目次

混合系直交表 L18 の擬水準法がわかる

【1】混合系直交表 L18 の擬水準法とは
先に、「直交表混合系 L18」と「擬水準法」を復習しましょう。
(1) 混合系直交表 L18 とは？
関連記事で解説しています。ご確認ください。

【関連記事】混合系直交表 L18 がわかる
https://qcplanets.com/method/robust-parameter-design/l18/

(2) 擬水準法とは？
擬水準法とは、２つケースがあります。実験計画法を復習する必要があります。

【関連記事】究める！実験計画法
https://qcplanets.com/method/doe/top_summary/
①不足する場合(2 水準系に 3 水準因子を割り当てる場合など)
②余る場合(3 水準系に 2 水準因子を割り当てる場合など)

関連記事で両方を解説しています。ご確認ください。
今回は、「余る場合(3 水準系に 2 水準因子を割り当てる場合)」を解説します。

(3) 混合系直交表 L18 の擬水準法とは？
今回解説する混合系直交表 L18 の擬水準法とは

3 水準の 1 列を 2 水準に割当てる場合
つまり、通常の L18 は $2^1 \times 3^7$ であるが、
L18 は $2^2 \times 3^6$ に割当てる場合を擬水準法として考える

具体的に直交表を作ると下表になります。

L18	A	B	C	D	E	F	G	e	data
1	1	1	1	1	1	1	1	1	12
2	1	1	2	2	2	2	2	2	14
3	1	1	3	3	3	3	3	3	16
4	1	2	1	1	2	2	3	3	8
5	1	2	2	2	3	3	1	1	10
6	1	2	3	3	1	1	2	2	11
7	1	3	1	2	1	3	2	3	14
8	1	3	2	3	2	1	3	1	4
9	1	3	3	1	3	2	1	2	10
10	2	1	1	3	3	2	2	1	6
11	2	1	2	1	1	3	3	2	18
12	2	1	3	2	2	1	1	3	15
13	2	2	1	2	3	1	3	2	11
14	2	2	2	3	1	2	1	3	13
15	2	2	3	1	2	3	2	1	8
16	2	3	1	3	2	3	1	2	12
17	2	3	2	1	3	1	2	3	14
18	2	3	3	2	1	2	3	1	20

特徴的なのが、

B 列の 3 水準目の実際は 2 水準ですが、3 水準として扱う点が擬水準法の特徴です。

L18 の擬水準法について、
●データの構造式
●平方和の分解
●母平均の点推定と区間推定
を解いてみましょう。

【2】L18 の擬水準法のデータの構造式
擬水準法も各列の統合などの変化はないため、データの構造式は擬水準法を使わない場合と同じです。
なので、データの構造式は

$x = \mu + a + b + \cdots + g + \varepsilon$ (8 番目をεとします

もう少し詳細に書くと、

$$(x_i - \bar{\bar{x}}) = (\overline{x_{ai}} - \bar{\bar{x}})+(\overline{x_{bi}} - \bar{\bar{x}})+\cdots+(\overline{x_{gi}} - \bar{\bar{x}})+\{x_i - (\overline{x_{ai}} + \overline{x_{bi}} + \cdots + \overline{x_{gi}}) + 6\bar{\bar{x}}\}$$

と書けますね。慣れないと難しいかもしれませんが、頑張っていきましょう。

【3】L18 の平方和の分解
(1) データの構造式から平方和を計算
データの構造式を再掲します。
$(x_i - \bar{\bar{x}}) = (\overline{x_{ai}} - \bar{\bar{x}})+(\overline{x_{bi}} - \bar{\bar{x}})+\cdots+(\overline{x_{gi}} - \bar{\bar{x}})+\{x_i - (\overline{x_{ai}} + \overline{x_{bi}} + \cdots + \overline{x_{gi}}) + 6\bar{\bar{x}}\}$
これを 2 乗和すると、各項の平方和とその合計が全体の平方和に一致します。
ただし、式で証明するのは、大変なので、直交表を使って後で証明します。

証明したい式は
$\sum_{i=1}^{18}(x_i - \bar{\bar{x}})^2$ (⇒平方和の総和)
$=\sum_{i=1}^{18}(\overline{x_{ai}} - \bar{\bar{x}})^2$ (⇒直交表 1 列目の平方和 S_1 に相当)
$+\sum_{i=1}^{18}(\overline{x_{bi}} - \bar{\bar{x}})^2$ (⇒直交表 2 列目の平方和 S_2 に相当)
+⋯
$+\sum_{i=1}^{18}(\overline{x_{gi}} - \bar{\bar{x}})^2$ (⇒直交表 7 列目の平方和 S_7 に相当)
$+\sum_{i=1}^{18}\{x_i - (\overline{x_{ai}} + \overline{x_{bi}} + \cdots + \overline{x_{gi}}) + 6\bar{\bar{x}}\}^2$ (⇒直交表 8 列目の平方和 S_8 に相当)

(2) 直交表を使って各列の平方和を計算
2 水準系,3 水準系の直交表各列の平方和を計算する公式があります。
もちろん自力で導出できます！関連記事で確認ください。
【関連記事】【本記事限定】直交表の各列の平方和の式は自力で導出できる【必見】
https://qcplanets.com/method/doe/orthogonal-array7/

公式は、

●2 水準系の場合 $S[k]=\frac{(T_{[k]1}-T_{[k]2})^2}{N}$

●3 水準系の場合 $S[k]=\frac{(T_{[k]1}-T_{[k]2})^2+(T_{[k]2}-T_{[k]3})^2+(T_{[k]3}-T_{[k]1})^2}{3N}$

この式を使って直交表の各列の平方和を計算します。

(3) 直交表 L18 の各列の平方和を計算
擬水準法を使う場合の一番注意すべき点は、

擬水準法を適用した列は直交表から計算される平方和とその列の実際の平方和は違う！

実際に平方和を計算しながら、注意点を解説していきます。では、データを用意して、直交表各列の平方和を計算します。その結果は下表のとおりです。実際に計算してみてくださいね。

L18	A	B	C	D	E	F	G	e	data
1	1	1	1	1	1	1	1	1	12
2	1	1	2	2	2	2	2	2	14
3	1	1	3	3	3	3	3	3	16
4	1	2	1	1	2	2	3	3	8
5	1	2	2	2	3	3	1	1	10
6	1	2	3	3	1	1	2	2	11
7	1	3	1	2	1	3	2	3	14
8	1	3	2	3	2	1	3	1	4
9	1	3	3	1	3	2	1	2	10
10	2	1	1	3	3	2	2	1	6
11	2	1	2	1	1	3	3	2	18
12	2	1	3	2	2	1	1	3	15
13	2	2	1	2	3	1	3	2	11
14	2	2	2	3	1	2	1	3	13
15	2	2	3	1	2	3	2	1	8
16	2	3	1	3	2	3	1	2	12
17	2	3	2	1	3	1	2	3	14
18	2	3	3	2	1	2	3	1	20
1の合計	99	81	63	70	88	67	72	60	216
2の合計	117	61	73	84	61	71	67	76	-
3の合計	0	74	80	62	67	78	77	80	-
計	216	216	216	216	216	216	216	216	平方和計
平方和	27	34.33	24.33	41.33	67	10.33	8.33	37.33	250

なお、全体の平方和は、S=$\sum_1^{18} x_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{18} x_i\right)^2}{18}$=280 になり、混合系直交表の全平方和は 250 と 280 より少なくなり、要注意です。さらに、

擬水準法を適用した B 列の平方和は、直交表を使わずに平方和を計算すると

$S_B=\frac{81^2}{6}+\frac{135^2}{12}-\frac{216^2}{18}$=20.25 と直交表の S_B =34.33 と異なっています。

混合系直交表の擬水準法は
●総平方和と直交表全列平方和の和と違う
●擬水準法を適用した列の平方和は直交表からの値とは違う
の２点に注意が必要！

だったら、直交表 L16 などのスタンダートな直交表で擬水準法を適用しないケースを用意した方がよさそうですね。

昭和の時代はデータを取るのが非常に手間だったけど
現代はデータは簡単に取れるので、
わざわざ混合系直交表や擬水準法を
使わないといけない理由が
ピンと来ません。だから
時代背景を理解しよう！

【4】L18 の分散の期待値と分散分析
平方和の分解を確認できたら、ＱＣプラネッツのこだわりである、
分散の期待値と分散分析表を確認しましょう。先に結論を述べると、

混合系直交表の分散の期待値は綺麗に導出できない。式を立てて終わり

1 列目の平方和は $S_1=\sum_{i=1}^{18}(\overline{x_{ai}}-\bar{x})^2$ と書けます。
概略的な式変形になりますが、期待値の平方和を計算すると
$E[S_1]=E[\sum_{i=1}^{18}(\overline{x_{ai}}-\bar{x})^2]= E[\sum_{i=1}^{18}((\overline{x_{ai}}-\overline{x_{ea}})-\bar{x})^2]$
$=\cdots= E[\sum_{i=1}^{18}(\overline{x_{ai}}-\overline{x_{ea}})^2]+E[\sum_{i=1}^{18}(\bar{x})^2]$
=ここから文字式で計算ができません。
おそらく、
$E[S_1]= E[\sum_{i=1}^{18}(\overline{x_{ai}}-\overline{x_{ea}})^2]+1\times \sigma_e^2$
となるはずです。これ以上、首をつっこんでも収集つかないので、一旦止めます。擬水準法を適用した列の分散の期待値はなおさら難しくなりますね。一旦止めます。

直交表の全列も同様に途中まで解けます。分散分析表をまとめます。

-	S	Φ	V	F	E[V]
A	27	1	27	1.45	??+σ_e^2
B	~~34.33~~ 20.25	~~2~~ 1	17.17	0.92	??+σ_e^2
C	24.33	2	12.17	0.65	??+σ_e^2
D	41.33	2	20.67	1.11	??+σ_e^2
E	67	2	33.5	1.79	??+σ_e^2
F	10.33	2	5.17	0.28	??+σ_e^2
G	8.33	2	4.17	0.22	??+σ_e^2
e	37.33	2	18.67	-	σ_e^2
計	235.92	14	-	-	-

分散の期待値が？？としていますが、話を続けます。

【5】母平均の点推定と区間推定

次の母平均と区間推定を求めよ。
(i) μ_{A1}　　　　(ii) μ_{A1B2C1}

(1) データの構造式から母平均を計算
まず、データの構造式から母平均を計算します。
関連記事はここです。

【関連記事】【簡単】データの構造式から母平均の点推定が導出できる
https://qcplanets.com/method/doe/point-estimation/

● $\mu_{A1}=\mu+a_1=\bar{\bar{x}}+(\overline{x_{a1}}-\bar{\bar{x}})=\ \overline{x_{a1}}$=99/9=11
● $\mu_{A1B2C1}=\mu+a_1+b_2+c_1=\bar{\bar{x}}+(\overline{x_{a1}}-\bar{\bar{x}})+(\overline{x_{b2}}-\bar{\bar{x}})+(\overline{x_{c1}}-\bar{\bar{x}})=\overline{x_{a1}}+\overline{x_{b2}}+\overline{x_{c1}}-2\bar{\bar{x}}$
=99/9+135/12+63/6-2×216/18=8.75

(2) データの構造式から有効繰返数と区間推定を計算
次に区間推定を求めたいので、有効繰返数をデータの構造式から計算します。関連記事はここです。

【関連記事】【重要】データの構造式から有効反復数が導出できる
https://qcplanets.com/method/doe/effective-number/

● μ_{A1} の場合は
$\mu_{A1}=\mu+a_1=\mu+(\overline{a_1}+\overline{e_a})$

$V[\mu_{A1}]=V[\overline{e_a}]=\frac{1}{9}\sigma_e^2$=18.67/9=2.07

● μ_{A1B2C1} の場合は
$\mu_{A1B2C1}=\mu+a_1+b_2+c_1=\overline{x_{a1}}+\overline{x_{b2}}+\overline{x_{c1}}-2\bar{\bar{x}}=(\mu+\overline{a_1}+\overline{e_a})+(\mu+\overline{b_2}+\overline{e_b})+(\mu+\overline{c_1}+\overline{e_c})-2(\mu+\bar{\bar{e}})$
$=(\mu+\overline{a_1}+\overline{b_2}+\overline{c_1})+(\overline{e_a}+\overline{e_b}+\overline{e_c}-2\bar{\bar{e}})$
$V[\mu_{A1B2C1}]=V[(\mu+\overline{a_1}+\overline{b_2}+\overline{c_1})+(\overline{e_a}+\overline{e_b}+\overline{e_c}-2\bar{\bar{e}})]=V[\overline{e_a}+\overline{e_b}+\overline{e_c}-2\bar{\bar{e}}]$
$=\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{12}+\frac{1}{6}-2\times\frac{1}{18}\right)\sigma_e^2=\frac{1}{4}\sigma_e^2$=18.67/4=4.67

また、推定区間を求めます。
t(Φe, α=t(2,0.05)=4.303)より
● μ_{A1}＝11(母平均)±4.303(t(Φe, α))×1.439$\sqrt{V}$=4.809,17.19
● μ_{A1B2C1}＝8.75(=母平均)±4.303(=t(Φe, α))×2.16$\sqrt{V}$=-0.544,18.044
となります。

以上、「混合系直交表 L18 の擬水準法がわかる」を解説しました。

混合系直交表 L18 の多水準法がわかる 1

多水準にする方法が 2 つあるので、2 記事に分けて解説します。

①　2 水準系 1 列と 3 水準系 1 列を合体した 6 水準系(今回)
②　3 水準系 1 列と 3 水準系 1 列を合体した 9 水準系

①2 水準系 1 列と 3 水準系 1 列を合体した 6 水準系（図 1）

L18	A	B	C	D	E	F	G	e
1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	1	2	2	2	2	2	2
3	1	1	3	3	3	3	3	3
4	1	2	1	1	2	2	3	3
5	1	2	2	2	3	3	1	1
6	1	2	3	3	1	1	2	2
7	1	3	1	2	1	3	2	3
8	1	3	2	3	2	1	3	1
9	1	3	3	1	3	2	1	2
10	2	1	1	3	3	2	2	1
11	2	1	2	1	1	3	3	2
12	2	1	3	2	2	1	1	3
13	2	2	1	2	3	1	3	2
14	2	2	2	3	1	2	1	3
15	2	2	3	1	2	3	2	1
16	2	3	1	3	2	3	1	2
17	2	3	2	1	3	1	2	3
18	2	3	3	2	1	2	3	1

L18	AB	C	D	E	F	G	e
1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	2	2	2	2	2
3	1	3	3	3	3	3	3
4	2	1	1	2	2	3	3
5	2	2	2	3	3	1	1
6	2	3	3	1	1	2	2
7	3	1	2	1	3	2	3
8	3	2	3	2	1	3	1
9	3	3	1	3	2	1	2
10	4	1	3	3	2	2	1
11	4	2	1	1	3	3	2
12	4	3	2	2	1	1	3
13	5	1	2	3	1	3	2
14	5	2	3	1	2	1	3
15	5	3	1	2	3	2	1
16	6	1	3	2	3	1	2
17	6	2	1	3	1	2	3
18	6	3	2	1	2	3	1

②3 水準系 1 列と 3 水準系 1 列を合体した 9 水準系（図 2）

L18	A	B	C	D	E	F	G	e
1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	1	2	2	2	2	2	2
3	1	1	3	3	3	3	3	3
4	1	2	1	1	2	2	3	3
5	1	2	2	2	3	3	1	1
6	1	2	3	3	1	1	2	2
7	1	3	1	2	1	3	2	3
8	1	3	2	3	2	1	3	1
9	1	3	3	1	3	2	1	2
10	2	1	1	3	3	2	2	1
11	2	1	2	1	1	3	3	2
12	2	1	3	2	2	1	1	3
13	2	2	1	2	3	1	3	2
14	2	2	2	3	1	2	1	3
15	2	2	3	1	2	3	2	1
16	2	3	1	3	2	3	1	2
17	2	3	2	1	3	1	2	3
18	2	3	3	2	1	2	3	1

L18	A	BD	C	E	F	G	e
1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	2	2	2	2	2
3	1	3	3	3	3	3	3
4	1	4	1	2	2	3	3
5	1	5	2	3	3	1	1
6	1	6	3	1	1	2	2
7	1	8	1	1	3	2	3
8	1	9	2	2	1	3	1
9	1	7	3	3	2	1	2
10	2	3	1	3	2	2	1
11	2	1	2	1	3	3	2
12	2	2	3	2	1	1	3
13	2	5	1	3	1	3	2
14	2	6	2	1	2	1	3
15	2	4	3	2	3	2	1
16	2	9	1	2	3	1	2
17	2	7	2	3	1	2	3
18	2	8	3	1	2	3	1

本記事は、①2 水準系 1 列と 3 水準系 1 列を合体した 6 水準系を解説します。

【1】混合系直交表 L18 の多水準法とは
「混合系直交表 L18」の「多水準法」を解説しますが、先に、

(1) 直交表混合系 L18
(2) 多水準法(実験計画法)

を復習しましょう。

(1)混合系直交表 L18 とは？
関連記事で解説しています。ご確認ください。

【関連記事】混合系直交表 L18 がわかる
https://qcplanets.com/method/robust-parameter-design/l18/

(2) 多水準法とは？
多水準法で復習すべきポイントは２つあります。

①多水準法の基本
②直交表・多水準法と完全配置実験の分散分析は一致する

私のブログで、実験計画法のまとめ PDF 内で両方を解説しています。ご確認ください。

(3) 混合系直交表 L18 の多水準法とは？
今回解説する混合系直交表 L18 の多水準法とは

2 水準系 1 列と 3 水準系 1 列を合体した 6 水準系

具体的に直交表を作ると図 1 の表になります。

特徴的なのが、

A 列の 3 水準目の実際は 2 水準ですが、3 水準として扱う点が擬水準法の特徴です。

L18 の擬水準法について、
●データの構造式
●平方和の分解
●母平均の点推定と区間推定
を解いてみましょう。

【2】L18 の多水準法のデータの構造式
多水準法を適用したデータの構造式を作ると、

●元は、$x=\mu+a+b+\cdots+g+\varepsilon$
とすると、多水準法はa,bを合体させるので、
●元は、$x=\mu+ab+\cdots+g+\varepsilon$
となります。(残差をεとします)

もう少し詳細に書くと、

$$(x_i-\bar{\bar{x}})=(\overline{x_{ai}}-\bar{\bar{x}})+(\overline{x_{bi}}-\bar{\bar{x}})+\cdots+(\overline{x_{gi}}-\bar{\bar{x}})+\{x_i-(\overline{x_{ai}}+\overline{x_{bi}}+\cdots+\overline{x_{gi}})+6\bar{\bar{x}}\}$$
を多水準法に適用すると、
$$(x_i-\bar{\bar{x}})=(\overline{x_{abi}}-\bar{\bar{x}})+\cdots+(\overline{x_{gi}}-\bar{\bar{x}})+\{x_i-(\overline{x_{abi}}+\cdots+\overline{x_{gi}})+5\bar{\bar{x}}\}$$
と書けますね。慣れないと難しいかもしれませんが、頑張っていきましょう。

【3】L18 の平方和の分解

(1) データの構造式から平方和を計算

データの構造式を再掲します。

$$(x_i-\bar{\bar{x}})=(\overline{x_{abi}}-\bar{\bar{x}})+\cdots+(\overline{x_{gi}}-\bar{\bar{x}})+\{x_i-(\overline{x_{abi}}+\cdots+\overline{x_{gi}})+5\bar{\bar{x}}\}$$

これを 2 乗和すると、各項の平方和とその合計が全体の平方和に一致します。
ただし、式で証明するのは、大変なので、直交表を使って後で証明します。

証明したい式は

$$\sum_{i=1}^{18}(x_i-\bar{\bar{x}})^2=\sum_{i=1}^{18}(\overline{x_{abi}}-\bar{\bar{x}})^2+\cdots+\sum_{i=1}^{18}(\overline{x_{gi}}-\bar{\bar{x}})^2+\sum_{i=1}^{18}\{x_i-(\overline{x_{abi}}+\cdots+\overline{x_{gi}})+5\bar{\bar{x}}\}^2$$

です。

(2) 直交表を使って各列の平方和を計算

2 水準系,3 水準系の直交表各列の平方和を計算する公式があります。
もちろん自力で導出できます！関連記事で確認ください。

【関連記事】【本記事限定】直交表の各列の平方和の式は自力で導出できる【必見】
https://qcplanets.com/method/doe/orthogonal-array7/

公式は、

●2 水準系の場合　S[k]=$\frac{(T_{[k]1}-T_{[k]2})^2}{N}$

●3 水準系の場合　S[k]=$\frac{(T_{[k]1}-T_{[k]2})^2+(T_{[k]2}-T_{[k]3})^2+(T_{[k]3}-T_{[k]1})^2}{3N}$

ただし、6 水準系の公式はないので、実験計画法を思い出して、次式で計算します。

●6 水準系の場合　$S_{[ab]}=\sum_{i=1}^{6}\frac{AB_i\text{の水準和の2乗}}{\text{繰返し3}}-CT(\text{修正項})$

この式を使って直交表の各列の平方和を計算します。

(3) 直交表 L18 の各列の平方和を計算

多水準法を使う場合の注意すべき点は、2 つあります。

●合体前の A,B 各列の直交表の平方和 S_A,S_B

●合体後の AB の平方和 S_{AB} とすると

【1 点目】
$S_{AB}=S_A+S_B+S_{A\times B}$
$S_{AB}\neq S_A+S_B$
となり、１列と２列の平方和の合計だけでは不足！
【2 点目】
$S_{A\times B}$ は直交表列にはないが、
(総平方和)と(直交表の全列の平方和の総和)の差分に相当する

実際に計算するとわかりますので、やってみましょう。

ただ、

たくさん注意点があるなら、混合系直交表の多水準法はあまり使いたくないですよね。

実際に平方和を計算しながら、注意点を解説していきます。

では、データを用意して、直交表各列の平方和を計算します。その結果は下表のとおりです。実際に計算してみてくださいね。

L18	A	B	C	D	E	F	G	e	data
1	1	1	1	1	1	1	1	1	12
2	1	1	2	2	2	2	2	2	14
3	1	1	3	3	3	3	3	3	16
4	1	2	1	1	2	2	3	3	8
5	1	2	2	2	3	3	1	1	10
6	1	2	3	3	1	1	2	2	11
7	1	3	1	2	1	3	2	3	14
8	1	3	2	3	2	1	3	1	4
9	1	3	3	1	3	2	1	2	10
10	2	1	1	3	3	2	2	1	6
11	2	1	2	1	1	3	3	2	18
12	2	1	3	2	2	1	1	3	15
13	2	2	1	2	3	1	3	2	11
14	2	2	2	3	1	2	1	3	13
15	2	2	3	1	2	3	2	1	8
16	2	3	1	3	2	3	1	2	12
17	2	3	2	1	3	1	2	3	14
18	2	3	3	2	1	2	3	1	20
1	99	81	63	70	88	67	72	60	216
2	117	61	73	84	61	71	67	76	―
3	0	74	80	62	67	78	77	80	―
計	216	216	216	216	216	216	216	216	合計
平方和	27	34.33	24.33	41.33	67	10.33	8.33	37.33	250

