レポート問題(HM-1)

<u>以下の各問を解き、答案をレポート提出してください。</u>

【問 1】 関数$f(x) = x^2 + 4x + 3$区間$t \leqq x \leqq t + 1$における最大値をM、最小値をmとする。
(1) Mをtで表し、関数$M = g(t)$のグラフを描け。
(2) mをtで表し、関数$m = h(t)$のグラフを描け。

【問 2】 2 次方程式$2x^2 - 4(a + 1)x - 2a + 1 = 0$の解が $0 < x < 2$ に、2 つの解(重解も含む)をもつように実数aが満たすべき条件を求めよ。

【問 3】 次の各問に答えよ。
(1) 不等式 $|x^2 - x - 2| + x - 3 < 0$ を解け
(2) xの方程式$|x^2 - 4x| - a = 0$（aは実数の定数）を満たす実数xの解の個数を求めよ。

【問 4】 $0 < x < 2$ を満たすすべての実数xが、$x^2 - 2ax + 2a^2 - 4a - 2 > 0$ を満たすように、実数aの値の範囲を定めよ。

レポート問題(HM-2)

以下の各問を解き、答案をレポート提出してください。

【問 1】実数xの整式$f(x)$を$(x-1)(x-3)$、 $x-2$で割った余りがそれぞれ$5x+1$、8 であるとき、整式$f(x)$を$(x-1)(x-2)(x-3)$　で割った余りを求めよ。

【問 2】任意の整数 n に対し、n^9-n^3 は 9 で割り切れることを示せ。

【問 3】以下を証明せよ。
(1) $\sqrt{2}$が無理数であることを示せ。
(2) $3\sqrt{2}-2$が無理数であることを示せ。 ただし、$\sqrt{2}$が無理数であることを用いてよい。

【問 4】以下を示せ。
(1) 整数a,bの少なくとも一方が奇数のとき、a^2+ab+b^2は奇数を示せ。
(2) nを奇数とする。このとき、$a^2+ab+b^2=2n$　を満たす整数a,bは存在しないことを示せ。

【問 5】aを実数とするとき、式 $3\sqrt{a^2-4a+4}-2\sqrt{a^2-6a+9}+4\sqrt{a^2}$ を簡単にせよ。

レポート問題(HM-3)

以下の各問を解き、答案をレポート提出してください。

【問 1】ある円周上に 4 点、A,B,C,D がこの順で反時計回りに並んでいる。線分 AB,AC,BC,CD の長さはそれぞれ、1、 $\sqrt{5}$、$\sqrt{2}$、2 である。
(1) cos∠ABC はいくらか。
(2) 円の半径はいくらか。
(3) cos∠ADC はいくらか。
(4) 線分 AD の長さを求めよ。

【問 2】水平な地面に 1 本の鉄塔が垂直に建っている（太さは無視する）。鉄塔の先端を P とし、足元の地点を H とする。また、H を通らない 1 本の道が水平な地面上に一直線に伸びている（幅は無視する）。道の途中に 3 点Ａ，Ｂ，Ｃがこの順にあり、BC=2AB を満たしている。
(1) $2AH^2-3BH^2+CH^2=6AB^2$ が成り立つことを示せ。
(2) A、B、C から P を見上げた角度∠PAH、∠PBH、∠PCH はそれぞれ 45°、60°、30° であった。また、AB=100m のとき、鉄塔の高さ PH は何ｍか。
(3) (2)において、H と道(ABC)との距離は何ｍか。

【問 3】$\sin\theta+\cos\theta=\frac{1}{2}$のとき、次の式の値を求めよ。
(1) $\sin\theta\cos\theta$　(2) $\sin^3\theta+\cos^3\theta$　(3) $\sin^4\theta+\cos^4\theta$
(4) $\tan\theta+\frac{1}{tan\theta}$

【問 4】aを定数とし、$f(x)=\cos^2 x+2asinx+2a-4$（0° ≦$x$≦30°)とする。
(1) $f(x)$の最大値を求めよ。
(2) $f(x)$の最大値が 2 になるとき、aの値を求めよ。

