は 2 より小さく、他方は 2 より大きい。

## 01-06　絶対値を含む関数

【B1】次の関数のグラフを描け。
(1) $f(x)=|x-2|$　(2) $f(x)=|x-1|+|x+2|$　(3) $f(x)=||x|-1|$

【B2】次の関数のグラフを描け。
(1) $f(x)=(x-1)|x+2|$　(2) $f(x)=|x^2-2x|$　(3) $f(x)=|x^2-3x|+x+5$

【B3】関数 $f(x)=|2x-a|+x$ の$0\leqq x\leqq 1$における最大値を$M$、最小値を$m$とする。
(1) $M$を$a$で表し、関数$M=g(a)$のグラフを描け。
(2) $m$を$a$で表し、関数$m=h(a)$のグラフを描け。

## 01-07　絶対値等を含む方程式・不等式

【B1】次の方程式を解け。
(1) $x^2+x-7=|x+2|$　(2) $|x|+2|x-2|=5$　(3) $|x^2-5x|-x-3=0$

【B2】次の不等式を解け。
(1) $|x^2-5x|-x-3<0$　(2) $|x^2-4|-2x-5<0$

【B3】$x$ の方程式$|x^2-1|+x-a=0$における解の個数を求めよ。

## 01-08　命題・条件・集合

【B1】「すべての実数$x$ に対して、$p(x)$が成り立つ」を「$\forall x,\ p(x)$」、
「ある実数$x$ に対して、$p(x)$が成り立つ」を「$\exists x,\ p(x)$」、
と表現するとき、次の各々が成立するための条件を求めよ。ただし、$a,b,c$は実定数とし、(1) 以外の$a$は 0 でないとせよ。
(1) $\forall x,\ ax^2+bx+c=0$　　(2) $\exists x,\ ax^2+bx+c=0$
(3) $\forall x,\ ax^2+bx+c>0$　　(4) $\exists x,\ ax^2+bx+c>0$

【B2】
(1) 任意の実数$x$に対して、$ax^2+8x+a+7$が 15 以下となる実数$a$の条件を求めよ。
(2) ある実数$y$に対して$y>2x^2+x$かつ$y<x^2+3x+3$が成り立つための条件を求めよ。

## 01-09　全称命題と存在命題

【B1】次の命題の真偽を確認し、偽の場合その反例を１つ挙げよ。ただし、$x,y,z$は実数とする。
(1) $x+y>2$ かつ$xy>1$ ならば　$x>1$、$y>1$　である。
(2) $|x-1|\leqq 2$ ならば、 $x^2<9$ である。
(3) $x^2+y^2<x+y$ ならば、 $x<0$ または $y<0$ である。

【B2】次の各々の命題が真となるように実数$a$の値の範囲を定めよ。
(1) $1\leqq x<2$ ならば$|x-3a|<a+1$ である。
(2) $2<x<3$ ならば、$x^2-4ax+3a^2<0$ である。
(3) $0<x<4$ を満たす実数$x$が、$x^2-2ax+2a+3>0$ を満たす。

## 01-10　必要条件と十分条件

【B1】次の□に当てはまる文章を
①「必要十分条件である」
②「必要条件であるが、十分条件ではない」
③「十分条件であるが、必要条件ではない」
④「必要条件でもなく、十分条件でもない」
から選べ。ただし、文字はすべて実数とする。
(1) $x>1$ は$x^2>1$ であるための□。
(2) $|x-3|+|x+1|\leqq 6$ であることは、$x^2-2x-8\leqq 0$ であることの□。
(3) $x>1$ かつ$y>1$ であるためには、 $x+y>2$ かつ $xy>1$ であることの□。
(4) $b<0$ は、$x^2+ax+b=0$ を満たす実数$x$が存在するための□。
(5) $b>0$ は、すべての実数$x$に対して、$x^2+ax+b>0$　となるための□。

【B2】B１と同様に□に入る文章を①～④から選べ。
(1) 整数$n$について、$n$が 12 の倍数であることは、$n^2$が 12 の倍数であることの□。
(2) 自然数$m,n$について、$m$と$n$がともに５の倍数であることは、$m+n$かつ$mn$がともに 5 の倍数であることの□。


ＱＣプラネッツ© https://qcplanets.com/