L18	AB	C	D	E	F	G	e	data
1	1	1	1	1	1	1	1	12
2	1	2	2	2	2	2	2	14
3	1	3	3	3	3	3	3	16
4	2	1	1	2	2	3	3	8
5	2	2	2	3	3	1	1	10
6	2	3	3	1	1	2	2	11
7	3	1	2	1	3	2	3	14
8	3	2	3	2	1	3	1	4
9	3	3	1	3	2	1	2	10
10	4	1	3	3	2	2	1	6
11	4	2	1	1	3	3	2	18
12	4	3	2	2	1	1	3	15
13	5	1	2	3	1	3	2	11
14	5	2	3	1	2	1	3	13
15	5	3	1	2	3	2	1	8
16	6	1	3	2	3	1	2	12
17	6	2	1	3	1	2	3	14
18	6	3	2	1	2	3	1	20
1		63	70	88	67	72	60	216
2		73	84	61	71	67	76	―
3		80	62	67	78	77	80	―
計		216	216	216	216	216	216	合計
平方和		24.33	41.33	67.00	10	8.33	37.33	188.67

・全体の平方和 $S_T=\sum_{i=1}^{18} x_i^2 - \frac{(\sum_{i=1}^{18} x_i)^2}{18}=280$

・合体した $S_{AB}=\frac{1}{r(=3)}(AB_1^2+AB_2^2+AB_3^2+AB_4^2+AB_5^2+AB_6^2)-CT=\frac{42^2+29^2+28^2+39^2+32^2+46^2}{3}-\frac{216^2}{18}=91.33$

先ほどの２つの注意点を確認しましょう。

★S_{AB}≠S_A+S_B の確認

●S_{AB} =91.33

●S_A + S_B =27+34.33=61.33

より、確かに、

S_{AB}≠S_A+S_B

となります。一方で、差分の 30 はどこにあるのでしょうかね？

$S_{A×B}$ は**(総平方和)と(直交表の全列の平方和の総和)の差分**

【1】(1)の関連記事　「混合系直交表 L18 がわかる」

(https://qcplanets.com/method/robust-parameter-design/l18)

●総平方和 S_T=280 と

●直交表の全列の平方和の総和 S=250

の差の 30 に該当します。

そうなると、確かに、

S_{AB}=S_A+S_B+$S_{A×B}$=27+34.33+30=91.33

と一致します。

$S_{A×B}$ は混合系直交表の列には無いので、個別に計算して確認する必要があります。

混合系でないスタンダートな直交表ではこの確認は不要です。混合系直交表は手間ですよね。

【4】L18 の分散の期待値と分散分析

平方和の分解を確認できたら、分散の期待値と分散分析表を確認しましょう。先に結論を述べると

混合系直交表の分散の期待値は綺麗に導出できない。式を立てて終わり

です。

1 列目の平方和は
$S_1=\sum_{i=1}^{18}(\overline{x_{ai}}-\bar{\bar{x}})^2$
と書けます。

概略的な式変形になりますが、期待値の平方和を計算すると
$E[S_1]=E[\sum_{i=1}^{18}(\overline{x_{ai}}-\bar{\bar{x}})^2]=E[\sum_{i=1}^{18}((\overline{x_{ai}}-\overline{x_{ea}})-\bar{\bar{x}})^2]= E[\sum_{i=1}^{18}(\overline{x_{ai}}-\overline{x_{ea}})^2]+ E[\sum_{i=1}^{18}(\bar{\bar{x}})^2]$
=ここから文字式で計算ができません。

おそらく、
$E[S_1]= E[\sum_{i=1}^{18}(\overline{x_{ai}}-\overline{x_{ea}})^2+1\times\sigma_e^2$
となるはずです。これ以上、首をつっこんでも収集つかないので、一旦止めます。

多水準法を適用した列の分散の期待値はなおさら難しくなりますね。一旦止めます。

直交表の全列も同様に途中まで解けます。分散分析表をまとめます。

元	S	Φ	V	F	⇒	多水準	S	Φ	V	F
A	27	1	27	1.446	⇒	AB	91.33	5	18.27	0.979
B	34.33	2	17.17	0.92						
C	24.33	2	12.17	0.652	⇒	C	24.33	2	12.17	0.652
D	41.33	2	20.67	1.107	⇒	D	41.33	2	20.67	1.107
E	67	2	33.5	1.795	⇒	E	67	2	33.5	1.795
F	10.33	2	5.167	0.277	⇒	F	10.33	2	5.167	0.277
G	8.33	2	4.167	0.223	⇒	G	8.33	2	4.167	0.223
e	37.33	2	18.67	-	⇒	e	37.33	2	18.67	-
計	250	15	-	-	-	-	-	-	-	-
(A×B)	30	2	-	-	-	-	-	-	-	-
計	280	17	-	-	⇒	計	280	17	-	-

多水準法になった場合の平方和の計算の注意点を意識して上表で値を確認しましょう。
分散の期待値が？？としていますが、話を続けます。

【5】母平均の点推定と区間推定<
(1) 例題

次の母平均と区間推定を求めよ。　　　　(i) μ_{AB2C1}

データの構造式から母平均を計算します。。まず、データの構造式から母平均を計算します。
関連記事はここです。

【関連記事】【簡単】データの構造式から母平均の点推定が導出できる
https://qcplanets.com/method/doe/point-estimation/

多水準法で合体した AB のところを意識して見ていきましょう。

● $\mu_{AB2C1}=\mu+ab_2+c_1=\mu+\overline{ab_2}+\overline{c_1}=\bar{\bar{x}}+(\overline{x_{ab2}}-\bar{\bar{x}})+(\overline{x_{c1}}-\bar{\bar{x}})=\overline{x_{ab2}}+\overline{x_{c1}}-\bar{\bar{x}}=\frac{29}{3}+\frac{63}{6}-\frac{216}{18}=8.167$

(2) データの構造式から有効繰返数と区間推定を計算
　次に区間推定を求めたいので、有効繰返数をデータの構造式から計算します。関連記事はここです。

【関連記事】【重要】データの構造式から有効反復数が導出できる
https://qcplanets.com/method/doe/effective-number/

● $\mu_{AB2C1}=\mu+ab_2+c_1=\overline{x_{ab2}}+\overline{x_{c1}}-\bar{\bar{x}}$

$=\mu + ab_2 + c_1 + (\overline{e_{ab}} + \overline{e_c} - \bar{\bar{e}})$

$V[\mu_{AB2C1}] = V[\mu + ab_2 + c_1 + (\overline{e_{ab}} + \overline{e_c} - \bar{\bar{e}})] = V[(\overline{e_{ab}} + \overline{e_c} - \bar{\bar{e}})] = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{6} - \frac{1}{18}\right)\sigma_e^2 = \frac{4}{9} \times 18.67 = 8.30$

また、推定区間を求めます。$t(\Phi_e, \alpha) = t(2, 0.05) = 4.303$ より、
●μ_{AB2C1}＝8.167(=母平均)±4.303(=$t(\Phi_e, \alpha)$)×2.88(=$\sqrt{V}$))=-4.226,20.560
となります。

以上、「混合系直交表 L18 の多水準法がわかる 1」を解説しました。

混合系直交表 L18 の多水準法がわかる 2

多水準にする方法が 2 つあるので、2 記事に分けて解説します。

①　2 水準系 1 列と 3 水準系 1 列を合体した 6 水準系
②　3 水準系 1 列と 3 水準系 1 列を合体した 9 水準系(今回)

①と②の違いは「混合系直交表 L18 の多水準法がわかる 1」で説明済です。

【1】混合系直交表 L18 の多水準法とは

「混合系直交表 L18 の多水準法がわかる 1」で説明済です。

(1) 混合系直交表 L18 の多水準法とは？

今回解説する混合系直交表 L18 の多水準法とは

3 水準系 1 列と 3 水準系 1 列を合体した 9 水準系

具体的に直交表を作ると下図の表になります。

L18	A	B	C	D	E	F	G	e
1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	1	2	2	2	2	2	2
3	1	1	3	3	3	3	3	3
4	1	2	1	1	2	2	3	3
5	1	2	2	2	3	3	1	1
6	1	2	3	3	1	1	2	2
7	1	3	1	2	1	3	2	3
8	1	3	2	3	2	1	3	1
9	1	3	3	1	3	2	1	2
10	2	1	1	3	3	2	2	1
11	2	1	2	1	1	3	3	2
12	2	1	3	2	2	1	1	3
13	2	2	1	2	3	1	3	2
14	2	2	2	3	1	2	1	3
15	2	2	3	1	2	3	2	1
16	2	3	1	3	2	3	1	2
17	2	3	2	1	3	1	2	3
18	2	3	3	2	1	2	3	1

L18	A	BD	C	E	F	G	e
1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	2	2	2	2	2
3	1	3	3	3	3	3	3
4	1	4	1	2	2	3	3
5	1	5	2	3	3	1	1
6	1	6	3	1	1	2	2
7	1	8	1	1	3	2	3
8	1	9	2	2	1	3	1
9	1	7	3	3	2	1	2
10	2	3	1	3	2	2	1
11	2	1	2	1	3	3	2
12	2	2	3	2	1	1	3
13	2	5	1	3	1	3	2
14	2	6	2	1	2	1	3
15	2	4	3	2	3	2	1
16	2	9	1	2	3	1	2
17	2	7	2	3	1	2	3
18	2	8	3	1	2	3	1

特徴的なのが、

3 水準どおしの 2 列を 1 列に合体して 9 水準化している点です。

L18 の擬水準法について、

●データの構造式

●平方和の分解

●母平均の点推定と区間推定

を解いてみましょう。

【2】L18 の多水準法のデータの構造式

「混合系直交表 L18 の多水準法がわかる 1」で説明済です。

多水準法を適用したデータの構造式を作ると、

●元は、$x=\mu+a+b+\cdots+g+\varepsilon$

とすると、多水準法はb,dを合体させるので、

●元は、$x=\mu+a+bd+\cdots+g+\varepsilon$

となります。(残差をεとします)

もう少し詳細に書くと、

$$(x_i-\bar{\bar{x}})=(\overline{x_{ai}}-\bar{\bar{x}})+(\overline{x_{bdi}}-\bar{\bar{x}})+\cdots+\left(\overline{x_{gi}}-\bar{\bar{x}}\right)+\left\{x_i-\left(\overline{x_{ai}}+\cdots+\overline{x_{gi}}\right)+5\bar{\bar{x}}\right\}$$

と書けますね。慣れないと難しいかもしれませんが、頑張っていきましょう。

【3】 L18 の平方和の分解

「混合系直交表 L18 の多水準法がわかる 1」で説明済です。

(1) データの構造式から平方和を計算

$$(x_i-\bar{\bar{x}})=(\overline{x_{ai}}-\bar{\bar{x}})+(\overline{x_{bdi}}-\bar{\bar{x}})+\cdots+(\overline{x_{gi}}-\bar{\bar{x}})+\{x_i-(\overline{x_{ai}}+\cdots+\overline{x_{gi}})+5\bar{\bar{x}}\}$$

から、証明したい式は

$$\sum_{i=1}^{18}(x_i-\bar{\bar{x}})^2=\sum_{i=1}^{18}(\overline{x_{ai}}-\bar{\bar{x}})^2+\sum_{i=1}^{18}(\overline{x_{bdi}}-\bar{\bar{x}})^2+\cdots+\sum_{i=1}^{18}(\overline{x_{gi}}-\bar{\bar{x}})^2+\sum_{i=1}^{18}\{x_i-(\overline{x_{ai}}+\cdots+\overline{x_{gi}})+5\bar{\bar{x}}\}^2$$

です。これを 2 乗和すると、各項の平方和とその合計が全体の平方和に一致します。

ただし、式で証明するのは、大変なので、直交表を使って後で証明します。

(2) 直交表を使って各列の平方和を計算

●2 水準系の場合　　$S[k]=\frac{(T_{[k]1}-T_{[k]2})^2}{N}$

●3 水準系の場合　　$S[k]=\frac{(T_{[k]1}-T_{[k]2})^2+(T_{[k]2}-T_{[k]3})^2+(T_{[k]3}-T_{[k]1})^2}{3N}$

ただし、9 水準系の公式はないので、実験計画法を思い出して、次式で計算します。

●9 水準系の場合　$S_{[bd]}=\sum_{i=1}^{9}\frac{\text{BD}_i\text{の水準和の２乗}}{\text{繰返し 2}}-\text{CT}(\text{修正項})$

(3) 直交表 L18 の各列の平方和を計算

多水準法を使う場合の注意すべき点は、2 つあります。

●合体前の B,D 各列の直交表の平方和 S_B,S_D

●合体後の BD の平方和 S_{BD} とすると

【1 点目】

$S_{BD}=S_B+S_D+S_{B\times D}$

$S_{BD}\neq S_B+S_D$

となり、2 列と 4 列の平方和の合計だけでは不足！

【2 点目】

$S_{B\times D}$ は直交表列から計算できない

実際に計算するとわかりますので、やってみましょう。

L18	A	B	C	D	E	F	G	e	data
1	1	1	1	1	1	1	1	1	12
2	1	1	2	2	2	2	2	2	14
3	1	1	3	3	3	3	3	3	16
4	1	2	1	1	2	2	3	3	8
5	1	2	2	2	3	3	1	1	10
6	1	2	3	3	1	1	2	2	11
7	1	3	1	2	1	3	2	3	14
8	1	3	2	3	2	1	3	1	4
9	1	3	3	1	3	2	1	2	10
10	2	1	1	3	3	2	2	1	6
11	2	1	2	1	1	3	3	2	18
12	2	1	3	2	2	1	1	3	15
13	2	2	1	2	3	1	3	2	11
14	2	2	2	3	1	2	1	3	13
15	2	2	3	1	2	3	2	1	8
16	2	3	1	3	2	3	1	2	12
17	2	3	2	1	3	1	2	3	14
18	2	3	3	2	1	2	3	1	20
1	99	81	63	70	88	67	72	60	216
2	117	61	73	84	61	71	67	76	―
3	0	74	80	62	67	78	77	80	―
計	216	216	216	216	216	216	216	216	合計
平方和	27	34.33	24.33	41.33	67	10.33	8.33	37.33	250

L18	A	BD	C	E	F	G	e	data
1	1	1	1	1	1	1	1	12
2	1	2	2	2	2	2	2	14
3	1	3	3	3	3	3	3	16
4	1	4	1	2	2	3	3	8
5	1	5	2	3	3	1	1	10
6	1	6	3	1	1	2	2	11
7	1	8	1	1	3	2	3	14
8	1	9	2	2	1	3	1	4
9	1	7	3	3	2	1	2	10
10	2	3	1	3	2	2	1	6
11	2	1	2	1	3	3	2	18
12	2	2	3	2	1	1	3	15
13	2	5	1	3	1	3	2	11
14	2	6	2	1	2	1	3	13
15	2	4	3	2	3	2	1	8
16	2	9	1	2	3	1	2	12
17	2	7	2	3	1	2	3	14
18	2	8	3	1	2	3	1	20
1	99		63	88	67	72	60	216
2	117		73	61	71	67	76	―
3	-		80	67	78	77	80	―
計	216		216	216	216	216	216	合計
平方和	27		24.33	67	10.33	8.33	37.33	174.33
		151						

・全体の平方和 $S_T=\sum_{i=1}^{18} x_i^2 - \frac{(\sum_{i=1}^{18} x_i)^2}{18}$=280

・合体した $S_{BD}=\frac{1}{r(=2)}(BD_1^2+BD_2^2+\cdots+BD_9^2)-CT=\frac{30^2+\cdots+16^2}{2}-\frac{216^2}{18}$=151

先ほどの２つの注意点を確認しましょう。

★S_{BD}≠S_B+S_D の確認

●S_{BD} =151

●S_B + S_D =34.33+41.33=65.67

より、確かに、

S_{BD}≠S_B+S_D で、差分の 84.33 は $S_{B\times D}$ に該当します。しかし、$S_{B\times D}$ は L18 の列に無いので、直交表の外で、平方和を計算する必要があります。

【4】L18 の分散の期待値と分散分析

「混合系直交表 L18 の多水準法がわかる 1」で説明済です。

分散分析表をまとめます。

元	S	Φ	V	F	⇒	多水準	S	Φ	V	F
A	27	1	27	1.45	⇒	A	27	1	27	1.446
B	34.33	2	17.17	0.92	⇒	−	−	−	−	−
C	24.33	2	12.17	0.65	⇒	C	24.33	2	12.17	0.652
D	41.33	2	20.67	1.11	⇒	−	−	−	−	−
E	67	2	33.5	1.79	⇒	E	67	2	33.5	1.795
F	10.33	2	5.17	0.28	⇒	F	10.33	2	5.167	0.277
G	8.33	2	4.17	0.22	⇒	G	8.333	2	4.167	0.223
e	37.33	2	18.67	-	⇒	e	37.33	2	18.67	-
計	250	15	-	-	⇒	計	174.3	11	-	-
(A×B)	30	2	-	-	⇒	BD	151	8	-	-
計	280	-	-		⇒	計	325.3	19	-	-

多水準法になった場合の平方和の計算の注意点を意識して上表で値を確認しましょう。

分散の期待値が？？としていますが、話を続けます。

【5】母平均の点推定と区間推定

「混合系直交表 L18 の多水準法がわかる 1」で説明済です。

(1) 例題

次の母平均と区間推定を求めよ。　(i) μ_{A1BD2}

多水準法で合体した BD のところを意識して見ていきましょう。

● $\mu_{A1BD2}=\mu+a_1+bd_2=\mu+\overline{a_1}+\overline{bd_2}=\bar{\bar{x}}+(\overline{x_{a1}}-\bar{\bar{x}})+(\overline{x_{bd2}}-\bar{\bar{x}})=\overline{x_{a1}}+\overline{x_{bd2}}-\bar{\bar{x}}=\frac{99}{9}+\frac{29}{2}-\frac{216}{18}=13.5$

(2) データの構造式から有効繰返数と区間推定を計算

● $\mu_{A1BD2}=\mu+a_1+bd_2=\overline{x_{a1}}+\overline{x_{bd2}}-\bar{\bar{x}}=\mu+a_1+bd_2+(\overline{e_a}+\overline{e_{bd}}-\bar{\bar{e}})$

$V[\mu_{A1BD2}]=V[\mu+a_1+bd_2+(\overline{e_a}+\overline{e_{bd}}-\bar{\bar{e}})]=V[(\overline{e_a}+\overline{e_{bd}}-\bar{\bar{e}})]=\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{2}-\frac{1}{18}\right)\sigma_e^2=\frac{4}{9}\times 18.67=10.37$

また、推定区間を求める t(Φe, α=t(2,0.05)=4.303)より、

● $\mu_{[A1BD2]}$＝13.5(=母平均)±4.303(=t(Φe, α))×3.22(=$\sqrt{V}$)=-0.36,27.36

となります。

以上、「混合系直交表 L18 の多水準法がわかる 2」を解説しました。

【初心者必見】品質工学で全変動と平方和の違いがわかる

【1】QC は必ずデータの構造式から始める

(1) 分散分析で評価する手法はすべて 1 つの解法で OK

QC には、まず、

ばらつきを評価する変数が必要!　評価するためのデータの構造式を最初に作る！

実験計画法、回帰分析、品質工学のような、分散分析で評価する手法はすべて同じ解法で進めます。

QC プラネッツでは、常に、

①データの構造式を立てる
②全変動(平方和)の分解
③分散分析と F 検定
④母平均と区間推定

の 1 つの流れに沿って、何十の関連記事を書いています。参考に 1 つ関連記事を紹介します。

(2)データの構造式を立てる

データの構造式は基本 1 次式で書き、「全変動」と「平方和」の 2 つを使います。

●全変動　$S=\sum_{i=1}^{n}(x_i-m)^2$
●平方和　$S=\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$
全変動と平方和は何が違うの？

と気になるでしょう！　ここが、品質工学の入り口になります。

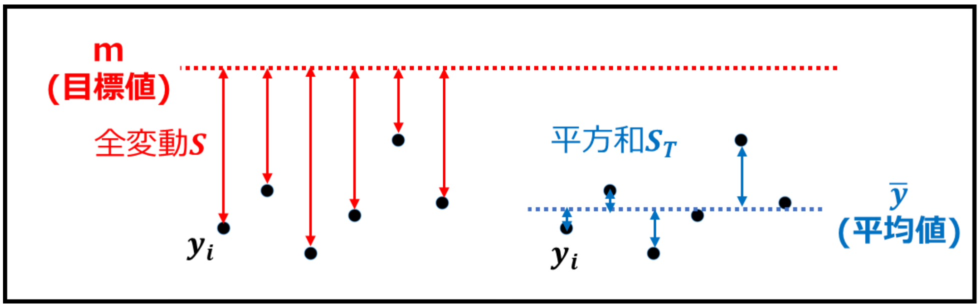
【2】品質工学と実験計画法・回帰分析の違い

(1) 全変動と平方和の違い

結論からいうと、

品質工学は全変動を使い、実験計画法・回帰分析は平方和を使う

図で違いを説明します。



(2)【重要】品質工学と実験計画法・回帰分析の考え方の違い

図から言える、最も大事なことは、

品質工学は目標値に近づけることが目的で、実験計画法・回帰分析は誤差の評価や最小化をすることが目的と、目的が違います

なので、基本は、

●品質工学は、目標値との差分を見る
●実験計画法・回帰分析は平均値との差分を見る

という違いがあります。

(3) ただし、式変形していくと、違いが分かりにくくなる

題名のとおり、式変形すると、

品質工学は $\sum_{i=1}^{n}y^2$を(左辺)に持ってきて
実験計画法は$\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2$を(左辺)に持ってくるという
なんとなく違いがあるように見えると、公式丸暗記しがちです。

品質工学は目標値に近づけることが目的で、
実験計画法・回帰分析は誤差の評価や最小化をすることが目的
と、目的が違います

【3】全変動と平方和の違いを理解する
数式を使って、
●違いを理解したり、
●違いがわかりにくくなるポイント
を理解しましょう。
(1) 全変動を展開
品質工学で扱う全変動(~~平方和~~)を展開します。機械的にそのまま全変動を展開します。
S=$\sum_{i=1}^{n}(y_i-m)^2$=$(y_1-m)^2+(y_2-m)^2+\cdots+(y_n-m)^2$
=$(y_1^2+y_2^2+\cdots+y_n^2)-2m(y_1+y_2+\cdots+y_n)+\ nm^2$=(式 1)

ここで、トリッキーですが、(式 1)にあえて $\frac{(y_1+\cdots+y_n)^2}{n}$を入れます。

(式 1)=$(y_1^2+y_2^2+\cdots+y_n^2)+\frac{(y_1+\cdots+y_n)^2}{n}-2m(y_1+y_2+\cdots+y_n)+\ nm^2-\frac{(y_1+\cdots+y_n)^2}{n}$