【問 5】次の条件を満たす△ABC はどんな三角形か。
(1) $ccosB-bcosC=0$
(2) $a^2sinBcosA-b^2sinAcosB=0$

レポート問題(HM-4)

<u>以下の各問を解き、答案をレポート提出してください。</u>

【問 1】各数列に対し、次式の関係がある。

$b_n = \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$、$c_n = \frac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{n}$　　(n=1,2,3,⋯)

⑴ 数列a_nが初項 1、公比 2 の等比数列のとき、数列a_n、b_n、c_nの一般項を求めよ。

⑵ 数列b_nが初項 1、公差 2 の等差数列のとき、数列a_n、b_n、c_nの一般項を求めよ。

【問 2】平面上にどの 3 本の直線も 1 点を共有しない、n 本の直線がある。どの 2 本の直線も平行でないとき、平面が n 本の直線によって分けられる領域の個数a_nを求めたい。

⑴ a_1, a_2, a_3を求めよ。

⑵ $a_{n+1} = a_n + n + 1$を証明せよ。

⑶ 一般項a_nを求めよ。

【問 3】次nが自然数のとき、以下の問いに答えよ。

⑴ 不等式 $n! \geqq 2^{n-1}$ を数学的帰納法を用いて示せ。

⑵ 不等式 $1+ \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} < 3$ を⑴の結果を用いて示せ。

【問 4】自然数が次のルールで小さい順から並んでいる。

1,4,13,40,121,364,⋯

⑴ 一般項a_nを求めよ。

⑵ 和$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$を求めよ。

レポート問題(HM-5)

以下の各問を解き、答案をレポート提出してください。

【問 1】C,O,M,P,U,T,E の 7 文字を全部使ってできる文字列を、アルファベット順の辞書式に並べる。
(1) COMPUTE は何番目にあたるか。
(2) 200 番目の文字列は何か。

【問 2】7 人掛けの円卓に男子 4 人 A,B,C,D と女子 3 人 E,F,G が座る。
(1) 座り方は全部で何通りあるか。
(2) 女子が隣り合わない座り方は何通りあるか。
(3) 男子 A の隣が共に女子である座り方は何通りあるか。
(4) 男子 C が男子と女子である座り方は何通りあるか。
(5) 女子 G の隣に A が座らない座り方は何通りあるか。

【問 3】次のように立体を塗り分ける方法は何通りあるか。ただし、回転させて一致する塗り方は同じ塗り方とみなす。
(1) 正四角錐の各面を異なる 5 色をすべて使って塗り分ける。
(2) 正三角柱の各面を異なる 5 色をすべて使って塗り分ける。
(3) 正四面体の各面を異なる 4 色をすべて使って塗り分ける。

【問 4】2 文字 A,B を用いて、B が連続しないような文字列を作る。
(1) 文字が 2 個、3 個、4 個の列はそれぞれ何通りあるか。
(2) 文字n個の総数をa_nとする。そのうち、右端(n文字目)が A で終わる総数をb_n、右端(n文字目)が B で終わる総数をC_nに分ける(つまり、$a_n = b_n + C_n$)。a_{n+1}とa_{n+2}をそれぞれb_n、C_nの式で表し、$a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$を示せ。

【問 5】n, rを自然数とする。
(1) 全ての自然数kに対して、$k(k-1){}_nC_k = n(n-1){}_{n-2}C_{k-2}$を示せ。
(2) $\sum_{k=2}^{n} {}_{n-2}C_{k-2}$を$n$を用いて表せ。
(3) $\sum_{k=2}^{n} k(k-1){}_nC_k$を$n$を用いて表せ。

レポート問題(HM-6)