(式 2)の第 2,3,4 項$\frac{(y_1+\cdots+y_n)^2}{n}-2m(y_1+y_2+\cdots+y_n)+\ nm^2$は 2 乗でまとめられます！
つまり、
$\frac{(y_1+\cdots+y_n)^2}{n}-2m(y_1+y_2+\cdots+y_n)+\ nm^2$=$\left(\frac{y_1+y_2+\cdots+y_n}{\sqrt{n}}-\sqrt{n}m\right)^2$=$\frac{1}{n}\{(y_1+y_2+\cdots+y_n)-nm\}^2$=(式 3)

(式 3)を(式 2)に代入すると、(式 4)のようにまとめることができます。
S =$\frac{1}{n}\{(y_1+y_2+\cdots+y_n)-nm\}^2$ +$(y_1^2+y_2^2+\cdots+y_n^2)-\frac{(y_1+\cdots+y_n)^2}{n}$=(式 4)

ここで、S_m,S_eを定義します。
●S_m(平均変動)= $\frac{1}{n}\{(y_1+y_2+\cdots+y_n)-nm\}^2$

●S_e(誤差変動)= $(y_1^2+y_2^2+\cdots+y_n^2)-\frac{(y_1+\cdots+y_n)^2}{n}$

全変動 S_T は
S_T(全変動)=S_m(平均変動)+ S_e(誤差変動)
に分けることができる

(2) 実は S_e(誤差変動)はよく見ると平方和
よく見ると、
S_e(誤差変動)= $(y_1^2+y_2^2+\cdots+y_n^2)-\frac{(y_1+\cdots+y_n)^2}{n}$=平方和 S_T なのです。

品質工学では、ばらつきの評価は、実験計画法・回帰分析と違って平方和ではなく全変動で評価します。
まとめると、全変動 S は
S(全変動)=S_m(平均変動)+ S_e(誤差変動)
S(全変動)=S_m(平均変動)+ S_T(平方和)
に分けることができる

全変動の誤差分散成分が平方和になるので、面白いですね。

全変動と平方和は式がよく似ているが、品質工学は目標値に近づけることが目的で、
実験計画法・回帰分析は誤差の評価や最小化をすることが目的と、目的が違います

なので、全変動の合計と、平方和の文字式を QC プラネッツでは、
●全変動⇒S
●平方和⇒S_T
に区別して表記します。ご安心ください。

【4】全変動の平均変動が最小 0 の条件が平方和
さらに、今度は、平均変動の最小値を考えましょう。

平均変動は、

●S_m(平均変動)= $\frac{1}{n}\{(y_1+y_2+\cdots+y_n)-nm\}^2$ですから、この式が 0 になる条件を求めると、

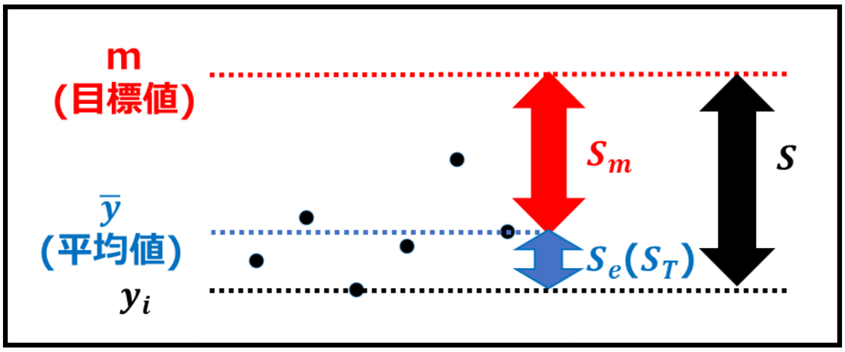
$(y_1+y_2+\cdots+y_n)= nm$
より

$m=\frac{1}{n}(y_1+y_2+\cdots+y_n)$となります。これって、

$\bar{y}$

目標値mが平均値$\bar{y}$のときですね。目標値mが平均値$\bar{y}$と一致する場合は、
S(全変動)= S_e≡S_T(平方和)と一致します。

もう一度、全変動 S、平均変動 S_m、誤差分散 S_e(≡S_T)(平方和)の違いを図で確認しましょう。



品質工学は目標値に近づけることが目的で、実験計画法・回帰分析は誤差の評価や最小化をすることが目的と、目的が違います。

まず、品質工学の基礎である、変動の計算と平方和の計算が混同しないよう十分注意しましょう！

以上、「【初心者必見】品質工学で全変動と平方和の違いがわかる」を解説しました。

品質工学,静特性、誤差因子が１つの場合がわかる

【1】静特性、誤差因子が１つの場合とは
(1) 実験計画法の一元配置実験と同じと見てよい
品質工学の嫌なところは、

実験計画法、回帰分析の内容と同じなのにあえて違う用語や式を使って独自性を出そうとするところ
だから品質工学が理解しにくい！

この記事も、はっきりいうと

「静特性、誤差因子が１つの場合」 =「実験計画法の一元配置実験」
　ただし、実験計画法と１つ異なる点があり、
「品質工学は、目標値との差分を見るが、実験計画法は平均値との差分を見る」です。

ここだけ、注意しましょう。あとは、実験計画法と同じです。

(1) 静特性、誤差因子が１つの場合の事例
　例えば、下表のようなデータが誤差因子１つの場合と言えます。はっきりいって、
実験計画法の一元配置実験と同じです。表を見ても明らかです。

i/j	1	2	…	n	合計
N_1	y_{11}	y_{12}	…	y_1n	Y_1
N_2	y_{21}	y_{22}	…	y_{2n}	Y_2
…	…	…	…	…	…
N_k	y_{k1}	y_{k2}	…	y_{kn}	Y_k

実験計画法なら　因子 N でなく A としますね。別に N にして品質工学の独自性を出す必要はないですよ。学問は、他の手法と比較しながら学ぶと学習効果が高まります。

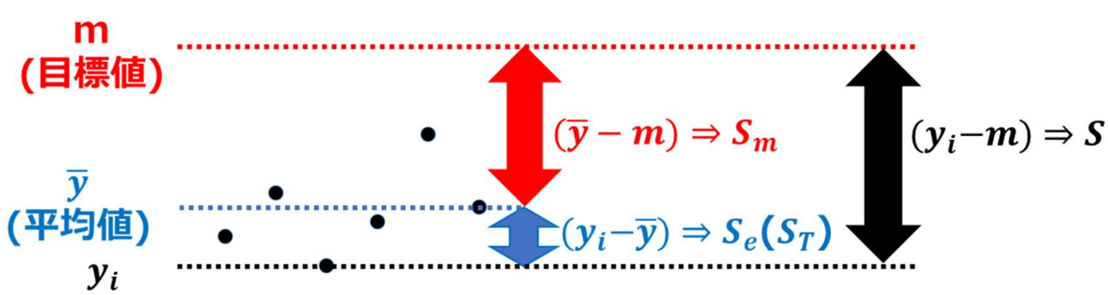
実験計画法も関連記事で復習しましょう。

【関連記事】【必読】一元配置実験(繰返し数が同じ)が解ける【QC 検定®級対策】
https://qcplanets.com/qc/qc2/doe-anova-one-way-1/

【2】静特性の全変動を導出
(1) 静特性を表すデータの構造式を作る
品質工学の目的は、何度も言いますが、

品質工学は目標値に近づけることが目的で、品質工学は、目標値との差分を見る!

静特性を図で表現すると下図になり、この図をもとにデータの構造式を作ります。



静特性、誤差因子が１つの場合のデータの構造式は、

$(y_{ij}-m)=(\bar{\bar{y}}-m)+\left(\overline{y_{i\cdot}}-\bar{\bar{y}}\right)+\left(y_{ij}-\overline{y_{i\cdot}}\right)$　と書けますね。

【3】静特性の変動の注意点

(1) 教科書に書いてあるデータの構造式

教科書に出て来る式は、なぜか、

$\left(y_{ij} \cancel{- m}\right) = \left(\bar{\bar{y}} \cancel{- m}\right) + \left(\overline{y_{i\cdot}} - \bar{\bar{y}}\right) + \left(y_{ij} - \overline{y_{i\cdot}}\right)$ つまり、$y_{ij} = \bar{\bar{y}} + \left(\overline{y_{i\cdot}} - \bar{\bar{y}}\right) + \left(y_{ij} - \overline{y_{i\cdot}}\right)$

目標値のmがありません。

実は、目標値のmを省くところが、品質工学の目的がぼやけてしまい、理解しにくくなる点なのです。

同じ内容を、関連記事でも紹介していますので、ご確認ください。

【関連記事】品質工学,静特性の変動と SN 比の注意点がわかる

https://qcplanets.com/method/robust-parameter-design/static-variance-sn/

(2) 定義どおり立式しても目標値の項は省ける

静特性の目的を網羅した式

$$\left(y_{ij} - m\right) = \left(\bar{\bar{y}} - m\right) + \left(\overline{y_{i\cdot}} - \bar{\bar{y}}\right) + \left(y_{ij} - \overline{y_{i\cdot}}\right)$$

の２乗和を計算すると、

$$y_{ij} = \bar{\bar{y}} + \left(\overline{y_{i\cdot}} - \bar{\bar{y}}\right) + \left(y_{ij} - \overline{y_{i\cdot}}\right)$$

でもいいことが分かります。

また、シンプルだから教科書では、

$$y_{ij} = \bar{\bar{y}} + \left(\overline{y_{i\cdot}} - \bar{\bar{y}}\right) + \left(y_{ij} - \overline{y_{i\cdot}}\right)$$

のデータの構造式から解説しています。

・シンプルとはいえ、肝心な目標値mを省くから静特性は何を計算しているかがわかりにくくなる！
・実験計画法、回帰分析、品質工学を１つずつちゃんと理解するには、２乗和の分解を解くスキルがとても大事です！

(3) ２乗和を計算して目標値mの項が不要か確かめよう！

では、２乗和を計算して、目標値mが不要になるか確かめましょう。

【証明はこの記事の最後のページに掲載】

確かに計算結果みると、目標値mが不要になっているのがわかります。

品質工学の教科書をむやみに公式暗記せず、分散分析を活用する実験計画法、回帰分析と比較しながら、読み進めましょう！　そうしないと品質工学の本質が理解できない!

【4】SN 比の注意点

(1)　2 乗和の変動成分

2 乗和の式が 2 つあります。目標値を含む場合と含まない場合の 2 通りですね。

●目標値mを含む方(本来この式であるべき式)

$(y_{ij}-m)=(\bar{\bar{y}}-m)+\left(\overline{y_{i}\cdot}-\bar{\bar{y}}\right)+\left(y_{ij}-\overline{y_{i}\cdot}\right)$

・S(全変動)：$(y_{ij}-m)$

・S_m(平均変動)：$(\bar{\bar{y}}-m)$

・S_N(誤差因子 N による変動)：$\left(\overline{y_{i}\cdot}-\bar{\bar{y}}\right)$

・S_e(ランダムばらつきの変動)：$\left(y_{ij}-\overline{y_{i}\cdot}\right)$

●目標値mを含まない方(教科書に書いている式)

$y_{ij}=\bar{\bar{y}}+\left(\overline{y_{i}\cdot}-\bar{\bar{y}}\right)+\left(y_{ij}-\overline{y_{i}\cdot}\right)$

・S(全変動)：y_{ij}

・S_m(平均変動)：y_{ij}

・S_N(誤差因子 N による変動)：$\left(\overline{y_{i}\cdot}-\bar{\bar{y}}\right)$

・S_e(ランダムばらつきの変動)：$\left(y_{ij}-\overline{y_{i}\cdot}\right)$

両者を比較すると、

目標値mの有無で、S_m (平均変動)と S (全変動)に違いが出ていますね。

　実際に SN 比を計算すると、目標値 m を除去した方が実用的な値になるから、教科書は目標値 m がない式を使っていると考えられます。でも、本質的な理由ではないですよね。本来、品質工学は目標値を狙うものです。よく考えながら品質工学を勉強していきましょう。

(2) SN 比の定義

SN 比は、有効成分と有害成分の比として、SN 比が大きいほど良いとする変数です。

本記事では、いろいろ SN 比が定義できそうです。

●目標値mを入れる・入れない

●ＳＮ比の分母、分子に何を入れるか

SN 比の分子は、

(A)(分子)=S_m、分母=S_e とする場合

(B)(分子)= S_m +S_N、分母= S_e とする場合

(C)(分子)= S_m、分母= S_N + S_e とする場合

をそれぞれ、●目標値mを(1)入れる(2)入れないの場合があり、全部で 3×2=6 通り SN 比が定義できますね。

SN比パターン			S	N
①	(1)	(A)	S_m	S_e
②		(B)	S_m+S_N	S_e
③		(C)	S_m	S_e+S_N
④	(2)	(A)	S_m	S_e
⑤		(B)	S_m+S_N	S_e
⑥		(C)	S_m	S_e+S_N

教科書の SN 比の公式を暗記せず、対象とする実験において、S,N それぞれの定義をよく考えながら、ある程度、実効的な値になるよう、SN 比の式を自分で考えた方がよいです。

教科書どおり解くと、品質工学の目的を見失うことが多々あります。よく考えることが大事です。

以上、「品質工学,静特性、誤差因子が 1 つの場合がわかる」を解説しました。

品質工学、静特性、誤差因子１つの場合でデータの構造式、変動に目標値 m が除去できる理由

(0)(両辺)の２乗和を取ります

$\sum_{i=1}^{k}\sum_{i=1}^{n}(y_{ij}-m)^2=\sum_{i=1}^{k}\sum_{i=1}^{n}\{(\bar{\bar{y}}-m)+(\bar{y_{i\cdot}}-\bar{\bar{y}})+(y_{ij}-\bar{y_{i\cdot}})\}^2$

(1) (両辺)を展開します

(左辺)＝ $\sum_{i=1}^{k}\sum_{i=1}^{n}{y_{ij}}^2-2m\sum_{i=1}^{k}\sum_{i=1}^{n}y_{ij}+knm^2$

(右辺)＝ $kn(\bar{\bar{y}}-m)^2+\sum_{i=1}^{k}\sum_{i=1}^{n}(\bar{y_{i\cdot}}-\bar{\bar{y}})^2+\sum_{i=1}^{k}\sum_{i=1}^{n}(y_{ij}-\bar{y_{i\cdot}})^2$

$+2(\bar{\bar{y}}-m)\sum_{i=1}^{k}\sum_{i=1}^{n}(\bar{y_{i\cdot}}-\bar{\bar{y}})+2(\bar{\bar{y}}-m)\sum_{i=1}^{k}\sum_{i=1}^{n}(y_{ij}-\bar{y_{i\cdot}})+2\sum_{i=1}^{k}\sum_{i=1}^{n}(\bar{y_{i\cdot}}-\bar{\bar{y}})(y_{ij}-\bar{y_{i\cdot}})$

実は、赤字部分はすべて 0 になります。

さらに(両辺)からknm^2を引くと

$\boxed{\sum_{i=1}^{k}\sum_{i=1}^{n}{y_{ij}}^2-2m\sum_{i=1}^{k}\sum_{i=1}^{n}y_{ij}=kn(\bar{\bar{y}}^2-2m\bar{\bar{y}})+\sum_{i=1}^{k}\sum_{i=1}^{n}(\bar{y_{i\cdot}}-\bar{\bar{y}})^2+\sum_{i=1}^{k}\sum_{i=1}^{n}(y_{ij}-\bar{y_{i\cdot}})^2}$

と変形できます。

(2)目標値m項が除外できます

よく見ると、

$\sum_{i=1}^{k}\sum_{i=1}^{n}y_{ij}=kn\bar{\bar{y}}$＝(データの総和)

ですから、

$\sum_{i=1}^{k}\sum_{i=1}^{n}{y_{ij}}^2-2m\sum_{i=1}^{k}\sum_{i=1}^{n}y_{ij}=kn(\bar{\bar{y}}^2-2m\bar{\bar{y}})+\sum_{i=1}^{k}\sum_{i=1}^{n}(\bar{y_{i\cdot}}-\bar{\bar{y}})^2+\sum_{i=1}^{k}\sum_{i=1}^{n}(y_{ij}-\bar{y_{i\cdot}})^2$

の赤字部分は除去できます。

$\sum_{i=1}^{k}\sum_{i=1}^{n}{y_{ij}}^2=kn(\bar{\bar{y}}^2)+\sum_{i=1}^{k}\sum_{i=1}^{n}(\bar{y_{i\cdot}}-\bar{\bar{y}})^2+\sum_{i=1}^{k}\sum_{i=1}^{n}(y_{ij}-\bar{y_{i\cdot}})^2$

そして、$kn(\bar{\bar{y}}^2)=\sum_{i=1}^{k}\sum_{i=1}^{n}\bar{\bar{y}}^2$に戻すと、元の式は

$\boxed{\sum_{i=1}^{k}\sum_{i=1}^{n}{y_{ij}}^2=\sum_{i=1}^{k}\sum_{i=1}^{n}\bar{\bar{y}}^2+\sum_{i=1}^{k}\sum_{i=1}^{n}(\bar{y_{i\cdot}}-\bar{\bar{y}})^2+\sum_{i=1}^{k}\sum_{i=1}^{n}(y_{ij}-\bar{y_{i\cdot}})^2}$

と目標値m項が除外でき、データの構造式も

$\boxed{y_{ij}=\bar{\bar{y}}+(\bar{y_{i\cdot}}-\bar{\bar{y}})+(y_{ij}-\bar{y_{i\cdot}})}$

と書くことができます。

この目標値を無くした式が教科書で一般的に書かれた

データの構造式であり、

２乗和が各変動成分

となっています。

公式暗記せず、意味を理解して、数式で導出すれば

しっかり理解できますね！

品質工学,静特性、誤差因子が 2 つの場合がわかる

【1】静特性、誤差因子が 2 つの場合とは
(1) 実験計画法の二元配置実験と同じと見てよい

「静特性、誤差因子が 2 つの場合」=「実験計画法の二元配置実験」
　ただし、実験計画法と 1 つ異なる点があり、
「品質工学は、目標値との差分を見るが、実験計画法は平均値との差分を見る」です。

ここだけ、注意しましょう。あとは、実験計画法と同じです。

(1) 静特性、誤差因子が 2 つの場合の事例
例えば、下表のようなデータが誤差因子 1 つの場合と言えます。はっきりいって、
実験計画法の一元配置実験と同じです。表を見ても明らかです。

i/j	O_1	O_2	・・・	O_n	合計
N_1	y_{11}	y_{12}	・・・	y_{1n}	Y_{N1}
N_2	y_{21}	y_{22}	・・・	y_{2n}	Y_{N2}
・・・	・・・	・・・	・・・	・・・	・・・
N_k	y_{k1}	y_{k2}	・・・	y_{kn}	Y_{Nk}
合計	Y_{O1}	Y_{O2}	・・・	Y_{on}	Y

実験計画法なら　因子 N、O でなく A、B としますね。別に N、O にして品質工学の独自性を出す必要はないですよ。学問は、他の手法と比較しながら学ぶと学習効果が高まります。

実験計画法も関連記事で復習しましょう。

【関連記事】【必読】二元配置実験(繰返し無し)が解ける【QC 検定®級対策】
https://qcplanets.com/qc/qc2/doe-anova-two-way-1/

【2】静特性の全変動を導出
(1) 静特性を表すデータの構造式を作る
静特性、誤差因子が 2 つの場合のデータの構造式は、

$$(y_{ij}-m)=(\bar{\bar{y}}-m)+\left(\overline{y_{i\,\cdot}}-\bar{\bar{y}}\right)+\left(\overline{y_{\cdot\,j}}-\bar{\bar{y}}\right)+\left(y_{ij}-\overline{y_{i\,\cdot}}-\overline{y_{\cdot\,j}}+\bar{\bar{y}}\right)$$ と書けますね。

【3】静特性の変動の注意点
(1) 教科書に書いてあるデータの構造式
教科書に出て来る式は、なぜか、

$$y_{ij}=\bar{\bar{y}}+\left(\overline{y_{i\,\cdot}}-\bar{\bar{y}}\right)+\left(\overline{y_{\cdot\,j}}-\bar{\bar{y}}\right)+\left(y_{ij}-\overline{y_{i\,\cdot}}-\overline{y_{\cdot\,j}}+\bar{\bar{y}}\right)$$

であり、目標値のmがありません。

実は、

目標値のmを省くところが、品質工学の目的がぼやけてしまい、理解しにくくなる点なのです。

(2) 定義どおり立式しても目標値の項は省ける
実は、

静特性の目的を網羅した式

$$(y_{ij}-m)=(\bar{\bar{y}}-m)+\left(\overline{y_{i\cdot}}-\bar{\bar{y}}\right)+\left(\overline{y_{\cdot j}}-\bar{\bar{y}}\right)+\left(y_{ij}-\overline{y_{i\cdot}}-\overline{y_{\cdot j}}+\bar{\bar{y}}\right)$$

の２乗和を計算すると、

$$y_{ij}=\bar{\bar{y}}+\left(\overline{y_{i\cdot}}-\bar{\bar{y}}\right)+\left(\overline{y_{\cdot j}}-\bar{\bar{y}}\right)+\left(y_{ij}-\overline{y_{i\cdot}}-\overline{y_{\cdot j}}+\bar{\bar{y}}\right)$$

でもいいことが分かります。

また、シンプルだから教科書では、

$$y_{ij}=\bar{\bar{y}}+\left(\overline{y_{i\cdot}}-\bar{\bar{y}}\right)+\left(\overline{y_{\cdot j}}-\bar{\bar{y}}\right)+\left(y_{ij}-\overline{y_{i\cdot}}-\overline{y_{\cdot j}}+\bar{\bar{y}}\right)$$

のデータの構造式から解説しています。

・シンプルとはいえ、肝心な目標値mを省くから静特性は何を計算しているかがわかりにくくなる！
・実験計画法、回帰分析、品質工学を１つずつちゃんと理解するには、２乗和の分解を解くスキルがとても大事です！

(3) ２乗和を計算して目標値mの項が不要か確かめよう！
では、２乗和を計算して、目標値mが不要になるか確かめましょう。

【証明はこの記事の最後のページに掲載】
確かに計算結果みると、目標値mが不要になっているのがわかります。

品質工学の教科書をむやみに公式暗記せず、分散分析を活用する実験計画法、回帰分析と比較しながら、読み進めましょう！　そうしないと品質工学の本質が理解できない!