以下の各問を解き、答案をレポート提出してください。

【問 1】円 C：$(x-3)^2+y^2=4$　と直線ℓ： $y=ax+a+2$がある。円 C の中心を M とする。

(1) 直線ℓが定数aによらず定点 A を通ることを示せ。

(2) 直線ℓが円 C に接するとき、aの値を求めよ。

(3) 点 A から円 C へ接線を２本引き、接点をx座標の大きい方から順に P,Q とする。このとき cos∠PMQ を求めよ。

【問 2】座標平面上の 2 点 Q(1,1),R(2,0.5)に対して、点 P が円$x^2+y^2=1$の周上を動く。

(1) △PQR の重心 G の軌跡を求め、図示せよ。

(2) 点 P から△PQR の重心 G までの距離が最小となるときの点 P の座標を求めよ。

(3) △PQR の面積の最小値を求めよ。

【問 3】直線ℓ：$y=k(x+1)$及び放物線$y=x^2$について、

(1) 直線ℓと放物線 C が異なる２点で交わるようなk値の範囲を求めよ。

(2) kが(1)の範囲を動く時、直線ℓと放物線 C の２つの交点の中点を描く軌跡を求め、図示せよ。

【問 4】xy 座標平面上に２点 A(4,0),B(12,0)と原点を通る直線ℓ: y=mx(m≠0)がある。そして、直線ℓ上に AP+PB が最小になるような点 P を置く。

(1) 点 A の直線ℓについて対称の点 A’の座標を m で表せ。

(2) 直線 A’B の式を m で表せ。

(3) 点 P(X,Y)とする。X,Y を m で表せ。

(4) 直線ℓが原点 O の周りに 1 回転するときの点 P が描く軌跡の方程式を求め、それを図示せよ。

レポート問題(HM-7)

以下の各問を解き、答案をレポート提出してください。

【問 1】平面上の３点 O,A,B は条件$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=|2\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=1$

(1) $|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|$および△OAB の面積を求めよ。

(2) 点 P が平面上$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|$を満たしながら動く時、△PAB の面積の最大値を求めよ。

【問 2】△ABC において、$\overrightarrow{\mathrm{CA}}=\vec{a}$、$\overrightarrow{\mathrm{CB}}=\vec{b}$とする。

(1) 実数s,tが $0\leqq s+t\leqq 1$、$s\geqq 0$,$t\geqq 0$ の範囲を満たすとき、次の各条件を満たす点 P が存在する範囲をぞれぞれ図示せよ。

① $\overrightarrow{\mathrm{CP}}=s\vec{a}+t(\vec{a}+\vec{b})$

② $\overrightarrow{\mathrm{CP}}=(2s+t)\vec{a}+(s-t)\vec{b}$

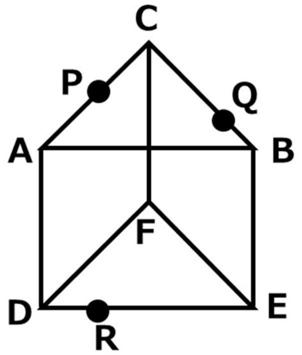
(2) (1) の場合の点 P が存在する範囲の面積は△ABC の面積の何倍か。

【問 3】下図の三角柱 ABC-DEF において、点 P,Q,R をそれぞれ辺 AC の中点、辺 CB を 2:1 に内分した点、辺 DE を 1:3 に内分した点とする。一次独立な$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$、$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$、$\overrightarrow{\mathrm{AD}}$を用いよ。

(1) 平面 PQR と辺 AB との交点を S とする。AS：SB を求めよ。

(2) 平面 PQR と辺 AD との交点を T とする。AT：TD を求めよ。

(3) 辺 AB の中点を M とする。線分 FM と平面 PQR との交点を X とする。$\overrightarrow{\mathrm{AX}}$を$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$、$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$、$\overrightarrow{\mathrm{AD}}$を用いて表せ。



【問 4】正八面体の３つの頂点を O(0,0,0),A(2,0,0),B(1,$\sqrt{3}$,0)とする。

(1) 正八面体の中心座標を求めよ。

(2) 正八面体の残りの点の座標を求めよ。

レポート問題(HM-8)

以下の各問を解き、答案をレポート提出してください。

【問 1】3 次方程式の解を α、β、γ とする。3 つの解には以下の特徴がある。
(i) 複素数平面で 3 点 A(α)、B(β)、C(γ)とする△ABC は正三角形である。
(ii) $0^\circ \leqq \arg(\alpha) \leqq \arg(\beta) \leqq \arg(\gamma) \leqq 360^\circ$ である。
(iii) β は実数である。
(iv) $|\alpha|=\sqrt{7}$、α の実部は△ABC の重心 G の実部の 2 倍である。
これらを満たす①xの 3 次方程式、②解 α、β、γ、③△ABC の一辺の長さをそれぞれ求めよ。

【問 2】$x^3 - x + k = 0\ (k > 0)$が絶対値 1 の虚数解をもつとき、kの値とこの方程式の 3 つの解を求めよ。

【問 3】αを複素数とする。虚数単位iを用いて、複素数zの方程式①を考える。ただし、$z \neq 0$ である。

$$z\bar{z} - \alpha\bar{z} + 2i = 0 \quad \cdots ①$$

(1) 方程式①が実数解をもつようにαが動くとき、点αが複素数平面上に描く図形を図示せよ。
(2) 方程式①が絶対値 1 の複素数を解にもつようにαが動くとする。点αが複素数平面上に描く図形を図示せよ。

【問 4】複素数平面上に三角形 ABC があり、各頂点 A、B、C を表す複素数をそれぞれ z_1、z_2、z_3 とする。
複素数 ω に対して、$z_1=\omega z_3$、$z_2=\omega z_1$、$z_3=\omega z_2$ が成り立つ。
(1) $1+\omega+\omega^2$ の値を求めよ。
(2) 三角形 ABC はどんな形の三角形か。
(3) $z= z_1+2z_2+3z_3$ と表す点を D とする。原点 O として、三角形 OBD はどんな形の三角形か。

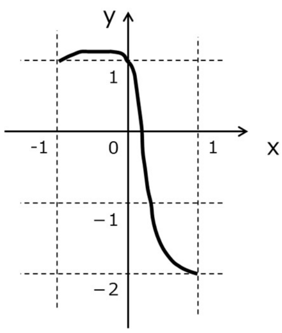
レポート問題(HM-9)

以下の各問を解き、答案をレポート提出してください。

【問 1】以下を解け。
(1) 次の式を定義どおり微分せよ。　$f(x)=x^4$
(2) 次の定積分を定義通り求めよ。　$f(x)=x^3$　区間[0,1]

【問 2】点(0,1)を通り、曲線$y=x^3-ax^2$に接する直線が 2 本存在するとき、実数aの値の範囲を求めよ。

【問 3】区間 $-1 \leqq x \leqq 1$ で定義された関数$f(x)$が
$f(-1)=f(0)=1$、$f(1)=-2$
を満たし、また、そのグラフが下図のようになっているという。このとき、$\int_{-1}^{1} f(x)dx \geqq -1$ を示せ。



【問 4】aを正の定数とし、2 つの関数を考える。

$$\begin{cases} f(x) = \left| |x-3a| - a \right| \\ g(x) = -x^2 + 6ax - 5a^2 + a \end{cases}$$

(1) 方程式 $f(x)=a$　の解を求めよ。
(2) $y=f(x)$のグラフと$y=g(x)$のグラフで囲まれた部分の面積Ｓをaで表せ。

【問 5】aを実数とする。xを２次方程式

$$x^2 - ax = 2\int_0^1 |t^2 - at| dt$$

は $0 \leqq x \leqq 1$ の範囲にいくつの解をもつか。

レポート問題(HM-10)

<u>以下の各問を解き、答案をレポート提出してください。</u>

【問 1】$e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$=2.718…であるが、以下の不等式を示せ。

(1) ${}_n\mathrm{C}_k\left(\frac{1}{n}\right)^k<\frac{1}{k!}$

(2) $\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k!}<\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\cdots\frac{1}{3^{n-2}}\right)$

(3) $e<2.75$

【問 2】関数$f(x)=-\frac{1}{2}x^2+2x-\frac{1}{2}$ と、$a_1=2, a_{n+1}=f(a_n)$　を満たす数列がある。

(1) a_3 を求めよ。
(2) $x_1<x_2<2$ ならば、 $f(x_1)<f(x_2)$ を示せ。
(3) $n≧3$ に対し、 $a_n<1+\frac{2}{n}$　を示せ。