【4】SN 比の注意点
(1) SN 比の定義
SN 比は、有効成分と有害成分の比として、SN 比が大きいほど良いとする変数です。

(2)SN 比はよく考えて分母分子に代入すること

(SN 比)=$\frac{\text{有効成分}}{\text{有害成分}}$

と単純な式ですが、

1. データの構造式で、目標値mを含むか外すかを吟味
2. 2 乗和が S_m,S_N,S_O,S_e と 4 つあり、どれが有効、有害かを吟味

が必要です。

教科書の SN 比の公式の暗記では意味がなく、実験から出て来るデータの妥当性を合わせて SN 比を使う必要があります。でも、経験知をもとに SN 比を図っている感じが学問的に不自然な気がします。

教科書どおり解くと、品質工学の目的を見失うことが多々あります。
よく考えることが大事です。

実験計画法と同様に各要素がどれくらいのばらつきを持ち、それが目的からどのくらい遠ざけているかがわかるのが品質工学の目的と割り切っても良さそうですね。

【5】静特性、誤差因子が 2 つで交互作用がある場合

(1) １つの解法でどの場合も解ける

すでに、誤差因子が１つ、２つで交互作用のない場合をＱＣプラネッツでは解説しました。その応用として、誤差因子２つで交互作用がある場合を考えましょう。

どんな応用事例も１つの解法で解けます！

1.データの構造式を立てる
2.全変動(平方和)の分解
3.分散分析と F 検定

なので、まずデータの構造式を作りましょう。

(2) データの構造式を作る

誤差因子が２つで交互作用がない場合データの構造式は、

$$(y_{ij}-m)=(\bar{\bar{y}}-m)+\left(\overline{y_{i\,.}}-\bar{\bar{y}}\right)+\left(\overline{y_{\,.\,j}}-\bar{\bar{y}}\right)+\left(y_{ij}-\overline{y_{i\,.}}-\overline{y_{\,.\,j}}+\bar{\bar{y}}\right)$$

でしたね。誤差因子が 2 つで交互作用がある場合を表にすると、

i/j	O_1	O_2	…	O_m	合計
N_1	y_{111}	y_{121}	…	y_{1m1}	Y_{N1}
	…	…		…	
	y_{11n}	y_{12n}		y_{1mn}	
N_2	y_{211}	y_{221}	…	y_{2m1}	Y_{N2}
	…	…		…	
	y_{21n}	y_{22n}		y_{2mn}	
…	…	…	…	…	…
N_k	y_{k11}	y_{k21}	…	y_{km1}	Y_{Nk}
	…	…		…	
	y_{k1n}	y_{k2n}		y_{kmn}	
合計	Y_{O1}	Y_{O2}	…	Y_{Om}	Y

データの構造式は次の式になります。

$$(y_{ijk}-m)=(\bar{\bar{y}}-m)+\left(\overline{y_{i\,.\,.}}-\bar{\bar{y}}\right)+\left(\overline{y_{\,.\,j\,.}}-\bar{\bar{y}}\right)+\left(\overline{y_{ij\,.}}-\overline{y_{i\,.\,.}}-\overline{y_{\,.\,j\,.}}+\bar{\bar{y}}\right)+\left(y_{ijk}-\overline{y_{ij\,.}}\right)$$

これを２乗和して変動成分でまとめると、

$S=S_m+S_N+S_O+S_{N\times O}+S_e$

となります。同様の解き方で導出できますし、

目標値mを含む・含まないの両方においても式が成立します。

実験計画法でいう繰り返しのある２因子配置実験と同じです。

以上、「品質工学,静特性、誤差因子が２つの場合がわかる」を解説しました。

品質工学、静特性、誤差因子２つの場合でデータの構造式、変動に目標値 m が除去できる理由

(0)(両辺)の２乗和を取ります

$\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}(y_{ij}-m)^2=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}\{(\bar{\bar{y}}-m)+(\overline{y_{i\cdot}}-\bar{\bar{y}})+(\overline{y_{\cdot j}}-\bar{\bar{y}})+(y_{ij}-\overline{y_{i\cdot}}-\overline{y_{\cdot j}}+\bar{\bar{y}})\}^2$

(1) (両辺)を展開します

(左辺)= $\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}{y_{ij}}^2-2m\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}y_{ij}+knm^2$

(右辺)= $kn(\bar{\bar{y}}-m)^2+\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}(\overline{y_{i\cdot}}-\bar{\bar{y}})^2+\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}(\overline{y_{\cdot j}}-\bar{\bar{y}})^2+\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}(y_{ij}-\overline{y_{i\cdot}}-\overline{y_{\cdot j}}+\bar{\bar{y}})^2$

$+2(\bar{\bar{y}}-m)\{\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}(\overline{y_{i\cdot}}-\bar{\bar{y}})+\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}(\overline{y_{\cdot j}}-\bar{\bar{y}})+\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}(y_{ij}-\overline{y_{i\cdot}}-\overline{y_{\cdot j}}+\bar{\bar{y}})\}$

$+2\sum_{i=1}^{k}(\overline{y_{i\cdot}}-\bar{\bar{y}})\sum_{j=1}^{n}\{(\overline{y_{\cdot j}}-\bar{\bar{y}})+(y_{ij}-\overline{y_{i\cdot}}-\overline{y_{\cdot j}}+\bar{\bar{y}})\}$

$+2\sum_{j=1}^{n}(\overline{y_{\cdot j}}-\bar{\bar{y}})\sum_{j=1}^{n}(y_{ij}-\overline{y_{i\cdot}}-\overline{y_{\cdot j}}+\bar{\bar{y}})$

実は、赤字部分はすべて 0 になります。(実際解いてみるといい演習になります。)

さらに(両辺)からknm^2を引くと

$\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}{y_{ij}}^2-2m\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}y_{ij}$

$= kn(\bar{\bar{y}}^2-2m\bar{\bar{y}})+\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}(\overline{y_{i\cdot}}-\bar{\bar{y}})^2+\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}(\overline{y_{\cdot j}}-\bar{\bar{y}})^2+\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}(y_{ij}-\overline{y_{i\cdot}}-\overline{y_{\cdot j}}+\bar{\bar{y}})^2$

と変形できます。

(2)目標値m項が除外できます

よく見ると、

$\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}y_{ij}=kn\bar{\bar{y}}$ =(データの総和)

ですから、

$\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}{y_{ij}}^2-2m\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}y_{ij}$

$= kn(\bar{\bar{y}}^2-2m\bar{\bar{y}})+\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}(\overline{y_{i\cdot}}-\bar{\bar{y}})^2+\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}(\overline{y_{\cdot j}}-\bar{\bar{y}})^2+\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}(y_{ij}-\overline{y_{i\cdot}}-\overline{y_{\cdot j}}+\bar{\bar{y}})^2$

の赤字部分は除去できます。

$\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}{y_{ij}}^2= kn(\bar{\bar{y}}^2)+\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}(\overline{y_{i\cdot}}-\bar{\bar{y}})^2+\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}(\overline{y_{\cdot j}}-\bar{\bar{y}})^2+\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}(y_{ij}-\overline{y_{i\cdot}}-\overline{y_{\cdot j}}+\bar{\bar{y}})^2$

そして、$kn(\bar{\bar{y}}^2)=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}\bar{\bar{y}}^2$に戻すと、元の式は

$\boxed{\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}{y_{ij}}^2=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}\bar{\bar{y}}^2+\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}(\overline{y_{i\cdot}}-\bar{\bar{y}})^2+\sum_{i=1}^{k}\sum_{=1}^{n}(\overline{y_{\cdot j}}-\bar{\bar{y}})^2+\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}(y_{ij}-\overline{y_{i\cdot}}-\overline{y_{\cdot j}}+\bar{\bar{y}})^2}$

と目標値m項が除外でき、データの構造式も

$\boxed{y_{ij}=\bar{\bar{y}}+(\overline{y_{i\cdot}}-\bar{\bar{y}})+(\overline{y_{\cdot j}}-\bar{\bar{y}})+(y_{ij}-\overline{y_{i\cdot}}-\overline{y_{\cdot j}}+\bar{\bar{y}})}$

と書くことができます。

この目標値を無くした式が教科書で一般的に書かれた

データの構造式であり、

２乗和が各変動成分

となっています。

(3)2 乗和を S で表記

①目標値 m を省かない場合

$\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}\left(y_{ij}-m\right)^2=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}\left\{(\bar{\bar{y}}-m)+(\overline{y_{i\cdot}}-\bar{\bar{y}})+\left(\overline{y_{\cdot j}}-\bar{\bar{y}}\right)+\left(y_{ij}-\overline{y_{i\cdot}}-\overline{y_{\cdot j}}+\bar{\bar{y}}\right)\right\}^2$

は展開すると、

$\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}\left(y_{ij}-m\right)^2=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}(\bar{\bar{y}}-m)^2+\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}(\overline{y_{i\cdot}}-\bar{\bar{y}})^2+\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}\left(\overline{y_{\cdot j}}-\bar{\bar{y}}\right)^2+\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}\left(y_{ij}-\overline{y_{i\cdot}}-\overline{y_{\cdot j}}+\bar{\bar{y}}\right)^2$

と展開できます。（前項をもとに実際演習してみてください。）

各項の 2 乗和を S で表記します。

●全変動 : $S=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}\left(y_{ij}-m\right)^2$

●平均変動 : $S_m=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}(\bar{\bar{y}}-m)^2$

●誤差因子 N による変動 : $S_N=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}(\overline{y_{i\cdot}}-\bar{\bar{y}})^2$

●誤差因子 O による変動 : $S_O=\sum_{i=1}^{k}\sum_{=1}^{n}\left(\overline{y_{\cdot j}}-\bar{\bar{y}}\right)^2$

●誤差変動 : $S_e=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}\left(y_{ij}-\overline{y_{i\cdot}}-\overline{y_{\cdot j}}+\bar{\bar{y}}\right)^2$

すると、

$\boxed{S=S_m+S_N+S_O+S_e}$

が成り立ち、２乗和の分解ができることがわかります。

②目標値 m を省く場合

前項の計算結果から

$\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}{y_{ij}}^2=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}\bar{\bar{y}}^2+\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}(\overline{y_{i\cdot}}-\bar{\bar{y}})^2+\sum_{i=1}^{k}\sum_{=1}^{n}\left(\overline{y_{\cdot j}}-\bar{\bar{y}}\right)^2+\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}\left(y_{ij}-\overline{y_{i\cdot}}-\overline{y_{\cdot j}}+\bar{\bar{y}}\right)^2$

の各項の 2 乗和を S で表記すると、

●全変動 : $S=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}{y_{ij}}^2$

●平均変動 : $S_m=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}\bar{\bar{y}}^2$

●誤差因子 N による変動 : $S_N=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}(\overline{y_{i\cdot}}-\bar{\bar{y}})^2$

●誤差因子 O による変動 : $S_O=\sum_{i=1}^{k}\sum_{=1}^{n}\left(\overline{y_{\cdot j}}-\bar{\bar{y}}\right)^2$

●誤差変動 : $S_e=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}\left(y_{ij}-\overline{y_{i\cdot}}-\overline{y_{\cdot j}}+\bar{\bar{y}}\right)^2$

すると、

$\boxed{S=S_m+S_N+S_O+S_e}$

が成り立ち、２乗和の分解ができることがわかります。

公式暗記せず、意味を理解して、数式で導出すれば
しっかり理解できますね！

品質工学の動特性は回帰分析と同じ(その 1)

【1】品質工学の動特性は回帰分析と同じ

(1) はっきりいって、品質工学の動特性は回帰分析と同じ

品質工学の動特性では独自の変数を使いますが、回帰分析と全く同じです。

−	品質工学の動特性	回帰分析	違い
回帰式	$y=\beta M$	$y=\beta x$	$M \Rightarrow x$
β	$\dfrac{M_1 y_1+\cdots+M_k y_k}{M_1^2+M_2^2+\cdots+M_k^2}$	$\dfrac{x_1 y_1+\cdots+x_k y_k}{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_k^2}$	$M \Rightarrow x$
データの構造式	$y_i=\hat{y_i}+(y_i-\hat{y_i})$	$(y_i-\bar{y})=(\hat{y_i}-\bar{y})+(y_i-\hat{y_i})$	$\bar{y}$の有無
S_{xx}	$r=M_1^2+\cdots+M_k^2$	$S_{xx}=x_1^2+\cdots+x_k^2$	$M \Rightarrow x$
S_{xy}	$L=M_1 y_1+\cdots+M_k y_k$	$S_{xy}=x_1 y_1+\cdots+x_k y_k$	$M \Rightarrow x$

上表に見ると、文字が違うだけで、中身が一緒であることがはっきりしますね。

本記事の結論⇒品質工学の動特性＝回帰分析です！

【2】品質工学、動特性の残念な性質

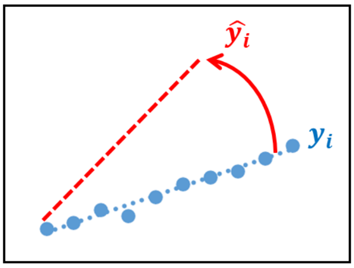
(1) 目標値との差分を品質工学で考えるが、目標値は自由に設定できない

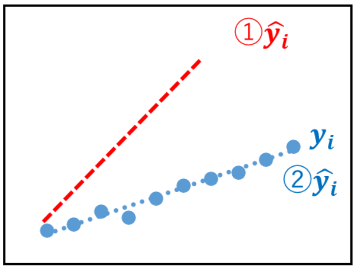
では、なぜ、品質工学の動特性は回帰分析に過ぎないのか？を解説します。「品質工学とは何か？」に戻ると、

●品質工学は、目標値との差分を見る
●実験計画法・回帰分析は平均値との差分を見る

でした。なので、目標値を今あるデータから大きく離れた、「大きな目標値」にすればいい！となりますが、

回帰条件以外、２乗和の分解がうまくできない(中間積和の項が０にならない)





上左図のように青線が現状で、赤線を目標として、データの構造式を立てて２乗和の分解を確かめます。

●データの構造式

$y_i=\hat{y_i}+(y_i-\hat{y_i})$　　として、

●２乗和

$\sum_{i=1}^{n} y_i^2=\sum_{i=1}^{n}\{\hat{y_i}+(y_i-\hat{y_i})\}^2=\sum_{i=1}^{n}\{\hat{y_i}^2+2\hat{y_i}(y_i-\hat{y_i})+(y_i-\hat{y_i})^2\}$ となりますが、

第２項 $\sum_{i=1}^{n}\hat{y_i}(y_i-\hat{y_i})\neq 0$ なため、

$\sum_{i=1}^{n} y_i^2=\sum_{i=1}^{n}\hat{y_i}^2+\sum_{i=1}^{n}(y_i-\hat{y_i})^2$ とならないため、分散分析がうまくできません。

ただし、回帰条件の場合だけは、第２項 $\sum_{i=1}^{n}\hat{y_i}(y_i-\hat{y_i})=0$ となります。

なので、

本記事の結論品質工学の動特性＝回帰分析です！

(2) 実例で検証

データを２つ用意します。

① 自由に目標値を設定した場合
② 回帰直線に乗る場合

前頁の右図で描くと、次の違いがあります。
①　自由に目標値を設定した場合

x	y_i	$\hat{y}_i$	y_i^2	$\hat{y}_i{}^2$	$2\hat{y}_i(y_i-\hat{y}_i)$	$(y_i-\hat{y}_i)^2$
1	2	4.00	4	16	-16	4
2	3	5.00	9	25	-20	4
3	5	12.00	25	144	-168	49
4	4	16.50	16	272	-413	156
5	7	20.00	49	400	-520	169
6	9	26.00	81	676	-884	289
7	10	28.00	100	784	-1008	324
8	11	33.50	121	1122	-1508	506
9	13	36.00	169	1296	-1656	529
10	15	45.00	225	2025	-2700	900
合計	79	226	799	6761	-8892	2931

確かに、$2\hat{y}_i(y_i-\hat{y}_i)$の和が-8892 と 0 ではないです。これが２乗和の分解から分散分析できない理由です。

②回帰直線に乗る場合

x	y_i	$\hat{y}_i$	y_i^2	$\hat{y}_i{}^2$	$2\hat{y}_i(y_i-\hat{y}_i)$	$(y_i-\hat{y}_i)^2$
1	2	1.44	4	2.06	1.62	0.32
2	3	2.87	9	8.25	0.73	0.02
3	5	4.31	25	18.57	5.95	0.48
4	4	5.75	16	33.01	-20.06	3.05
5	7	7.18	49	51.58	-2.61	0.03
6	9	8.62	81	74.27	6.58	0.15
7	10	10.05	100	101.09	-1.10	0.00
8	11	11.49	121	132.04	-11.28	0.24
9	13	12.93	169	167.11	1.88	0.01
10	15	14.36	225	206.31	18.28	0.40
合計	79	79	799	794.31	0.00	4.69

確かに、$2\hat{y}_i(y_i-\hat{y}_i)$の和が 0 で。これが２乗和の分解から分散分析できる理由です。。

結局、

本記事の結論品質工学の動特性＝回帰分析です！

(3) 目標値との差分を見たいなら静特性にもちこむ
　どうしても、実測データなどの手持ちデータからかけ離れた所を目標値として考える場合は、静特性に持ち込むしかないようです。変数x_iの値を 1,2,3,と水準に変えて静特性で分析しましょう。

動特性のデータの構造式・２乗和の計算などの重要公式は（その２）で解説します。

以上、「品質工学の動特性は回帰分析と同じ(その 1)」を解説しました。

【3】動特性のデータの構造式を作る(その２)
(1) 回帰分析のデータの構造式
単回帰分析のデータの構造式は、次の式で、$\hat{y}_i$が回帰直線上に乗る点でしたね。

$$(y_i-\bar{y})=(\hat{y}_i-\bar{y})+(y_i-\hat{y}_i)$$

(2) 動特性のデータの構造式
動特性は回帰分析なので、データの構造式は同じでもいいのですが、習慣的にちょっと変えます。

$$y_i=\hat{y}_i+(y_i-\hat{y}_i)$$

回帰分析のデータの構造式から$\bar{y}$を除去した形にしています。単回帰分析と同じデータの構造式でも OK です。

【2】動特性の変動(２乗和)を計算(その２)
(1) 回帰分析の２乗和の分解
単回帰分析のデータの構造式

$$(y_i-\bar{y})=(\hat{y}_i-\bar{y})+(y_i-\hat{y}_i)$$

の２乗和が分解できます。つまり、

$$\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2=\sum_{i=1}^{n}(\hat{y}_i-\bar{y})^2+\sum_{i=1}^{n}(y_i-\hat{y}_i)^2 \quad (式 1)$$

($\sum_{i=1}^{n}(\hat{y}_i-\bar{y})(y_i-\hat{y}_i)$=0 だから、$z^2=x^2+y^2$の形ができるわけです！)

なお、(式 1)の導出のヒント関連記事で解説していますので、ご確認ください。

【関連記事】平方和の分解と分散分析ができる(重回帰分析)
https://qcplanets.com/method/multi-regression/anova-basic/

(2) 回帰分析の２乗和の分解の証明
実際解いてみますね。

$$\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2=\sum_{i=1}^{n}\{(\hat{y}_i-\bar{y})+(y_i-\hat{y}_i)\}^2=\sum_{i=1}^{n}(\hat{y}_i-\bar{y})^2+2\sum_{i=1}^{n}(\hat{y}_i-\bar{y})(y_i-\hat{y}_i)+\sum_{i=1}^{n}(y_i-\hat{y}_i)^2$$

第２項の$\sum_{i=1}^{n}(\hat{y}_i-\bar{y})(y_i-\hat{y}_i)$=0 を証明します。

$$\sum_{i=1}^{n}(\hat{y}_i-\bar{y})(y_i-\hat{y}_i)=\sum_{i=1}^{n}(\hat{y}_i-\bar{y})\{(y_i-\bar{y})-(\hat{y}_i-\bar{y})\}=(式 2)$$

ここで、$\hat{y}_i$、 $\bar{y}$は回帰直線上なので、下の 2 つの式が成り立つので、(式 2)に代入します。
●$\hat{y}_i=a+bx_i$
●$\bar{y}=a+b\bar{x}$

(式 2)= $\sum_{i=1}^{n}((a+bx_i)-(a+b\bar{x}))\{(y_i-\bar{y})-((a+bx_i)-(a+b\bar{x}))\}$
$=b\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})\{(y_i-\bar{y})-b(x_i-\bar{x})\}=b\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})-b^2\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2=bS_{xy}-b^2S_{xx}$=(式 3)

$b=\frac{S_{xy}}{S_{xx}}$を代入すると

(式 3)= $\frac{S_{xy}}{S_{xx}}S_{xy}-\left(\frac{S_{xy}}{S_{xx}}\right)^2S_{xx}=\frac{S_{xy}^2}{S_{xx}}-\frac{S_{xy}^2}{S_{xx}}=0$

よって、(式１) $\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2=\sum_{i=1}^{n}(\hat{y}_i-\bar{y})^2+\sum_{i=1}^{n}(y_i-\hat{y}_i)^2$ が成立します。

(3) 動特性の２乗和の分解
回帰分析の２乗和の分解の導出過程を使って、同様に動特性の場合も解きます。

$$\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2=\sum_{i=1}^{n}(\hat{y}_i-\bar{y})^2+\sum_{i=1}^{n}(y_i-\hat{y}_i)^2 \quad (式 1)$$

から展開すると、

(左辺)= $\sum_{i=1}^{n} y_i^2 - 2\sum_{i=1}^{n} y_i\bar{y} \quad + \sum_{i=1}^{n} \bar{y}^2$
(右辺)= $\sum_{i=1}^{n}(\hat{y_i} - \bar{y})^2 + \sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{y_i})^2 = \sum_{i=1}^{n} \hat{y_i}^2 - 2\sum_{i=1}^{n} \hat{y_i}\bar{y} + \sum_{i=1}^{n} \bar{y}^2 + \sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{y_i})^2$

ここで、
●$\sum_{i=1}^{n} y_i\bar{y} = \sum_{i=1}^{n} \hat{y_i}\bar{y}$
●(両辺)に同じ$\sum_{i=1}^{n} \bar{y}^2$
があるので、(両辺)から取り除くと、
$\sum_{i=1}^{n} y_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \hat{y_i}^2 + \sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{y_i})^2$より
$S=S_\beta+S_e$と書けます。

動特性の２乗和平均$\bar{y}$の項を抜いただけで品質工学の動特性＝回帰分析です！

【5】動特性の重要公式は単回帰分析と同じ(その２)
よく動特性を取り扱うときにいろいろな変数が定義されます。

1. 変数 $M \Rightarrow x$ に変える
2. 有効除数 $r = M_1^2 + \cdots + M_k^2$ $(= S_{xx})$
3. 線形式 $L = M_1 y_1 + \cdots + M_k y_k$ $(=S_{xy})$
4. 傾き $\beta = \frac{L}{r}$ $(=\frac{S_{xy}}{S_{xx}})$

実は、

回帰分析の公式をそのまま文字を変えただけ

なので、あえて
有効除数、線形式とか品質工学オリジナルの変数は使わなくていいです。回帰分析と同じだし、データの構造式や２乗和の分解をしてきましたが、回帰分析と同じであることをわかりますよね。

結局、

−	品質工学の動特性	回帰分析	違い
回帰式	$y = \beta M$	$y = \beta x$	$M \Rightarrow x$
β	$\frac{M_1 y_1 + \cdots + M_k y_k}{M_1^2 + M_2^2 + \cdots + M_k^2}$	$\frac{x_1 y_1 + \cdots + x_k y_k}{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_k^2}$	$M \Rightarrow x$
データの構造式	$y_i = \hat{y_i} + (y_i - \hat{y_i})$	$(y_i - \bar{y}) = (\hat{y_i} - \bar{y}) + (y_i - \hat{y_i})$	$\bar{y}$の有無
S_{xx}	$r = M_1^2 + \cdots + M_k^2$	$S_{xx} = x_1^2 + \cdots + x_k^2$	$M \Rightarrow x$
S_{xy}	$L = M_1 y_1 + \cdots + M_k y_k$	$S_{xy} = x_1 y_1 + \cdots + x_k y_k$	$M \Rightarrow x$

上表に見ると、文字が違うだけで、中身が一緒であることがはっきりしますね。

本記事の結論⇒品質工学の動特性＝回帰分析です！

品質工学の動特性を学ぶ際は、回帰分析も同時に比較しながら学びましょう。同じ解法を２回学ぶ必要はないことが分かります。

以上、「品質工学の動特性は回帰分析と同じ(その 2)」を解説しました。

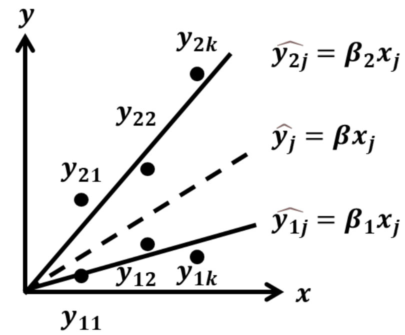
aa 品質工学、動特性、誤差因子１つの場合がわかる

【1】繰り返しのある単回帰分析から始める

(1) 品質工学、動特性、誤差因子１つの場合

誤差因子が１つある動特性のデータとは、誤差因子 N（水準i=1,…n）に対してそれぞれ動特性データ(x,y)があるイメージです。下表と下図にイメージを載せます。本記事では、わかりやすく説明するため、誤差因子は２水準(n=2)で考えます。

N_i/x_j	x_1	x_2	…	x_k
N_1	y_{11}	y_{12}	…	y_{1k}
N_2	y_{21}	y_{22}	…	y_{2k}



(2) 繰り返しのある単回帰分析から始める

上表をよく見ると、

繰り返しのある単回帰分析と同じなんです！

データ表で比較すると、

動特性	x_1	x_2	…	x_k
N_1	y_{11}	y_{12}	…	y_{1k}
N_2	y_{21}	y_{22}	…	y_{2k}
単回帰	x_1	x_2	…	x_k
-	y_{11}	y_{12}	…	y_{1k}
-	y_{21}	y_{22}	…	y_{2k}

さらに、

繰り返しのある単回帰分析の回帰直線は、動特性の $\hat{y_j}=\beta x_j$ です。

なので、繰り返しのある単回帰分析でいいじゃん！で OK です。品質工学の動特性を解説します。

繰り返しのある単回帰分析については QC プラネッツで解説していますので、確認ください。

【2】データの構造式

(1) 繰り返しのある単回帰分析

繰り返しのある単回帰分析のデータの構造式は

$$(y_{ij}-\bar{y})=(\hat{y_j}-\bar{y})+(y_{ij}-\hat{y_j})$$

(2) 誤差因子１つの動特性

誤差因子１つの動特性のデータの構造式は

$$y_{ij}=\hat{y_j}+(\widehat{y_{ij}}-\hat{y_j})+(y_{ij}-\widehat{y_{ij}})$$

(3) 繰り返しのある単回帰分析から動特性への導出

繰り返しのある単回帰分析から誤差因子１つの動特性のデータの構造式へは、下図の①②③の手順で変形していけば、導出できます。

① $\boldsymbol{(y_{ij}-\overline{\overline{y}})=(\hat{y}_j-\overline{\overline{y}})+(y_{ij}-\hat{y}_j)}$

② $\boldsymbol{(y_{ij}-\cancel{\overline{\overline{y}}})=(\hat{y}_j-\cancel{\overline{\overline{y}}})+(\widehat{y_{ij}}-\hat{y}_j)+(y_{ij}-\widehat{y_{ij}})}$

③ $\boldsymbol{y_{ij} \quad = \quad \hat{y}_j \quad +(\widehat{y_{ij}}-\hat{y}_j)+(y_{ij}-\widehat{y_{ij}})}$

繰り返しのある単回帰分析と誤差因子１つの動特性は同じだとデータの構造式からわかりますよね。

【3】２乗和の分解(数式)

(1) 2 乗和の分解を解説

誤差因子１つの動特性のデータの構造式は

$$y_{ij}=\hat{y}_j+(\widehat{y_{ij}}-\hat{y}_j)+(y_{ij}-\widehat{y_{ij}})$$

ですから、

●２乗和

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}y_{ij}^2=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}\hat{y}_j^{\,2}+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}(\widehat{y_{ij}}-\hat{y}_j)^2+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}(y_{ij}-\widehat{y_{ij}})^2$$

となりますが、実際に証明してみましょう。

なんでもそうですが、

1. モデル式(データの構造式)を立てる
2. 2 乗和の分解、直交性を実際解いて確かめる
3. 分散分析に持ち込む

が QC の基本です。

(2) 2 乗和の分解を証明

実際に導出してみましょう。機械的に２乗して展開します。

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}y_{ij}^2=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}\{\hat{y}_j+(\widehat{y_{ij}}-\hat{y}_j)+(y_{ij}-\widehat{y_{ij}})\}^2$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}\hat{y}_j^{\,2}+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}(\widehat{y_{ij}}-\hat{y}_j)^2+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}(y_{ij}-\widehat{y_{ij}})^2$$

$$+2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}\hat{y}_j(\widehat{y_{ij}}-\hat{y}_j)+2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}\hat{y}_j(y_{ij}-\widehat{y_{ij}})+2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}(\widehat{y_{ij}}-\hat{y}_j)(y_{ij}-\widehat{y_{ij}})$$

マーカ部分が 0 になることを示せばよいので、

●$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}\hat{y}_j(\widehat{y_{ij}}-\hat{y}_j)$

●$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}\hat{y}_j(y_{ij}-\widehat{y_{ij}})$

●$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}(\widehat{y_{ij}}-\hat{y}_j)(y_{ij}-\widehat{y_{ij}})$

と 3 項とも 0 になることを証明します。

ここで、回帰から２つの制約条件を使います。

1. $\beta=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\beta_i$
2. 回帰直線は必ず平均を通るので、回帰直線上の y 座標の値の合計は測定データ y 座標の合計と等しい。

(3) 全回帰の傾きβは各回帰の傾きβ_iの平均

全回帰の傾きβと各回帰の傾きβ_iはもともと、$\frac{S_{xy}}{S_{xx}}$ の式で表現できます。

●全回帰の傾きβ

$$\beta=\frac{S_{xy}}{S_{xx}}=\frac{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}(x_j-\bar{x})(y_{ij}-\bar{y})}{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}(x_j-\bar{x})^2}=\frac{\sum_{j=1}^{k}(x_j-\bar{x})\{(y_{1j}-\bar{y})+\cdots+(y_{nj}-\bar{y})\}}{n\sum_{j=1}^{k}(x_j-\bar{x})^2}=\frac{\sum_{j=1}^{k}(x_j-\bar{x})\{(y_{1j}-\overline{y_1})+\cdots+(y_{nj}-\overline{y_n})\}}{n\sum_{j=1}^{k}(x_j-\bar{x})^2}$$

$=\frac{S_{xy1}+\cdots+S_{xyn}}{nS_{xx0}}=\frac{1}{n}(\beta_1+\cdots+\beta_n)$ となり、平均になりますね。

●各回帰の傾きβ_i

$$\beta_i=\frac{S_{xyi}}{S_{xxi}}=\frac{\sum_{j=1}^{k}(x_j-\bar{x})(y_{ij}-\overline{y_i})}{\sum_{j=1}^{k}(x_j-\bar{x})^2}=\frac{S_{xyi}}{S_{xx0}}$$

回帰分析の良い演習にもなりますね。結構ハードな式導出です。

(4) 回帰直線は必ず平均を通る条件を使う

回帰直線は、必ず平均を通ります。つまり、平均×個数＝総和ですから、
回帰直線上の全点数の$\widehat{y_i}$座標の合計は、計測データy_iの合計と同じになります。

この条件を使うと、
●全回帰において、 $\widehat{y_i}=\beta x_i$ は平均$(\bar{x},\ \bar{y})$を通るので、データ個数倍すると、 (平均)×(個数)=(総和)より

$\sum_{j=1}^{k}\widehat{y_j}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}y_{ij}$ が成り立つ。

●各i回帰において、 $\widehat{y_{ij}}=\beta_i x_i$ は平均$(\bar{x},\widehat{y_i})$を通るので、データ個数倍すると、 (平均)×(個数)=(総和)より

$\sum_{j=1}^{k}\widehat{y_{ij}}=\sum_{j=1}^{k}y_{ij}$が成り立つ

この性質を使って、さっきのマーカ部の和が０になる事を証明します。

① $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}\widehat{y_j}\left(\widehat{y_{ij}}-\widehat{y_j}\right)$=0 の証明

$\beta=\frac{1}{n}(\beta_1+\cdots+\beta_n)$を使います。

$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}\widehat{y_j}\left(\widehat{y_{ij}}-\widehat{y_j}\right)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}\widehat{y_j}\left(\beta_i x_j-\beta x_j\right)=\sum_{j=1}^{k}\widehat{y_j}\{(\beta_1+\cdots+\beta_n)x_j-n\beta x_j\}=\sum_{j=1}^{k}\widehat{y_j}\,(0)=0$

残り２つの式は、回帰直線は平均値を通る性質を使って証明します。

②$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}\widehat{y_j}\left(y_{ij}-\widehat{y_{ij}}\right)$=0 の証明

$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}\widehat{y_j}\left(y_{ij}-\widehat{y_{ij}}\right)=\sum_{j=1}^{k}\widehat{y_j}\sum_{i=1}^{n}(y_{ij}-\widehat{y_{ij}})=\sum_{j=1}^{k}\widehat{y_j}\times 0=0$

③ $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}\left(\widehat{y_{ij}}-\widehat{y_j}\right)\left(y_{ij}-\widehat{y_{ij}}\right)$=0 の証明

$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}\left(\widehat{y_{ij}}-\widehat{y_j}\right)\left(y_{ij}-\widehat{y_{ij}}\right)=\sum_{i=1}^{n}\left(\widehat{y_{ij}}-\widehat{y_j}\right)\sum_{j=1}^{k}\left(\widehat{y_{ij}}-\widehat{y_j}\right)=0\times 0=0$

●２乗和

$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}y_{ij}^2=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}\widehat{y_j}^2+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}\left(\widehat{y_{ij}}-\widehat{y_j}\right)^2+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}\left(y_{ij}-\widehat{y_{ij}}\right)^2$

となります。

結構大変な計算ですが、端折らず一回は計算しましょう。ここを端折ると品質工学の動特性の式の意味を理解できません。

【4】２乗和の分解(事例)
２乗和を証明しましたが、関連記事にて、実データを使って、２乗和の分解ができることを確認しています。この教材の【品質工学、動特性、誤差因子１つの変動の分解がわかる】で是非確認しましょう。

【5】よく使う公式の導出
(1) 有効除数、線形式、傾きの導出
すでに回帰分析手法から導出していますが、動特性でよく使う公式を上げておきます。全部回帰分析から導出できるので、一緒に理解しておくと、混乱しないし、効率よく覚えられますよね。

1. 有効除数 $r_i = r(\text{共通}) = S_{xx0} = \sum_{j=1}^{k} x_j^2$

2. 線形式 $L_j = S_{xyi} = \sum_{j=1}^{k} x_j y_{ij}$

3. 傾き $\beta_i = \frac{S_{xyi}}{S_{xx0}} = \frac{L_i}{r}$

4. 傾き $\beta = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \beta_i$

(2) 変動
先の２乗和の分解式を再掲すると、

●２乗和

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k} y_{ij}^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k} \hat{y_j}^2 + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k} \left(\widehat{y_{ij}} - \hat{y_j}\right)^2 + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k} \left(y_{ij} - \widehat{y_{ij}}\right)^2$$

S　　S_β(比例項の変動)　　$S_{N\times\beta}$(誤差因子 N の変動)　　S_e (誤差変動)

また、分散分析表は下表になります。実験計画法と自由度が若干異なる点に注意しましょう。

-	変動	自由度
比例項	S_β	1
誤差因子 N	$S_{N\times\beta}$	$n-1$
誤差変動	S_e	$nk-n$
総変動	S	nk

【6】SN 比
SN 比は定義式通り当てはめるよりは、
●有効成分
●有害成分
がそれぞれどの変動に該当するかを吟味して比をとれば OK です。

例えば

●SN 比　$\eta = \frac{S_\beta}{S_e}$

とか、log をつけるとかいろいろ使いやすい値にカスタマイズしてください。

以上、「品質工学、動特性、誤差因子１つの場合がわかる」を解説しました。

品質工学、動特性、誤差因子１つで繰返し有りの場合がわかる

【1】誤差因子１つで繰返し無しから始める

(1) 品質工学も基本、データの構造式から始める

いろいろなモデルケースを品質工学で扱いますが、実験計画法や回帰分析と同様に

1. データの構造式を立てる
2. 2 乗和の分解を確認
3. 分散分析から F 検定

必ずデータの構造式を立てて、２乗和の分解（中間積和がすべて 0）を確認して変動成分を分散分析するの流れで行きますし、QC プラネッツの記事は全部、この１つの流れで解いています！

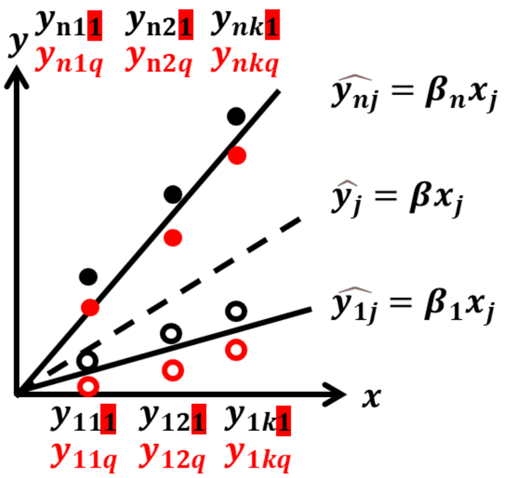
(2) 誤差因子１つで繰返し無しから始める

まずは関連記事【品質工学、動特性、誤差因子１つの場合がわかる】で基礎を確認してください。
繰返し無しの場合を理解した上で、繰返し有りの場合である本記事を解説します。

(3) 品質工学、動特性、誤差因子１つで繰返しがある場合

誤差因子が１つある動特性のデータで繰り返し無しと有りの場合とは、誤差因子 N（水準 i =1,…n）に対してそれぞれ動特性データ(x, y)があるイメージです。下表と下図にイメージを載せます。

繰返し	N_1/x_j	x_1	x_2	…	x_k
無	N_1	y_{11}	y_{12}	…	y_{1k}
	N_2	y_{21}	y_{22}	…	y_{2k}
有	N_1	y_{111}	y_{121}	…	y_{1k1}
		…	…	…	…
		y_{11l}	y_{12l}	…	y_{1kl}
	N_2	y_{211}	y_{221}	…	y_{2k1}
		…	…	…	…
		y_{21l}	y_{22l}	…	y_{2kl}



【2】データの構造式

(1) 動特性で繰り返しの無い場合は、下の式のとおりです。

$$y_{ij} = \hat{y}_j + \left(\widehat{y_{ij}} - \hat{y}_j\right) + \left(y_{ij} - \widehat{y_{ij}}\right)$$

(2) 動特性で繰り返しの有り場合

では、繰り返し有りの場合のデータの構造式を書いてみます。繰り返し無しの場合からの変化を図で見てみましょう。

③　$\boldsymbol{y_{ij} = \hat{y}_j + (\widehat{y_{ij}} - \hat{y}_j) + (y_{ij} - \widehat{y_{ij}})}$

④　$\boldsymbol{y_{ijl} = \hat{y}_j + (\widehat{y_{ij}} - \hat{y}_j) + (y_{ijl} - \widehat{y_{ij}})}$

動特性で繰り返しの有り場合のデータの構造式は

$$y_{ijl} = \hat{y}_j + (\widehat{y_{ij}} - \hat{y}_j) + (y_{ijl} - \widehat{y_{ij}})$$

となり、回帰部分は繰返し有無に関係ないことがわかります。ちょっと変化した感じですね。

【3】２乗和の分解(数式)

(1) 2 乗和の分解を解説

誤差因子１つの動特性のデータの構造式は $y_{ijl} = \hat{y}_j + (\widehat{y_{ij}} - \hat{y}_j) + (y_{ijl} - \widehat{y_{ij}})$ですから

●２乗和

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}\sum_{l=1}^{q} y_{ijl}^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}\sum_{l=1}^{q} \hat{y}_j^{\,2} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}\sum_{l=1}^{q} (\widehat{y_{ij}} - \hat{y}_j)^2 + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}\sum_{l=1}^{q} (y_{ijl} - \widehat{y_{ij}})^2$$

となりますが、実際に証明してみましょう。

なんでもそうですが、

1. モデル式(データの構造式)を立てる
2. 2 乗和の分解、直交性を実際解いて確かめる
3. 分散分析に持ち込む

が QC の基本です。

(2) 2 乗和の分解を証明

実際に導出してみましょう。機械的に２乗して展開します。

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}\sum_{l=1}^{q} y_{ijl}^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}\sum_{l=1}^{q} \{\hat{y}_j + (\widehat{y_{ij}} - \hat{y}_j) + (y_{ijl} - \widehat{y_{ij}})\}^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}\sum_{l=1}^{q} \hat{y}_j^{\,2} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}\sum_{l=1}^{q} (\widehat{y_{ij}} - \hat{y}_j)^2 + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}\sum_{l=1}^{q} (y_{ijl} - \widehat{y_{ij}})^2$$

$$+ 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}\sum_{l=1}^{q} \hat{y}_j(\widehat{y_{ij}} - \hat{y}_j) + 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}\sum_{l=1}^{q} \hat{y}_j(y_{ijl} - \widehat{y_{ij}}) + 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}\sum_{l=1}^{q} (\widehat{y_{ij}} - \hat{y}_j)(y_{ijl} - \widehat{y_{ij}})$$

マーカ部分が 0 になることを示せばよいので、

●$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}\sum_{l=1}^{q} \hat{y}_j(\widehat{y_{ij}} - \hat{y}_j)$

●$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}\sum_{l=1}^{q} \hat{y}_j(y_{ijl} - \widehat{y_{ij}})$

●$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}\sum_{l=1}^{q} (\widehat{y_{ij}} - \hat{y}_j)(y_{ijl} - \widehat{y_{ij}})$

と３項とも０になることを証明します。

ここで、回帰から２つの制約条件を使います。

1. $\beta = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\beta_i$
2. 回帰直線は必ず平均を通るので、回帰直線上の y 座標の値の合計は測定データ y 座標の合計と等しい。

(3) 全回帰の傾きβは各回帰の傾きβ_iの平均

全回帰の傾きβと各回帰の傾きβ_iはもともと、$\frac{S_{xy}}{S_{xx}}$ の式で表現できます。

●全回帰の傾きβ

$$\beta = \frac{S_{xy}}{S_{xx}} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}\sum_{l=1}^{q}(x_j-\bar{x})(y_{ijl}-\bar{y})}{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}\sum_{l=1}^{q}(x_j-\bar{x})^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}(x_j-\bar{x})q\{(y_{1j}-\bar{y})+\cdots+(y_{nj}-\bar{y})\}}{nq\sum_{j=1}^{k}(x_j-\bar{x})^2} = \frac{S_{xy1}+\cdots+S_{xyn}}{nS_{xx0}} = \frac{1}{n}(\beta_1+\cdots+\beta_n)$$

となり、平均になりますね。分母分子ともに、変数lに独立なので、分母分子 q で割ればＯＫです。

●各回帰の傾きβ_i

$$\beta_i = \frac{S_{xyi}}{S_{xxi}} = \frac{\sum_{j=1}^{k}(x_j-\bar{x})(y_{ij}-\bar{y_i})}{\sum_{j=1}^{k}(x_j-\bar{x})^2} = \frac{S_{xyi}}{S_{xx0}}$$

回帰分析の良い演習にもなりますね。結構ハードな式導出です。

(4) 回帰直線は必ず平均を通る条件を使う
回帰直線は、必ず平均を通ります。つまり、平均×個数＝総和ですから、
回帰直線上の全点数の$\widehat{y_i}$座標の合計は、計測データy_iの合計と同じになります。

この条件を使うと、
●全回帰において、 $\widehat{y_i} = \beta x_i$ は平均$(\bar{x}, \bar{y})$を通るので、データ個数倍すると、 (平均)×(個数)=(総和)より

$\sum_{j=1}^{k}\widehat{y_j} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}y_{ijl}$ が成り立つ。

●各i回帰において、 $\widehat{y_{ij}} = \beta_i x_i$ は平均$(\bar{x},\widehat{y_i})$を通るので、データ個数倍すると、 (平均)×(個数)=(総和)より

$\sum_{j=1}^{k}\widehat{y_{ij}} = \sum_{j=1}^{k}y_{ijl}$が成り立つ

この性質を使って、さっきのマーカ部の和が 0 になる事を証明します。

① $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}\sum_{l=1}^{q}\widehat{y_j}(\widehat{y_{ij}}-\widehat{y_j})$ ＝0 の証明

$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}\sum_{l=1}^{q}\widehat{y_j}(\widehat{y_{ij}}-\widehat{y_j}) = q\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}\widehat{y_j}(\widehat{y_{ij}}-\widehat{y_j})$

ここで、$\beta = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\beta_i$を使います。

$= q\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}\widehat{y_j}(\beta_i x_j - \beta x_j) = q\sum_{j=1}^{k}\widehat{y_j}\left((\beta_1+\cdots+\beta_n)x_j - n\beta x_j\right) = q\sum_{j=1}^{k}\widehat{y_j}(0)=0$ となります。

残り 2 つの式は、回帰直線は平均値を通る性質を使って証明します。

② $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}\sum_{l=1}^{q}\widehat{y_j}(y_{ijl}-\widehat{y_{ij}})$ ＝0 の証明

$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}\sum_{l=1}^{q}\widehat{y_j}(y_{ijl}-\widehat{y_{ij}}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}\widehat{y_j}\sum_{l=1}^{q}(y_{ijl}-\widehat{y_{ij}}) = q\sum_{j=1}^{k}\widehat{y_j}(0)=0$

③ $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}\sum_{l=1}^{q}(\widehat{y_{ij}}-\widehat{y_j})(y_{ijl}-\widehat{y_{ij}})$ ＝0 の証明

$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}\sum_{l=1}^{q}(\widehat{y_{ij}}-\widehat{y_j})(y_{ijl}-\widehat{y_{ij}}) = \sum_{i=1}^{n}(\widehat{y_{ij}}-\widehat{y_j})\sum_{j=1}^{k}\sum_{l=1}^{q}(y_{ijl}-\widehat{y_{ij}})$=0×0=0 以上まとめると、