(4) $\lim_{n\to\infty}a_n$を求めよ。

【問 3】実数xに対し、$[x]$は実数xを超えない最大の整数と定義する。このとき、極限値

$\lim_{x\to2}([2x]-[x])$を求めよ。

【問 4】nは自然数とする。連立不等式
$x+y\leqq n$、$-x+y\leqq n$、$x-y\leqq n$、$-x-y\leqq n$ を満たすxy平面の点 P(x,y)でx,yがすべて整数である個数を$f(n)$とおく。極限$\lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{n^2}$　を求めよ。

レポート問題(HM-11)

以下の各問を解き、答案をレポート提出してください。

【問 1】方程式 $a\tan\left(\frac{\pi}{4}x\right) - x - a + 1 = 0$が $0 < x < 1$に解をもつような実定数aの値の範囲を求めよ。

【問 2】半径 2 の円に外接する二等辺三角形があるとする。等しい２辺を挟む角度を 2θ とおく。
(1) 二等辺三角形の面積 S をθで表せ。
(2) 面積 S の最小値とそのときの三角形の特徴を説明せよ。

【問 3】楕円$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$上を点 P$(x, y)$が１周するとき、$3x^2 + \sqrt{3}xy + 2y^2$の最大値、最小値と、それらを与える点 P の座標を求めよ。

【問 4】$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$とする。２つの曲線

C1: $x^2 + 3y^2 = 3$、C2: $\frac{x^2}{\cos^2\theta} - \frac{y^2}{\sin^2\theta} = 2$ の交点のうち、x座標とy座標がともに正であるものを P とする。P における C1,C2 の接線をそれぞれ$\ell 1$、$\ell 2$ とし、y軸と$\ell 1$、$\ell 2$の交点をそれぞれ Q,R とする。θが $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$の範囲で動くとき、
(1) 点 P の座標をθで表せ。
(2) 線分 QR の長さの最小値を求めよ。

【問 5】3^{π}とπ^3はどちらが大きいか、理由をつけて答えよ。

【問 6】極方程式 r=1+2cosθにおいて、
(1) 概形を図示せよ。
(2) $(r, \theta) = (2, \frac{\pi}{3})$における極方程式の接線の式を求めよ。

レポート問題(HM-12)

以下の各問を解き、答案をレポート提出してください。

【問１】n,mを 0 以上の整数とし、$I_{n,m}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n\theta\sin^m\theta d\theta$とおく。

(1) $n\geqq 2$のとき、$I_{n,m}$を$I_{n-2,m+2}$を使って表せ。

(2) $I_{2n+1,2m+1}=\frac{1}{2}\int_0^1 x^n(1-x)^m dx$を示し、$I_{2n+1,2m+1}=\frac{n!m!}{2(n+m+1)!}$を示せ。

【問２】x,yはtを媒介変数として、次のように表示されているものとする。

$$x=\frac{3t-t^2}{t+1}、y=\frac{3t^2-t^3}{t+1}$$

変数tが $0\leqq t\leqq 3$ を動くとき、点(x,y)が描く図形の概形を図示し、点(x,y)が描く図形の領域と$y\geqq x$の共通部分の面積を求めよ。

【問３】x,y,z空間内の平面$y=1$で$(x-1)^2+z^2\leqq 1$、$y=1$で表される図形を D とする。D をz軸の周りに 1 回転させてできる立体を M とする。

(1) 平面$z=k$ $(-1\leqq k\leqq 1)$における立体 M の切り口の面積 S(k)を求めよ。

(2) 立体 M の体積を求めよ。

【問４】統計学でよく使用される関数$f(x)=e^{-x^2}$がある。

(1) $y=f(x)$の概形を描け。

(2) $f(x)$は原始関数が存在しないが、定積分が求めたい場合が多い。例えば、$\int_0^1 f(x)dx$を計算したい場合、どのように求めたらよいか、提案せよ。

【問５】ある商品の供給量 S と需要量 D が(式１)のようにその商品の価格pの一次関係式で表現できるとする。

$$S=\alpha p+a、D=-\beta p+b \quad (\alpha>0,\beta>0) \quad (式 1)$$

また、価格pの時間tに関する減少量は、(式 2)のように商品のストック（在庫）$S-D$に比例する。

$$\frac{dp}{dt}=-k(S-D) \quad (k>0 は定数) \quad (式 2)$$

(1) $p(t)$に関する微分方程式を作れ。

(2) 価格$p(t)$をtの式で表現せよ。ただし、$S=D$のとき、$p(t)=p_0$とする。

レポート問題(HM-13)