●$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}\sum_{l=1}^{q}\widehat{y_j}(\widehat{y_{ij}}-\widehat{y_j})$ ●$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}\sum_{l=1}^{q}\widehat{y_j}(y_{ijl}-\widehat{y_{ij}})$ ●$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}\sum_{l=1}^{q}(\widehat{y_{ij}}-\widehat{y_j})(y_{ijl}-\widehat{y_{ij}})$
より、

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}\sum_{l=1}^{q}y_{ijl}^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}\sum_{l=1}^{q}\widehat{y_j}^2 + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}\sum_{l=1}^{q}(\widehat{y_{ij}}-\widehat{y_j})^2 + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}\sum_{l=1}^{q}(y_{ijl}-\widehat{y_{ij}})^2$$

と 2 乗和の分解ができます。

結構大変な計算ですが、端折らず一回は計算しましょう。ここを端折ると品質工学の動特性の式の意味を理解できません。

【4】２乗和の分解(事例)
２乗和を証明しましたが、関連記事にて、実データを使って、２乗和の分解ができることを確認しています。この教材の【品質工学、動特性、誤差因子１つで繰返しありの分解がわかる】で是非確認しましょう。

【5】よく使う公式の導出
(1) 有効除数、線形式、傾きの導出
すでに回帰分析手法から導出していますが、動特性でよく使う公式を上げておきます。全部回帰分析から導出できるので、一緒に理解しておくと、混乱しないし、効率よく覚えられますよね。

1. 有効除数 $r_i = r$(共通) $= S_{xx0} = \sum_{j=1}^{k} x_j^2$

2. 線形式 $L_{il} = S_{xyil} = \sum_{j=1}^{k} x_j y_{ijl}$

3. 傾き $\beta_i = \frac{S_{xyi}}{S_{xx0}} = \frac{L_i}{r}$

4. 傾き $\beta = \frac{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}\sum_{l=1}^{q} x_j y_{ijl}}{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}\sum_{l=1}^{q} x_j^2}$

5. 傾き $\beta_{il} = \frac{L_{il}}{r}$

6. 傾き $\beta = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\beta_i$

(2) 変動
先の２乗和の分解式を再掲すると、

●２乗和

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}\sum_{l=1}^{q} y_{ijl}^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}\sum_{l=1}^{q} \widehat{y_j}^2 + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}\sum_{l=1}^{q}\left(\widehat{y_{ij}} - \widehat{y_j}\right)^2 + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}\sum_{l=1}^{q}\left(y_{ijl} - \widehat{y_{ij}}\right)^2$$

S　　S_β(比例項の変動)　$S_{N\times\beta}$(誤差因子 N の変動)　S_e (誤差変動)

また、分散分析表は下表になります。実験計画法と自由度が若干異なる点に注意しましょう。

-	変動	自由度
比例項	S_β	1
誤差因子 N	$S_{N\times\beta}$	$n-1$
誤差変動	S_e	$nkq-n$
総変動	S	nkq

【6】SN 比
SN 比は定義式通り当てはめるよりは、
●有効成分
●有害成分
がそれぞれどの変動に該当するかを吟味して比をとれば OK です。

例えば

●SN 比　$\eta = \frac{S_\beta}{S_e}$

とか、log をつけるとかいろいろ使いやすい値にカスタマイズしてください。

以上、「品質工学、動特性、誤差因子１つで繰返し有りの場合がわかる」を解説しました。

品質工学,動特性の理想直線は原点通らなくて OK な理由がわかる

【1】理想直線は原点を通らなくてもいい回帰直線

(1) 品質工学の教科書によく書いていること

品質工学の教科書で動特性の導入を見ると、ほとんど以下の流れで書いています。

1. データの構造式　$y_j = \hat{y}_j + (y_j - \hat{y}_j)$
2. 理想直線 $\hat{y}_j\ =\ \beta x_j$
3. 誤差成分 $S_e = \sum_{i=1}^{k}\left(y_j - \hat{y}_j\right)^2$
4. 理想直線導出 $\frac{\partial S_e}{\partial \beta} = 0$　から　$\beta = \frac{\sum_{i=1}^{k} x_j y_j}{\sum_{i=1}^{k} x_j^2} = \frac{L}{r}$
5. 2 乗和　$S = S_\beta\ + S_e$

とあり、

理想直線は原点を通る直線が前提になっています。

(2) 単回帰直線の場合

でも単回帰直線の導出を確認すると、品質工学の動特性とほぼ同じです。

1. データの構造式　$y_j = \hat{y}_j + (y_j - \hat{y}_j)$
2. 理想直線 $\hat{y}_j\ =\ \beta x_j + \alpha$
3. 誤差成分 $S_e = \sum_{i=1}^{k}\left(y_j - \hat{y}_j\right)^2$
4. 理想直線導出 $\frac{\partial S_e}{\partial \alpha} = 0$、$\frac{\partial S_e}{\partial \beta} = 0$から　$\beta = \frac{S_{xy}}{S_{xx}}$
5. 2 乗和　$S = S_R + S_e$

品質工学動特性と単回帰分析は、同じ解法ですよね！品質工学の動特性と、単回帰分析の解法を比較して異なる点は、y 切片の有無の違いだけなので、

理想直線と回帰直線は同じでいいし、下手に原点通る直線と思い込むと、２乗和の分解で
$S \neq S_\beta\ + S_e$
なのに、
$S = S_\beta\ + S_e$
と勘違いしたまま分析する方がよっぽどマズイ！

まず、伝えたいのは、

理想直線や回帰直線ができるのは、2 乗和が分解できるから（中間積和項がすべて 0 になるから）
$S = S_\beta\ + S_e$
直線より、２乗和の分解が成立するかどうかを先にチェックすべき！

【2】理想直線(回帰直線)の成立条件

ちゃんと、理想直線を導出しましょう。単回帰直線と同じでいいことがわかります。

(1) 導出フロー

流れは、【1】(2)です。

(2) 理想直線を導出

　データの構造式 $y_j = \hat{y}_j + (y_j - \hat{y}_j)$ から(右辺)第２項の誤差成分を取り出します。
なお、$\hat{y}_j$は理想直線に乗るので、 $\hat{y}_j\ =\ \beta x_j + \alpha$（$\alpha \neq 0$ または 0）が成立します。

誤差成分 $S_e = \sum_{i=1}^{k}\left(y_j - \hat{y}_j\right)^2 = \sum_{i=1}^{k}\left(y_j - (\beta x_j +\ \alpha\ )\right)^2$ 成立条件は、誤差成分が最小になる条件です。

　成立条件は、誤差成分が最小になる条件です。これを考える時点で、回帰分析ですね。
条件式を作ります。展開すると、

●(i) $\frac{\partial S_e}{\partial \alpha}=0$ ⇒ $\sum_{j=1}^{k} x_j y_j = \beta \sum_{j=1}^{k} x_j^2 + \alpha \sum_{j=1}^{k} x_j$

●(ii) $\frac{\partial S_e}{\partial \beta}=0$ ⇒ $\sum_{j=1}^{k} y_j = \beta \sum_{j=1}^{k} x_j + k\alpha$

となります。これは、単回帰分析の教科書と同じ導出フローです。それを品質工学の動特性の理想直線としているだけです。計算すると

● $\alpha = \bar{y} - \beta\bar{x}$（αの式は複雑なのでシンプルにしています。）

● $\beta = \frac{k\sum_{i=1}^{k} x_j y_j - \sum_{i=1}^{k} x_j \sum_{i=1}^{k} y_j}{\sum_{i=1}^{k} x_j^2 - \left(\sum_{i=1}^{k} x_j\right)^2} = \cdots = \frac{\sum_{i=1}^{k}(x_j-\bar{x})(y_j-\bar{y})}{\sum_{i=1}^{k}(x_j-\bar{x})^2} = \frac{S_{xy}}{S_{xx}}$

ちゃんと計算すると、単回帰分析と同じ導出とわかりました。
なお、y 切片が 0 の場合は、βの式の中には、$\bar{x},\bar{y}$はありませんが、
y 切片が 0 でない場合は、βの式の中には、$\bar{x},\bar{y}$はあります。これは数学的に正しいので問題ないです。

(3) 【最重要！】2 乗和の分解が成立しているかを確認
　２乗和を証明しましたが､関連記事にて､実データを使って､2 乗和の分解ができることを確認しています。

【品質工学、動特性、誤差因子１つの変動の分解がわかる】
【品質工学、動特性、誤差因子１つで繰返しありの分解がわかる】
【品質工学、動特性、誤差因子 2 つの変動の分解がわかる】

で是非確認しましょう。ポイントは

●データの構造式： $y_{ij} = \hat{y_j} + (\widehat{y_{ij}} - \hat{y_j}) + (y_{ij} - \widehat{y_{ij}})$
●動特性の理想直線： $\hat{y_j} = -0.15 + 3.05x_j$
●２乗和の分解：$S = S_\beta + S_{N\times\beta} + S_e$　つまり、1250=996.05+196.45+57.5
となり、y 切片が 0 でない理想直線で、2 乗和の分解が成立していますね！
逆に y 切片を無理に 0 とする理想直線とすると、２乗和の分解が不成立になるので要注意です。

(4) 原点通る条件より 2 乗和の分解ができる条件で決まる

データの構造式を使えるためには、
● $(x+y+z+w)^2 = x^2+y^2+z^2+w^2$
● $xy = xz = xw = yz = yw = zw = 0$
という関係式が成り立つこと

　この条件を満たす式の１つに理想直線や回帰直線を当てはめることになります。
　教科書は、先に原点を通る理想直線から話が進むため、そのまま考えずに分散分析すると実は、2 乗和がうまく分解しない$(xy,xz,xw,yz,yw,zw)\neq 0)$条件で分析するリスクがあります。

【3】原点を通るようにデータ値を調整したら成り立つ
　でも、教科書のとおり、理想直線は原点を通る直線にしたいならどうすればよいかを１つ提案します。
(1) どうしても原点を通る理想直線したいなら
簡単なことで、

理想直線（回帰直線）の y 切片の値だけ、データ y から引けばいい
y⇒y-a (a:y 切片)に変換すれば OK

というひと手間入れれば OK ですが、

わざわざ先に回帰直線を計算してから y の値を y 切片分引くのは面倒ですよね。
品質工学は使い勝手の良さを売りに拡大していきましたが、その流れと逆ですよね。

(2) 【注意！】繰返しの有るデータや誤差因子が複数ある場合
　さらに、注意が必要なのは、関連記事のとおり、繰返しがある場合や誤差因子が複数ある場合は多くの理想直線（回帰直線）が出て来ますが、全直線は原点を通りません。

①　誤差因子が１つで繰返しがある場合

理想直線は

● $\widehat{y_1}$の回帰直線：$\widehat{y_1}$ ＝ $\alpha_1+\beta_1 x_j$

● $\widehat{y_2}$の回帰直線：$\widehat{y_2}$ ＝ $\alpha_2+\beta_2 x_j$

● $\hat{y}$の回帰直線：$\hat{y}$ ＝ $\alpha + \beta x_j$

ここで、

・$\beta=\frac{1}{2}(\beta_1+\beta_2)$　　　　・$\alpha=\frac{1}{2}(\alpha_1+\alpha_2)$

です。ただし、原点を通る調整ができるのは、αによるものだけで、y⇒y-αと調整しても、α_1, α_2は 0 になるとは限りません。理想直線のすべては原点を通るとは限らない。

②　誤差因子が２つの場合

理想直線は

● $\widehat{y_{ij}}$の回帰直線：$\widehat{y_{ij}}$ ＝ $\alpha_i+\beta_i x_j$

● $\widehat{y_{jl}}$の回帰直線：$\widehat{y_{jl}}$ ＝ $\alpha_l+\beta_l x_j$

ここで、

・$\beta=\beta_i$の平均、またはβ_l　　　　・$\alpha=\alpha_i$の平均、またはα_l

です。ただし、原点を通る調整ができるのは、αによるものだけで、y⇒y-αと調整しても、α_i, α_lは０になるとは限りません。結局、理想直線のすべては原点を通るとは限らない。

【4】だったら最初から回帰直線でいいじゃん

(1) 結論は、

だったら最初から回帰直線でいいじゃん

(2) 難しい品質工学を簡単に解く気遣いが逆効果

品質工学を研究してわかるのは、

実験計画法と回帰分析がわかっていないと品質工学は解けない。でも、多くの人に使ってもらうためにシンプルな式で使い勝手の良さを上げたいという気持ちはとても理解できます。

それが、有効除数 r や線形式Ｌを定義したり、理想直線を y=βx という簡単な式を使うようにしているわけです。

でも実験計画法と回帰分析と違う定義式が品質工学で出て来ると、互いの違いがわかりにくくなり、品質工学で何を解いているのかわからなくなります。ＱＣプラネッツも長年ここで悩んでいたし、それが実験計画法や品質工学、タグチメソッドを遠ざけていた要因でもあります。

(3) 定義式から丁寧に導出して勉強しよう

データの構造式から２乗和の分解を丁寧に計算してわかったことは、

品質工学は実験計画法と回帰分析を合わせたものでいいし、動特性の理想直線は回帰直線でＯＫです！

としっかり計算して確認することで、品質工学と実験計画法・回帰分析との関連もしっかり理解できますね！

品質工学の教科書を鵜呑みして、解法を真似ても本質は理解できません。 本質が理解できたら、守るべき条件（２乗和の分解）をおさえて 使いやすい式や分析を自分になりにアレンジしたらよいと考えます。

以上、「品質工学,動特性の理想直線は原点通らなくて OK な理由がわかる」を解説しました。

品質工学、動特性、誤差因子２つの場合がわかる

【1】誤差因子１つで繰返し有りから始める

(1) 品質工学も基本、データの構造式から始める

いろいろなモデルケースを品質工学で扱いますが、実験計画法や回帰分析と同様に

1. データの構造式を立てる
2. 2 乗和の分解を確認
3. 分散分析から F 検定

必ずデータの構造式を立てて、2 乗和の分解（中間積和がすべて 0）を確認して分散分析する流れで行きます。

(2) 誤差因子１つで繰返し有りから始める

1. 誤差因子１つで繰返し無しの場合
2. 誤差因子１つで繰返し有りの場合
3. 誤差因子２つで繰返し無しの場合

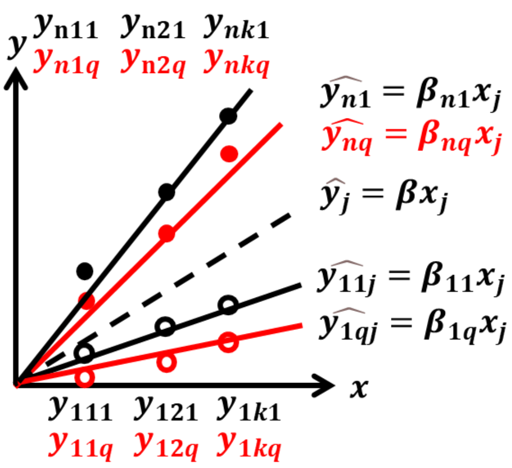
・・・と１つずつ応用していきます。

データの構造式がどう変わっていくか？　変動の分解から分散分析の流れを確かめます。
まずはこの冊子の中にある関連記事で基礎を確認してください。誤差因子が１つで繰返し有りの場合を理解した上で、誤差因子が２つの場合である本記事を解説します。

(3) 品質工学、動特性、誤差因子２つのある場合

誤差因子が１つある動特性のデータで繰り返し有りと
誤差因子が２つある動特性のデータの場合との違いを下表と下図にイメージを載せます。

繰返し	N_i	-	x_1	x_2	…	x_k
有	N_1	-	y_{111}	y_{121}	…	y_{1k1}
		-	…	…		…
		-	y_{11q}	y_{12q}		y_{1kq}
	…	…	…	…	…	…
	N_n	-	y_{n11}	y_{n21}	…	y_{nk1}
		-	…	…		…
		-	y_{n1q}	y_{n2q}		y_{nkq}
繰返し	N_i	-	x_1	x_2	…	x_k
無	N_1	O_1	y_{111}	y_{121}	…	y_{1k1}
		…	…	…		…
		O_q	y_{11q}	y_{12q}		y_{1kq}
	…	…	…	…	…	…
	N_n	O_1	y_{n11}	y_{n21}	…	y_{nk1}
		…	…	…		…
		O_q	y_{n1q}	y_{n2q}		y_{nkq}



【2】データの構造式

(1) 動特性で繰り返し有りの場合

$$y_{ijl} = \hat{y}_j + (\widehat{y_{ij}} - \hat{y}_j) + (y_{ijl} - \widehat{y_{ij}})$$

でしたね。これはすでに解説しています。

(2)動特性で誤差因子２個の場合

では、誤差因子２個の場合のデータの構造式を書いてみます。誤差因子１個で繰り返し有りの場合からの変化を図で見てみましょう。

④ $$y_{ijl} = \hat{y}_j + (\widehat{y_{ij}} - \hat{y}_j) + (y_{ijl} - \widehat{y_{ij}})$$

⑤ $$y_{ijl} = \hat{y}_j + (\widehat{y_{ij}} - \hat{y}_j) + (\widehat{y_{ij}} - \hat{y}_j) + (y_{ijl} - \widehat{y_{ij}} - \widehat{y_{ij}} + \hat{y}_j)$$

動特性で誤差因子２個の場合のデータの構造式は
$y_{ijl}=\hat{y_j}+(\widehat{y_{lj}}-\hat{y_j})+(\widehat{y_{lj}}-\hat{y_j})+(y_{ijl}-\widehat{y_{lj}}-\widehat{y_{lj}}+\hat{y_j})$　(式 1)
となります。ちょこっと変化した感じですね。

【3】２乗和の分解(数式)
(1) 2 乗和の分解を解説
誤差因子 2 つの動特性のデータの構造式は(式 1)ですから、

●２乗和

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}\sum_{l=1}^{q}y_{ijl}^2=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}\sum_{l=1}^{q}\hat{y_j}^2+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}\sum_{l=1}^{q}(\widehat{y_{lj}}-\hat{y_j})^2+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}\sum_{l=1}^{q}(\widehat{y_{lj}}-\hat{y_j})^2$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}\sum_{l=1}^{q}(y_{ijl}-\widehat{y_{lj}}-\widehat{y_{lj}}+\hat{y_j})^2 \qquad (式 2)$$

となりますが、実際に証明してみましょう。

なんでもそうですが、

1. モデル式(データの構造式)を立てる
2. 2 乗和の分解、直交性を実際解いて確かめる
3. 分散分析に持ち込む

が QC の基本です。

(2) 2 乗和の分解を証明
実際に導出してみましょう。機械的に２乗して展開します。

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}\sum_{l=1}^{q}y_{ijl}^2$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}\sum_{l=1}^{q}\hat{y_j}^2+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}\sum_{l=1}^{q}(\widehat{y_{lj}}-\hat{y_j})^2+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}\sum_{l=1}^{q}(\widehat{y_{lj}}-\hat{y_j})^2+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}\sum_{l=1}^{q}(y_{ijl}-\widehat{y_{lj}}-\widehat{y_{lj}}+\hat{y_j})^2$$

$$+2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}\sum_{l=1}^{q}\hat{y_j}(\widehat{y_{lj}}-\hat{y_j})+2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}\sum_{l=1}^{q}\hat{y_j}(\widehat{y_{lj}}-\hat{y_j})+2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}\sum_{l=1}^{q}\hat{y_j}(y_{ijl}-\widehat{y_{lj}}-\widehat{y_{lj}}+\hat{y_j})$$

$$+2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}\sum_{l=1}^{q}(\widehat{y_{lj}}-\hat{y_j})(\widehat{y_{lj}}-\hat{y_j})+2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}\sum_{l=1}^{q}(\widehat{y_{lj}}-\hat{y_j})(y_{ijl}-\widehat{y_{lj}}-\widehat{y_{lj}}+\hat{y_j})$$

$$+2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}\sum_{l=1}^{q}(\widehat{y_{lj}}-\hat{y_j})(y_{ijl}-\widehat{y_{lj}}-\widehat{y_{lj}}+\hat{y_j})$$

となります。マーカ部分が 0 になることを示せばよいのです。

マーカ部分が 0 になることを示せばには、回帰から２つの制約条件を使います。
ここで、回帰から２つの制約条件を使います。

1. $\beta=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\beta_i$
2. 回帰直線は必ず平均を通るので、回帰直線上の y 座標の値の合計は測定データ y 座標の合計と等しい。

よって、2 乗和の分解(式 2)が成り立ちます。マーカ部分が 0 になるかどうかは一度挑戦してみてください。

【5】よく使う公式の導出
(1) 有効除数、線形式、傾きの導出
すでに回帰分析手法から導出していますが、動特性でよく使う公式を上げておきます。全部回帰分析から導出できるので、一緒に理解しておくと、混乱しないし、効率よく覚えられますよね。

1. 有効除数 $r_i = r$(共通) $= S_{xx0} = \sum_{j=1}^{k} x_j^2$

2. 線形式 $L_{ij} = S_{xyil} = \sum_{j=1}^{k} x_j y_{ijl}$

3. 傾き $\beta = \frac{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}\sum_{l=1}^{q} x_j y_{ijl}}{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}\sum_{l=1}^{q} x_j^2}$

4. 傾き $\beta_{il} = \frac{L_{il}}{r}$

誤差因子が２つの場合になると、公式を暗記が大変なので、
データの構造式を立てて、変動を計算し、回帰直線を求める流れで考えておけば OK ですね。
品質工学独特の公式ではなく、実験計画法・回帰分析と比較しながら解法の流れを理解しよう！

(2) 変動
先の２乗和の分解式（式 2）を再掲すると、

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}\sum_{l=1}^{q} y_{ijl}^2}_{S}=\underbrace{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}\sum_{l=1}^{q} \hat{y_j}^2}_{S_\beta}+\underbrace{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}\sum_{l=1}^{q}\left(\widehat{y_{ij}}-\hat{y_j}\right)^2}_{S_{N\times\beta}}+\underbrace{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}\sum_{l=1}^{q}\left(\widehat{y_{lj}}-\hat{y_j}\right)^2}_{S_{O\times\beta}}$$

$$+\underbrace{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}\sum_{l=1}^{q}\left(y_{ijl}-\widehat{y_{ij}}-\widehat{y_{lj}}+\hat{y_j}\right)^2}_{S_e} \quad （式 2）$$

この式の各項を $S = S_\beta + S_{N\times\beta} + S_{O\times\beta} + S_e$ と変動を分解することができます。
また、分散分析表は下表になります。実験計画法と自由度が若干異なる点に注意しましょう。

-	変動	自由度
比例項	S_β	1
誤差因子 N	$S_{N\times\beta}$	$n-1$
誤差因子 O	$S_{O\times\beta}$	$q-1$
誤差変動	S_e	$nkq-n-q+1$
総変動	S	nkq

(3) 自由度の簡単な求め方
各変動の式になる添え字に注目します。

●$S_\beta=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}\sum_{l=1}^{q} \hat{y_j}^2$ ⇒ $\hat{y_j}$のjを 1 に変えて、1

●$S_{N\times\beta}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}\sum_{l=1}^{q}\left(\widehat{y_{ij}}-\hat{y_j}\right)^2$ ⇒ $\widehat{y_{ij}}$のiを n に変えて、$\hat{y_j}$のjを 1 に変えて、$n-1$

●$S_{O\times\beta}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}\sum_{l=1}^{q}\left(\widehat{y_{lj}}-\hat{y_j}\right)^2$ ⇒ $\widehat{y_{lj}}$のlを q に変えて、$\hat{y_j}$のjを 1 に変えて、$q-1$

●$S_e=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}\sum_{l=1}^{q}\left(y_{ijl}-\widehat{y_{ij}}-\widehat{y_{lj}}+\hat{y_j}\right)^2$ ⇒ $\widehat{y_{ij}}$のiを n に変えて、$\widehat{y_{lj}}$のlを q に変えて、$\hat{y_j}$のjを 1 に変えて、$nkq-n-q+1$

●$S=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}\sum_{l=1}^{q} y_{ijl}^2$ ⇒ そのままnkq

というルールで見ると自由度が簡単に求められます。

誤差因子１つ繰返し有りの場合と比べると、全変動 S と自由度nkqは不変ですが、
誤差因子 O、$S_{O\times\beta}$の有無の違いがあることがわかりますね。

【6】SN 比
SN 比は定義式通り当てはめるよりは、
●有効成分
●有害成分
がそれぞれどの変動に該当するかを吟味して比をとれば OK です。

例えば

●SN 比　$\eta = \frac{S_\beta}{S_e}$

とか、log をつけるとかいろいろ使いやすい値にカスタマイズしてください。

以上、品質工学、動特性、誤差因子 2 つの場合がわかる」を解説しました。

品質工学、動特性、誤差因子１つの変動の分解がわかる

本記事の結論である

●２乗和　$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k} y_{ij}^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k} \hat{y_j}^2 + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k} \left(\widehat{y_{ij}} - \hat{y_j}\right)^2 + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k} \left(y_{ij} - \widehat{y_{ij}}\right)^2$

が成立することを、実データを計算して確かめます！

【1】データの構造式

(1) 関連記事で基礎を確認

本冊子ですでに、【品質工学、動特性、誤差因子１つの場合がわかる】で解説していますので、最初に確認ください。本記事は、この関連記事の中の２乗和の分解について、具体的なデータを使って計算します！

(2) データの構造式

品質工学、動特性、誤差因子１つ（繰返し無し）のデータの構造式は次の式でしたね！　繰り返しのある単回帰分析のデータの構造式と同じと考えて OK でしたね。

$$y_{ij} = \hat{y_j} + \left(\widehat{y_{ij}} - \hat{y_j}\right) + \left(y_{ij} - \widehat{y_{ij}}\right)$$

【2】実データ

実際に、下表のデータを使って、2 乗和の分解(式 2)を確認しましょう。

No	x	y_1	y_2
1	1	2	5
2	2	3	7
3	3	6	11
4	4	4	23
5	5	10	19
合計	15	25	65
平均	3	5	13

(1) データの構造式から求めたい値

データの構造式は、

$$y_{ij} = \hat{y_j} + \left(\widehat{y_{ij}} - \hat{y_j}\right) + \left(y_{ij} - \widehat{y_{ij}}\right)$$

ですから、

●y_{ij}は、実データから

●$\hat{y_j}$は、回帰直線 $\hat{y_j} = \beta x_j + \alpha$ から

●$\widehat{y_{ij}}$は、回帰直線 $\widehat{y_{ij}} = \beta_i x_j + \alpha_i$ から

求めることができます。

(2)【重要】動特性の直線式の注意点

よく、動特性では $\hat{y_j} = \beta x_j$ と原点を通る直線で考えますが、基本は、原点通らず、y 切片が必要です。
ちゃんと２乗和の分解を計算して確認していない教科書が多すぎる

ＱＣプラネッツでは、動特性の直線式は、
y=ax+b 型
と表記します。

【3】回帰直線と$\hat{y}$の計算

(1) 回帰分析から計算しよう！

回帰直線の求め方は、関連記事で解説していますので、確認しましょう。

【関連記事】回帰分析と相関係数をマスターする
https://qcplanets.com/method/regression/basic/

(2) 回帰分析から計算

データを再掲します。

No	x	y_1	y_2	$x-\bar{x}$	$y_1-\overline{y_1}$	$y_2-\overline{y_2}$	$y_1-\bar{y}$	$y_2-\bar{y}$
1	1	2	5	-2	-3	-8	-7	-4
2	2	3	7	-1	-2	-6	-6	-2
3	3	6	11	0	1	-2	-3	2
4	4	4	23	1	-1	10	-5	14
5	5	10	19	2	5	6	1	10
合計	15	25	65	0	0	0	0	0
平均	3	5	13	-				

上表から、平方和 S_{xx} と偏差積和 S_{xy1}, S_{xy2}, S_{xy} が計算できます。

ここで、S_{xy1}, S_{xy2} は文字 j についての 5 個の和で、

S_{xy} は文字 i,j についての 2×5=10 個の和である点に注意しましょう。

●平方和 $S_{xx}=\sum_{j=1}^{5}(x_j-\bar{x})^2$=(-2)²+(-1)²+⋯+2²=10

●偏差積和 $S_{xy1}=\sum_{j=1}^{5}(x_j-\bar{x})(y_{1j}-\overline{y_1})$=(-2)×(-3)+(-1)×(-2)+…+2×5=17

●偏差積和 $S_{xy2}=\sum_{j=1}^{5}(x_j-\bar{x})(y_{2j}-\overline{y_2})$=(-2)×(-8)+(-1)×(-6)+…+2×6=44

●偏差積和 $S_{xy}=\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{5}(x_j-\bar{x})(y_{ij}-\overline{y_i})$=(-2)×(-7)+(-1)×(-6)+…+2×10=61

(3) 回帰直線の導出

平方和と偏差積和が計算できたので、回帰直線が導出できます。

● $\widehat{y_1}$の回帰直線

・傾き $\beta_1=\frac{S_{xy1}}{S_{xx}}=1.7$　・y 切片 $\alpha_1=\overline{y_1}-\beta_1\bar{x}$ = 5-1.7×3 = -0.1　よって、$\widehat{y_1}$ = -0.1+1.7x_1

● $\widehat{y_2}$の回帰直線

・傾き $\beta_2=\frac{S_{xy2}}{S_{xx}}=4.4$　・y 切片 $\alpha_2=\overline{y_2}-\beta_2\bar{x}$ = 13-4.4×3 = -0.2　よって、$\widehat{y_2}$ = -0.2+4.4x_2

● $\hat{y}$の回帰直線

・傾き $\beta=\frac{S_{xy}}{S_{xx}\times 2}=3.05$　・y 切片 $\alpha=\bar{y}-\beta\bar{x}$ = 9-3.05×3 = -0.15　よって、$\hat{y}$ = -0.15+3.05x

計算してわかる面白い結果は、

●S_{xy1}(17)+S_{xy2}(44)=S_{xy}(61) と偏差積和は y=y1+y2 と分解できる！

●$\frac{1}{2}(\beta_1+\beta_2)$= 0.5×(1.7+4.4)=3.05=$\beta$　全体の傾きは 2 本の傾きの平均とわかる！

【4】データ構造式の各項の計算

(1) 回帰直線から$\hat{y_i}$、$\hat{y}$を計算

計算結果を下表にまとめます。

No	x	y_1	y_2	$\widehat{y_1}$	$\widehat{y_2}$	$\hat{y}$
1	1	2	5	1.6	4.2	2.9
2	2	3	7	3.3	8.6	5.95
3	3	6	11	5	13	9
4	4	4	23	6.7	17.4	12.05
5	5	10	19	8.4	21.8	15.1
合計	15	25	65	25	65	45
平均	3	5	13	-		

- $\widehat{y_1}$ の合計は 25 で、y_1 の合計と同じで、
- $\widehat{y_2}$ の合計は 65 で、y_2の合計と同じで、
- $\hat{y}$の合計は 45 で、yの合計の半分ですが、これは、2 本の回帰直線を 1 本にまとめたからですね。

(2) 各項を計算

データの構造式　$y_{ij} = \hat{y_j} + (\widehat{y_{ij}} - \hat{y_j}) + (y_{ij} - \widehat{y_{ij}})$　から、「$\hat{y_j}$」、「$(\widehat{y_{ij}} - \hat{y_j})$」、「$(y_{ij} - \widehat{y_{ij}})$」の値を求めます。

結果は下表になります。

No	x_j	①+②+④	①+③+⑤	①	②	③	④	⑤
		y_1	y_2	$\hat{y_j}$	$(\widehat{y_{1j}} - \hat{y_j})$	$(\widehat{y_{2j}} - \hat{y_j})$	$(y_{1j} - \widehat{y_{1j}})$	$(y_{2j} - \widehat{y_{2j}})$
1	1	2	5	2.9	-1.3	1.3	0.4	0.8
2	2	3	7	5.95	-2.65	2.65	-0.3	-1.6
3	3	6	11	9	-4	4	1	-2
4	4	4	23	12.05	-5.35	5.35	-2.7	5.6
5	5	10	19	15.1	-6.7	6.7	1.6	-2.8
合計	15	25	65	45	-20	20	0	0
平均	3	5	13	-	-	-	-	-

【5】2 乗和の分解を確認

(1) 各値を 2 乗

No	x_j	①+②+④	①+③+⑤	①	②	③	④	⑤
		y_1	y_2	$\hat{y_j}$	$(\widehat{y_{1j}} - \hat{y_j})$	$(\widehat{y_{2j}} - \hat{y_j})$	$(y_{1j} - \widehat{y_{1j}})$	$(y_{2j} - \widehat{y_{2j}})$
1	1	4	25	8.41	1.69	1.69	0.16	0.64
2	2	9	49	35.40	7.02	7.02	0.09	2.56
3	3	36	121	81	16	16	1	4
4	4	16	529	145.20	28.62	28.62	7.29	31.36
5	5	100	361	228.01	44.89	44.89	2.56	7.84
合計	15	165	1085	498.03	98.23	98.22	11.10	46.40
-	-	計	1250	996.05	-	196.45	57.5	

変動見ると、　$S = S_{\beta} + S_{N\times\beta} + S_e$　　つまり、1250=996.05+196.45+57.5　が成立することがわかります。

(2) 中間積和が 0 になることも確認
下の式の値が、どれも 0 になることを確認しましょう。

$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}\hat{y}_j(\widehat{y_{ij}}-\hat{y}_j)$=0

$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}\hat{y}_j(y_{ij}-\hat{y}_j)$=0

$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}(\widehat{y_{ij}}-\hat{y}_j)(y_{ij}-\hat{y}_j)$=0

＜計算結果＞

No	x_j	①	②	③	④	⑤	⑥
		$\hat{y}_j$	$\hat{y}_j$	$(\widehat{y_{1j}}-\hat{y}_j)$	$(\widehat{y_{2j}}-\hat{y}_j)$	$(y_{1j}-\widehat{y_{1j}})$	$(y_{2j}-\widehat{y_{2j}})$
1	1	2.9	2.9	-1.3	1.3	0.4	0.8
2	2	5.95	5.95	-2.65	2.65	-0.3	-1.6
3	3	9	9	-4	4	1	-2
4	4	12.05	12.05	-5.35	5.35	-2.7	5.6
5	5	15.1	15.1	-6.7	6.7	1.6	-2.8
合計	15	45	45	-20	20	0	0
No	x	①×③	②×④	①×⑤	②×⑥	③×⑤	④×⑥
1	1	-3.77	3.77	1.16	2.32	-0.52	1.04
2	2	-15.77	15.77	-1.79	-9.52	0.80	-4.24
3	3	-36	36	9	-18	-4	-8
4	4	-64.47	64.47	-32.54	67.48	14.45	29.96
5	5	-101.17	101.17	24.16	-42.28	-10.72	-18.76
合計	15	0		0		0	

確かに、中間積和の 3 つの項がすべて 0 になるのが確認できましたね。
実データを使って確認することも大事な勉強ですね。

本記事の結論である

● 2 乗和　$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}y_{ij}^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}\hat{y}_j^{\,2} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}(\widehat{y_{ij}}-\hat{y}_j)^2 + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}(y_{ij}-\widehat{y_{ij}})^2$

が成立することを、実データを計算して確かめました！

以上、
「品質工学、動特性、誤差因子 1 つの変動の分解がわかる」を解説しました。

品質工学、動特性、誤差因子１つで繰返しありの分解がわかる

本記事の結論である

●２乗和　$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}\sum_{l=1}^{q}y_{ijl}^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}\sum_{l=1}^{q}\hat{y_j}^2 + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}\sum_{l=1}^{q}(\widehat{y_{ij}}-\hat{y_j})^2 + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}\sum_{l=1}^{q}(y_{ijl}-\widehat{y_{ij}})^2$

が成立することを、実データを計算して確かめます！

【1】データの構造式

(1) 関連記事で基礎を確認

本冊子ですでに、【品質工学、動特性、誤差因子１つで繰返し有りの場合がわかる】で解説していますので、確認ください。本記事は、この関連記事の中の２乗和の分解について、具体的なデータを使って計算します！

(2) データの構造式

品質工学、動特性、誤差因子１つ（繰返しあり）のデータの構造式は次の式でしたね！　繰り返しのある単回帰分析のデータの構造式と同じと考えて OK でしたね。

$$y_{ijl} = \hat{y_j} + (\widehat{y_{ij}} - \hat{y_j}) + (y_{ijl} - \widehat{y_{ij}})$$

【2】実データ

実際に、下表のデータを使って、2 乗和の分解(式 2)を確認しましょう。

No	x	1		2	
		$y_1(l=1)$	$y_1(l=2)$	$y_2(l=1)$	$y_2(l=2)$
1	1	2	4	6	10
2	2	3	2	8	8
3	3	6	6	12	17
4	4	4	8	24	22
5	5	10	10	20	18
合計	15	55		145	
平均	3	5.5		14.5	

(1) データの構造式から求めたい値

データの構造式は、　$y_{ijl} = \hat{y_j} + (\widehat{y_{ij}} - \hat{y_j}) + (y_{ijl} - \widehat{y_{ij}})$　ですから、

●y_{ijl}は、実データから

●$\hat{y_j}$は、回帰直線 $\hat{y_j} = \beta x_j + \alpha$ から

●$\widehat{y_{ij}}$は、回帰直線 $\widehat{y_{ij}} = \beta_i x_j + \alpha_i$ から

求めることができます。

(2)【重要】動特性の直線式の注意点

よく、動特性では $\hat{y_j} = \beta x_j$ と原点を通る直線で考えますが、基本は、原点通らず、y 切片が必要です。
ちゃんと２乗和の分解を計算して確認していない教科書が多すぎる

ＱＣプラネッツでは、動特性の直線式は、
y=ax+b 型
と表記します。

【3】回帰直線と$\hat{y}$の計算

(1) 回帰分析から計算しよう！

回帰直線の求め方は、関連記事で解説していますので、確認しましょう。

【関連記事】回帰分析と相関係数をマスターする
https://qcplanets.com/method/regression/basic/

(2) 回帰分析から計算

データを再掲します。

No	x_j	y_1		y_2		$x_j-\bar{x}$	$y_1-\overline{y_1}$		$y_2-\overline{y_2}$		$y_1-\bar{y}$		$y_2-\overline{y_2}$	
1	1	2	4	6	10	-2.0	-3.5	-1.5	-8.5	-4.5	-8	-6	-4	0
2	2	3	2	8	8	-1.0	-2.5	-3.5	-6.5	-6.5	-7	-8	-2	-2
3	3	6	6	12	17	0.0	0.5	0.5	-2.5	2.5	-4	-4	2	7
4	4	4	8	24	22	1.0	-1.5	2.5	9.5	7.5	-6	-2	14	12
5	5	10	10	20	18	2.0	4.5	4.5	5.5	3.5	0	0	10	8
合計	15	55		145		-								
平均	3	5.5		14.5										

上表から、平方和 S_{xx} と偏差積和 S_{xy1}, S_{xy2}, S_{xy} が計算できます。
ここで、<u>S_{xy1}, S_{xy2} は文字 j についての 5×2=10 個の和で、</u>
<u>S_{xy} は文字 i,j,l についての 2×5×2=20 個の和である点に注意</u>しましょう。

●平方和 S_{xx} = $\sum_{j=1}^{5}\left(x_j-\bar{x}\right)^2$=(-2)²+(-1)²+…+2²=10

●偏差積和 S_{xy1} = $\sum_{j=1}^{5}\sum_{l=1}^{2}\left(x_j-\bar{x}\right)\left(y_{1jl}-\overline{y_1}\right)$=(-2)×3.5+(-1)×(-2.5)+…+2×4=35

●偏差積和 S_{xy2}= $\sum_{j=1}^{5}\sum_{l=1}^{2}\left(x_j-\bar{x}\right)\left(y_{2jl}-\overline{y_1}\right)$=(-2)×3.5+(-1)×(-6.5)+…+2×3.5=74

●偏差積和 S_{xy} = $\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{5}\sum_{l=1}^{2}\left(x_j-\bar{x}\right)\left(y_{ijl}-\overline{y_i}\right)$=(-2)×(-8)+(-1)×(-7)+…+2×8=109

(3) 回帰直線の導出

平方和と偏差積和が計算できたので、回帰直線が導出できます。

● $\widehat{y_1}$の回帰直線

・傾き $\beta_1=\frac{S_{xy1}}{S_{xx}\times 2}$=35/20=1.75　　・y 切片 $\alpha_1=\overline{y_1}-\beta_1\bar{x}$=5.5-1.75×3=0.25 よって、$\widehat{y_1}$=0.25+1.75$x_1$

● $\widehat{y_2}$の回帰直線

・傾き $\beta_2=\frac{S_{xy2}}{S_{xx}\times 2}$=74/20=3.7　　・y 切片 $\alpha_2=\overline{y_2}-\beta_2\bar{x}$=14.5-3.7×3=3.4　よって、$\widehat{y_2}$=3.4+3.7$x_2$

● $\hat{y}$の回帰直線

・傾き $\beta=\frac{S_{xy}}{S_{xx}\times 4}$=109/40=2.725　　・y 切片 $\alpha=\bar{y}-\beta\bar{x}$=10-2.725×3=1.825 よって、$\hat{y}$=1.825+2.725$x$

計算してわかる面白い結果は、

●S_{xy1}(35)+S_{xy2}(74)=S_{xy}(109) と偏差積和は y=y1+y2 と分解できる！

●$\frac{1}{2}(\beta_1+\beta_2)$= 0.5×(1.75+3.7)=2.725=$\beta$ 全体の傾きは 2 本の傾きの平均とわかる！

●$\frac{1}{2}(\alpha_1+\alpha_2)$= 0.5×(0.25+3.4)=1.825 全体の y 切片は 2 本の直線の y 切片の平均とわかる！

【4】データ構造式の各項の計算

(1) 回帰直線から $\widehat{y_i}$、$\hat{y}$を計算

計算結果を下表にまとめます。

No	x_j	$\widehat{y_{1j}}$	$\widehat{y_{2j}}$	$\widehat{y_j}$
1	1	2	7.1	4.55
2	2	3.75	10.8	7.28
3	3	5.5	14.5	10
4	4	7.25	18.2	12.73
5	5	9	21.9	15.45
合計	15	27.5	72.5	50

● $\widehat{y_{1j}}$ の合計は 27.5 で、y_1 の合計 55 の半分で、

● $\widehat{y_{2j}}$ の合計は 72.5 で、y_2 の合計 145 の半分で、

● $\widehat{y_j}$の合計は 50 で、yの合計 200 の 1/4 です。

(2) 各項を計算

データの構造式　$y_{ijl}=\widehat{y_j}+\left(\widehat{y_{ij}}-\widehat{y_j}\right)+\left(y_{ijl}-\widehat{y_{ij}}\right)$　から、「$\widehat{y_j}$」、「$\left(\widehat{y_{ij}}-\widehat{y_j}\right)$」、「$\left(y_{ijl}-\widehat{y_{ij}}\right)$」の値を求めます。

No	①+②+④	①+②+⑤	①+③+⑥	①+③+⑦	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦
	y_{ijl}				$\widehat{y_j}$	$\widehat{y_{ij}}-\widehat{y_j}$		$y_{ijl}-\widehat{y_{ij}}$			
1	2	4	6	10	4.55	-2.55	2.55	0	2	-1.1	2.9
2	3	2	8	8	7.28	-3.53	3.53	-0.75	-1.75	-2.8	-2.8
3	6	6	12	17	10	-4.5	4.5	0.5	0.5	-2.5	2.5
4	4	8	24	22	12.73	-5.48	5.48	-3.25	0.75	5.8	3.8
5	10	10	20	18	15.45	-6.45	6.45	1	1	-1.9	-3.9
合計		55		145	50		0				0

【5】２乗和の分解を確認</h2>

(1) 各値を２乗

No	①+②+④	①+②+⑤	①+③+⑥	①+③+⑦	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦
	y_{ijl}				$\widehat{y_j}$	$\widehat{y_{ij}}-\widehat{y_j}$		$y_{ijl}-\widehat{y_{ij}}$			
1	4	16	36	100	20.7	6.5	6.5	6.5	6.5	1.21	8.41
2	9	4	64	64	52.9	12.43	12.43	12.43	12.43	7.84	7.84
3	36	36	144	289	100.0	20.25	20.25	20.25	20.25	6.25	6.25
4	16	64	576	484	161.9	29.98	29.98	29.98	29.98	33.64	14.44
5	100	100	400	324	238.7	41.6	41.6	41.6	41.6	3.61	15.21
合計	2866		計①×4		2297	計(②+③)×2	443	計④+⑤+⑥+⑦		126	

変動見ると、　$S=S_{\beta}+S_{N\times\beta}+S_e$　つまり、2866=2297+443+126　が成立することがわかります。

(2) 中間積和が 0 になることも確認

下の式の値が０になることを確認しましょう。

マーカ部分が 0 になることを示せばよいので、

●$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}\sum_{l=1}^{q}\widehat{y_j}\left(\widehat{y_{ij}}-\widehat{y_j}\right)$

●$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}\sum_{l=1}^{q}\widehat{y_j}\left(y_{ijl}-\widehat{y_{ij}}\right)$

●$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}\sum_{l=1}^{q}\left(\widehat{y_{ij}}-\widehat{y_j}\right)\left(y_{ijl}-\widehat{y_{ij}}\right)$