以下の各問を解き、答案をレポート提出してください。

行列 E、O はそれぞれ単位行列、零行列とする。

【問 1】A=8P+Q、P^2=P、Q^2=Q、PQ=QP=0 を満たす、正方行列 A、P、Q、E、O がある。
(1) (P+Q)A=A を示せ。
(2) A は逆行列を持つとする。このとき、P、Q を A、E で表せ。
(3) A^n を P、Q の一次式で表せ。

【問 2】正方行列 A、B、E、O で AB+BA=E かつ A^2B+BA^2=A を満たすとき、以下を示せ。
(1) $A^2B=BA^2$　　(2) AB=BA　　(3) A は逆行列をもつ

【問 3】x, y, zの一次連立方程式を解く。

$$\begin{cases} 9x+4y+8z=0 \\ -8x-3y-8z=-9 \\ 4x+2y+5z=36 \end{cases}$$

3 次の行列 A=$\begin{pmatrix} 9 & 4 & 8 \\ -8 & -3 & -8 \\ 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}$、ベクトル v=$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$、単位行列 E を用いて、連立方程式を Av=E と直してからx, y, zを解く。
(1) $A^2-10A=-9E$ を示せ。　　(2) A の逆行列を求めよ。
(3) x, y, zを解け。

【問 4】座標平面上の一次変換fは、直線$y=-x+3$を自分自身に移し、直線$y=3x-3$を$y=x+3$に移す。
(1) fを表す行列を求めよ。
(2) fによって自分自身に移される直線を全て求めよ。
(3) (2)の直線と行列fの固有値、固有ベクトルの関係について考察せよ。

【問 5】行列$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$で表される一次変換を$f$とする。
(1) fによる全平面の像は直線$\ell: 2x+y=0$　であることを示せ。
(2) 平面上の点 P(x, y)に対し、直線ℓ上の点で P との距離が最小となる点を Q とする。fによる像が Q となる点のうちで、原点との距離が最小となる点を P'とする。P'(x', y')をx, yで表せ。
(3)　点 P(x, y)に P'(x', y')を対応させる写像をgとする。合成写像$f \circ g \circ f$および$g \circ f \circ g$を求めよ。

レポート問題(HM-14)

以下の各問を解き、答案をレポート提出してください。

【問 1】次の 3 点(-1,0)、(0,4)、(1,1)の回帰直線を求めたい。以下各問の定義における回帰直線を求めよ。

(1) 回帰直線は原点を通り、各点との y 方向の差の 2 乗和 A が最小のとき。

(2) 回帰直線は原点を通り、各点との y 方向の差の絶対値の和 B が最小のとき。

(3) 回帰直線は原点を通らず、各点との y 方向の差の 2 乗和 C が最小のとき。

【問 2】　ある x の分布関数 f(x)を$f(x)=\frac{1}{x^2+1}$ $(-1 \leqq x \leqq 1)$ と定義する。

(1) $f(x)$の概形を求めよ。

(2) E[X]、V[X]を求めよ。

【問３】1～4 まで等確率で出る正四面体形のサイコロを２回振った。サイコロの出た目の合計を X とする。

(1)　確率が最大となる X の値とその確率を求めよ。

(2)　期待値 E[X]、分散 V[X]はいくらか。

【問 4】次の２組のデータにおいて、寄与率、回帰直線を求めよ。

(1)

x	-2	-1	0	1	2
y	-5	-3	1	3	4

(2)

x	-2	-1	0	1	2
y	25	9	1	9	16

【問 5】製品 A、B において、品質特性が基準の上限値を超えると不良品となる。製品 A、B はそれぞれ大量生産されており、品質特性は正規分布に従う。製品 A、B の不良率は正規分布表から以下と分かっている。

製品 A:	正規分布表 Kp=1.282	製品 B:	正規分布表 Kp=1.036

製品 A 1 個と製品 B 1 個を直列につないで作った製品 C の不良率に対応する Kp はいくらか。