と 3 項とも０になることを証明します。

No	x_j	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨	⑩	⑪
		y_{ijl}				$\hat{y_j}$	$\widehat{y_{ij}}-\hat{y_j}$		$y_{ijl}-\widehat{y_{ij}}$			
1	1	2	4	6	10	4.55	-2.55	2.55	0	2	-1.1	2.9
2	2	3	2	8	8	7.28	-3.53	3.53	-0.75	-1.75	-2.8	-2.8
3	3	6	6	12	17	10	-4.5	4.5	0.5	0.5	-2.5	2.5
4	4	4	8	24	22	12.73	-5.48	5.48	-3.25	0.75	5.8	3.8
5	5	10	10	20	18	15.45	-6.45	6.45	1	1	-1.9	-3.9
No	⑤×⑥	⑤×⑥	⑤×⑦	⑤×⑦	⑥×⑧	⑥×⑨	⑦×⑩	⑦×⑪	①×⑧	②×⑨	③×⑩	④×⑪
	$\hat{y_j}(\widehat{y_{ij}}-\hat{y_j})$				$(\widehat{y_{ij}}-\hat{y_j})(y_{ijl}-\widehat{y_{ij}})$				$\hat{y_j}(y_{ijl}-\widehat{y_{ij}})$			
1	-11.60	-11.60	11.60	11.60	0.00	-5.10	-2.81	7.40	0.00	9.10	-5.00	13.20
2	-25.64	-25.64	25.64	25.64	2.64	6.17	-9.87	-9.87	-5.46	-12.73	-20.37	-20.37
3	-45.00	-45.00	45.00	45.00	-2.25	-2.25	-11.25	11.25	5.00	5.00	-25.00	25.00
4	-69.67	-69.67	69.67	69.67	17.79	-4.11	31.76	20.81	-41.36	9.54	73.81	48.36
5	-99.65	-99.65	99.65	99.65	-6.45	-6.45	-12.26	-25.16	15.45	15.45	-29.36	-60.26
合計	計 $\hat{y_j}(\widehat{y_{ij}}-\hat{y_j})$			0	計 $(\widehat{y_{ij}}-\hat{y_j})(y_{ijl}-\widehat{y_{ij}})$			0	計 $\hat{y_j}(y_{ijl}-\widehat{y_{ij}})$			0

確かに、中間積和の 3 つの項がすべて 0 になるのが確認できましたね。
実データを使って確認することも大事な勉強ですね。

本記事の結論である

●２乗和　$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}\sum_{l=1}^{q} y_{ijl}^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}\sum_{l=1}^{q} \hat{y_j}^2 + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}\sum_{l=1}^{q}\left(\widehat{y_{ij}}-\hat{y_j}\right)^2 + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}\sum_{l=1}^{q}\left(y_{ijl}-\widehat{y_{ij}}\right)^2$

が成立することを、実データを計算して確かめました！

以上、「品質工学、動特性、誤差因子１つで繰返しありの分解がわかる」を解説しました。

本記事の結論である(式 1)を、実データを活用して証明しましょう。
●２乗和

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}\sum_{l=1}^{q} y_{ijl}^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}\sum_{l=1}^{q} \hat{y_j}^2 + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}\sum_{l=1}^{q}\left(\widehat{y_{ij}} - \hat{y_j}\right)^2 + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}\sum_{l=1}^{q}\left(\widehat{y_{jl}} - \hat{y_j}\right)^2$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}\sum_{l=1}^{q}\left(y_{ijl} - \widehat{y_{ij}} - \widehat{y_{jl}} + \hat{y_j}\right)^2 \quad （式１）$$

【1】データの構造式
(1) 関連記事で基礎を確認
本冊子ですでに、【品質工学、動特性、誤差因子２つの場合がわかる】で解説していますので、確認ください。本記事は、この関連記事の中の２乗和の分解について、具体的なデータを使って計算します！
(2) データの構造式
品質工学、動特性、誤差因子１つ（繰返しあり）のデータの構造式は次の式でしたね！　繰り返しのある単回帰分析のデータの構造式と同じと考えて OK でしたね。

$$y_{ijl} = \hat{y_j} + \left(\widehat{y_{ij}} - \hat{y_j}\right) + \left(\widehat{y_{jl}} - \hat{y_j}\right) + \left(y_{ijl} - \widehat{y_{ij}} - \widehat{y_{jl}} + \hat{y_j}\right) \quad (式 2)$$

【2】実データ
実際に、下表のデータを使って、2 乗和の分解(式 1)を確認しましょう。

No	x_j	N1		N2	
		O1	O2	O1	O2
1	1	2	4	6	10
2	2	3	2	8	8
3	3	6	6	12	17
4	4	4	8	24	22
5	5	10	10	20	18
合計	15	25	30	70	75
平均	3	5	6	14	15

(1) 誤差因子 N,O の水準から見たデータ表に書き換える
上表のデータを下表のように書き換えます。N1,N2,O1,O2 はそれぞれ 10 個ずつのデータを持っています。

No	x_j	N1	N2	O1	O2	全データ	
1	1	2	6	2	4	2	6
2	2	3	8	3	2	3	8
3	3	6	12	6	6	6	12
4	4	4	24	4	8	4	24
5	5	10	20	10	10	10	20
6	1	4	10	6	10	4	10
7	2	2	8	8	8	2	8
8	3	6	17	12	17	6	17
9	4	8	22	24	22	8	22
10	5	10	18	20	18	10	18
合計	30	55	145	95	105	200	
平均	3	5.5	14.5	9.5	10.5	10	

この表を使って、回帰直線を求めていきます。

(2) データの構造式から求めたい値
データの構造式(式 2)から、
● y_{ijl} は、実データから
● $\hat{y_j}$ は、回帰直線 $\hat{y_j} = \beta x_j + \alpha$ から
● $\widehat{y_{ij}}$ は、回帰直線 $\widehat{y_{ij}} = \beta_i x_j + \alpha_i$ から
● $\widehat{y_{jl}}$ は、回帰直線 $\widehat{y_{jl}} = \beta_l x_j + \alpha_l$ から
求めることができます。よって、それぞれの回帰直線を計算から求めましょう。
(3)【重要】動特性の直線式の注意点

よく、動特性では $\hat{y_j}= \beta x_j$ と原点を通る直線で考えますが、基本は、原点通らず、y 切片が必要です。 ちゃんと２乗和の分解を計算して確認していない教科書が多すぎる

ＱＣプラネッツでは、動特性の直線式は、y=ax+b 型と表記します。

【3】回帰直線と$\hat{y}$の計算
(1) 回帰分析から計算しよう！
　回帰直線の求め方は、関連記事で解説していますので、確認しましょう。

【関連記事】回帰分析と相関係数をマスターする https://qcplanets.com/method/regression/basic/

(2) 回帰分析から計算
データを再掲します。

No	x_j	N1(y_{1j})	N2(y_{2j})	O1(y_{1j})	O2(y_{2j})	全データy_{ijl}	
1	1	2	6	2	4	2	6
2	2	3	8	3	2	3	8
3	3	6	12	6	6	6	12
4	4	4	24	4	8	4	24
5	5	10	20	10	10	10	20
6	1	4	10	6	10	4	10
7	2	2	8	8	8	2	8
8	3	6	17	12	17	6	17
9	4	8	22	24	22	8	22
10	5	10	18	20	18	10	18
合計	30	55	145	95	105	200	
平均	3	5.5	14.5	9.5	10.5	10	
No	$x_j - \bar{x}$	N1 $y_{1j} - \overline{y_{1j}}$	N2 $y_{2j} - \overline{y_{2j}}$	O1 $y_{1j} - \overline{y_{1j}}$	O2 $y_{2j} - \overline{y_{2j}}$	全データ $y_{ijl} - \bar{y}$	
1	-2	-3.5	-8.5	-7.5	-6.5	-8	-4
2	-1	-2.5	-6.5	-6.5	-8.5	-7	-2
3	0	0.5	-2.5	-3.5	-4.5	-4	2
4	1	-1.5	9.5	-5.5	-2.5	-6	14
5	2	4.5	5.5	0.5	-0.5	0	10
6	-2	-1.5	-4.5	-3.5	-0.5	-6	0
7	-1	-3.5	-6.5	-1.5	-2.5	-8	-2
8	0	0.5	2.5	2.5	6.5	-4	7
9	1	2.5	7.5	14.5	11.5	-2	12
10	2	4.5	3.5	10.5	7.5	0	8
合計	0	0	0	0	0	0	

上表から、以下が計算できます。i,j,l の添え字について、それぞれ加算する量に注意して計算しましょう。
「平方和：S_{xx}」、「●偏差積和：$S_{xy(i=1)}$, $S_{xy(i=2)}$」、「偏差積和：$S_{xy(l=1)}$, $S_{xy(l=2)}$」、「●偏差積和：S_{xy}」

●平方和 S_{xx} = $\sum_{j=1}^{5}(x_j-\bar{x})^2$=(-2)2+(-1)2+…+22=10 （5 個のデータ分に注意！）

●誤差因子 N について（10 個のデータ分に注意！）

・偏差積和 $S_{xy(i=1)}$ = $\sum_{j=1}^{5}\sum_{l=1}^{2}(x_j-\bar{x})(y_{1jl}-\overline{y_1})$=(-2)×(-3.5)+(-1)×(-2.5)+…+2×4.5=35

・偏差積和 $S_{xy(i=2)}$ = $\sum_{j=1}^{5}\sum_{l=1}^{2}(x_j-\bar{x})(y_{2jl}-\overline{y_2})$=(-2)×(-8.5)+(-1)×(-6.5)+…+2×3.5=74

●誤差因子 O について（10 個のデータ分に注意！）

・偏差積和 $S_{xy(l=1)}$ = $\sum_{j=1}^{5}\sum_{i=1}^{2}(x_j-\bar{x})(y_{ij1}-\overline{y_1})$=(-2)×(-7.5)+(-1)×(-6.5)+…+2×10.5=61

・偏差積和 $S_{xy(l=2)}$ = $\sum_{j=1}^{5}\sum_{i=1}^{2}(x_j-\bar{x})(y_{ij2}-\overline{y_2})$=(-2)×(-6.5)+(-1)×(-8.5)+…+2×7.5=48

●全体について（20 個のデータ分に注意！）

・偏差積和 S_{xy} = $\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{5}\sum_{l=1}^{2}(x_j-\bar{x})(y_{ijl}-\bar{y})$=(-2)×(-8)+(-1)×(-7)+…+2×8=109

(3) 回帰直線の導出
平方和と偏差積和が計算できたので、回帰直線が導出できます。
(A) 回帰直線$\widehat{y_{ij}}$
☆ i=1 の場合

・傾き $\beta_1 = \frac{S_{xy(i=1)}}{S_{xx}\times 2}$ =35/20=1.75　・y 切片 $\alpha_1 = \overline{y_1}-\beta_1\bar{x}$ =5.5-1.75×3=0.25　① $\widehat{y_{11}}$=0.25+1.75x_j

☆ i=2 の場合

・傾き $\beta_2 = \frac{S_{xy(i=2)}}{S_{xx}\times 2}$ =74/20=3.7　・y 切片 $\alpha_2 = \overline{y_2}-\beta_2\bar{x}$ =14.5-3.7×3=3.4　② $\widehat{y_{21}}$=3.4+13.7x_j

(B) 回帰直線$\widehat{y_{jl}}$
☆ l=1 の場合

・傾き $\beta_1 = \frac{S_{xy(l=1)}}{S_{xx}\times 2}$ =61/20=3.05　・y 切片 $\alpha_1 = \overline{y_1}-\beta_1\bar{x}$ =9.5-3.05×3=0.35　③ $\widehat{y_{11}}$=0.25+1.75x_j

☆ l=2 の場合

・傾き $\beta_2 = \frac{S_{xy(l=2)}}{S_{xx}\times 2}$ =48/20=2.4　・y 切片 $\alpha_2 = \overline{y_2}-\beta_2\bar{x}$ =10.5-2.4×3=3.3　④ $\widehat{y_{12}}$=3.3+2.4x_j

(C) 回帰直線 $\widehat{y_j}$

・傾き $\beta = \frac{S_{xy}}{S_{xx}\times 4}$ =109/40=2.725　・y 切片 $\alpha = \bar{y}-\beta\bar{x}$ =10-2.725×3=1.825　⑤ $\hat{y}$=1.825+2.725x_j

計算してわかる面白い結果は、

―	(i) i について	(ii) l について
(a) 平方和	$S_{xy(i=1)}$ (35)+ $S_{xy(i=2)}$ (74)= S_{xy} (109) と偏差積和は y=y1+y2 と分解できる！	$S_{xy(l=1)}$ (61)+ $S_{xy(l=2)}$ (48)= S_{xy} (109) と偏差積和は y=y1+y2 と分解できる！
(b) 傾き	$\frac{1}{2}(\beta_1+\beta_2)$= $\frac{1}{2}$(1.75+3.7)=2.725=β 全体の傾きは 2 本の傾きの平均とわかる！	$\frac{1}{2}(\beta_1+\beta_2)$= $\frac{1}{2}$(3.05+2.4)=2.725=β 全体の傾きは 2 本の傾きの平均とわかる！
(c) y 切片	$\frac{1}{2}(\alpha_1+\alpha_2)$= $\frac{1}{2}$×(0.25+3.4)=1.825 全体の y 切片は 2 本の直線の y 切片の平均！	$\frac{1}{2}(\alpha_1+\alpha_2)$= $\frac{1}{2}$×(0.35+3.3)=1.825 全体の y 切片は 2 本の直線の y 切片の平均！

【4】データ構造式の各項の計算

(1) 回帰直線から, $\widehat{y_{ij}}$, $\widehat{y_{jl}}$, $\widehat{y_j}$を計算

No	x	① i=1 ($\widehat{y_{1j}}$)	② i=2 ($\widehat{y_{2j}}$)	③ l=1 ($\widehat{y_{j1}}$)	④ l=2 ($\widehat{y_{j2}}$)	⑤ ALL ($\widehat{y_j}$)
1	1	2	7.1	3.4	5.7	4.55
2	2	3.75	10.8	6.45	8.1	7.275
3	3	5.5	14.5	9.5	10.5	10
4	4	7.25	18.2	12.55	12.9	12.725
5	5	9	21.9	15.6	15.3	15.45
合計	15	27.5	72.5	47.5	52.5	50
-	回帰直線	y=0.25+1.75x	y=3.4+3.7x	y=0.35+3.05x	y=3.3+2.4x	y=1.825+2.725x

(2) 各項を計算 （「$\widehat{y_j}$」、「$(\widehat{y_{ij}}-\widehat{y_j})$」、「$(\widehat{y_{jl}}-\widehat{y_j})$」、「$(y_{ijl}-\widehat{y_{ij}}-\widehat{y_{jl}}+\widehat{y_j})$」の値を求めましょう。）

x_j	N1		N2		-		
	O1	O2	O1	O2	$\widehat{y_j}$	$(\widehat{y_{ij}}-\widehat{y_j})$	
	①②④⑥	①②⑤⑦	①③④⑧	①③⑤⑨	①	②	③
1	2	4	6	10	4.55	-2.55	2.55
2	3	2	8	8	7.275	-3.525	3.525
3	6	6	12	17	10	-4.5	4.5
4	4	8	24	22	12.725	-5.475	5.475
5	10	10	20	18	15.45	-6.45	6.45
合計	25	30	70	75	50	0	
x_j	$(\widehat{y_{jl}}-\widehat{y_j})$		$(y_{ijl}-\widehat{y_{ij}}-\widehat{y_{jl}}+\widehat{y_j})$				-
	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨	-
1	-1.15	1.15	1.15	0.85	0.05	1.75	-
2	-0.825	0.825	0.075	-2.575	-1.975	-3.625	-
3	-0.5	0.5	1	0	-2	2	-
4	-0.175	0.175	-3.075	0.575	5.975	3.625	-
5	0.15	-0.15	0.85	1.15	-2.05	-3.75	-
合計	0		0				-

上表の①～⑨の各値を２乗して和を取りましょう。

x_j	N1		N2		-		
	O1	O2	O1	O2	$\widehat{y_j}$	$(\widehat{y_{ij}}-\widehat{y_j})$	
	①②④⑥	①②⑤⑦	①③④⑧	①③⑤⑨	①	②	③
1	4	16	36	100	20.70	6.50	6.50
2	9	4	64	64	52.93	12.43	12.43
3	36	36	144	289	100	20.25	20.25
4	16	64	576	484	161.93	29.98	29.98
5	100	100	400	324	238.7025	41.60	41.60
合計	2866				2297.03(計①×4)	計(②+③)×2	443.03
x_j	$(\widehat{y_{jl}}-\widehat{y_j})$		$(y_{ijl}-\widehat{y_{ij}}-\widehat{y_{jl}}+\widehat{y_j})$				-
x	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨	-
1	1.32	1.32	1.32	0.72	0.00	3.06	-
2	0.68	0.68	0.01	6.63	3.90	13.14	-
3	0.25	0.25	1	0	4	4	-
4	0.03	0.03	9.46	0.33	35.70	13.14	-
5	0.02	0.02	0.72	1.32	4.20	14.06	-
計(④+⑤)×2		9.23	計 ⑥+⑦+⑧+⑨		116.73		-

変動見ると、$S = S_{\beta} + S_{N\times\beta} + S_{O\times\beta} + S_e$ つまり、2866=2297.03+443.03+9.23+116.73　が成立しています。

(2) 中間積和が 0 になることも確認
下の式の値が 0 になることを確認しましょう。つまり、

・$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}\sum_{l=1}^{q}\widehat{y_j}\left(\widehat{y_{ij}}-\widehat{y_j}\right)=0$　　・$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}\sum_{l=1}^{q}\widehat{y_j}\left(\widehat{y_{jl}}-\widehat{y_j}\right)=0$

・$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}\sum_{l=1}^{q}\widehat{y_j}\left(y_{ijl}-\widehat{y_{ij}}-\widehat{y_{jl}}+\widehat{y_j}\right)=0$　　・$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}\sum_{l=1}^{q}\left(\widehat{y_{ij}}-\widehat{y_j}\right)\left(\widehat{y_{jl}}-\widehat{y_j}\right)=0$

・$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}\sum_{l=1}^{q}\left(\widehat{y_{ij}}-\widehat{y_j}\right)\left(y_{ijl}-\widehat{y_{ij}}-\widehat{y_{jl}}+\widehat{y_j}\right)=0$　　・$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}\sum_{l=1}^{q}\left(\widehat{y_{jl}}-\widehat{y_j}\right)\left(y_{ijl}-\widehat{y_{ij}}-\widehat{y_{jl}}+\widehat{y_j}\right)=0$

x_j	$\widehat{y_j}\left(\widehat{y_{ij}}-\widehat{y_j}\right)$				計	x_j	$\left(\widehat{y_{ij}}-\widehat{y_j}\right)\left(\widehat{y_{jl}}-\widehat{y_j}\right)$				計
1	-11.60	-11.60	11.60	11.60		1	2.93	-2.93	-2.93	2.93	
2	-25.64	-25.64	25.64	25.64		2	2.91	-2.91	-2.91	2.91	
3	-45.00	-45.00	45.00	45.00	0	3	2.25	-2.25	-2.25	2.25	0
4	-69.67	-69.67	69.67	69.67		4	0.96	-0.96	-0.96	0.96	
5	-99.65	-99.65	99.65	99.65		5	-0.97	0.97	0.97	-0.97	
x_j	$\widehat{y_j}\left(\widehat{y_{jl}}-\widehat{y_j}\right)$				計	x_j	$\left(\widehat{y_{ij}}-\widehat{y_j}\right)\left(y_{ijl}-\widehat{y_{ij}}-\widehat{y_{jl}}+\widehat{y_j}\right)$				計
1	-5.23	5.23	-5.23	5.23		1	-2.93	-2.17	0.13	4.46	
2	-6.00	6.00	-6.00	6.00		2	-0.26	9.08	-6.96	-12.78	
3	-5.00	5.00	-5.00	5.00	0	3	-4.50	0.00	-9.00	9.00	0
4	-2.23	2.23	-2.23	2.23		4	16.84	-3.15	32.71	19.85	
5	2.32	-2.32	2.32	-2.32		5	-5.48	-7.42	-13.22	-24.19	
x_j	$\widehat{y_j}\left(y_{ijl}-\widehat{y_{ij}}-\widehat{y_{jl}}+\widehat{y_j}\right.$				計	x_j	$\left(\widehat{y_{jl}}-\widehat{y_j}\right)\left(y_{ijl}-\widehat{y_{ij}}-\widehat{y_{jl}}+\widehat{y_j}\right)$				計
1	5.23	3.87	0.23	7.96		1	-1.32	0.98	-0.06	2.01	
2	0.55	-18.73	-14.37	-26.37		2	-0.06	-2.12	1.63	-2.99	
3	10.00	0.00	-20.00	20.00	0	3	-0.50	0.00	1.00	1.00	0
4	-39.13	7.32	76.03	46.13		4	0.54	0.10	-1.05	0.63	
5	13.13	17.77	-31.67	-57.94		5	0.13	-0.17	-0.31	0.56	

確かに、中間積和の項がすべて 0 になるのが確認できましたね。
実データを使って確認することも大事な勉強ですね。

以上、「品質工学、動特性、誤差因子 2 つの分解がわかる」を解説しました。

品質工学,静特性の演習問題が解ける(誤差因子１つの場合)

【1】演習問題

(1) 演習問題のポイント

ポイントは

・単純な公式代入練習ではないこと
・データの構造式から分散分析する意識をもつこと
・実験計画法も使って品質工学と実験計画法を比較しながら理解を深めること

品質工学と他の領域の手法を比較しながら解くと理解を深めることができます！やってみましょう！

(2) 演習問題

【問題】
ある機械性能を評価した。2 種類の機械の特性を測定した。温度を誤差因子Ｎとしたときのデータを下表に示す。2 種類の機械による結果を分散分析してＳＮ比を求めて比較せよ。
(1) 品質工学の静特性で解く場合（目標値を含まない場合)
(2) 品質工学の静特性で解く場合（目標値を含む場合)
(3) 実験計画法・一元配置実験で解く場合

＜データ＞

y_{ij}	機械 1						y_{ij}	機械 2					
	1	2	3	4	5	平均		1	2	3	4	5	bar
N1	41	43	39	44	43	42	N1	39	45	41	47	38	42
N2	49	50	48	52	51	50	N2	45	54	55	47	49	50
N3	54	56	55	53	52	54	N3	48	58	51	53	60	54
-						48.67	-						48.67

(3) 解法の流れ

4 つ問いがありますが、すべて同じ流れで解いていきます。

① データの構造式を立てる
② データの構造式の各項の値とその２乗を計算
③ ２乗和の分解を確かめる
④ 分散分析表を作る

では、行きます。

(4) 基礎は関連記事で確認

① 本冊子の「【初心者必見】品質工学で全変動と平方和の違いがわかる」
② 【関連記事】品質工学,静特性の変動と SN 比の注意点がわかる
https://qcplanets.com/method/robust-parameter-design/static-variance-sn-2/
③ 本冊子の「品質工学,静特性、誤差因子が 1 つの場合がわかる」

【2】品質工学の静特性で解く 1（目標値を含まない場合)

(1) データの構造式を立てる

品質工学の静特性で解く（目標値を含まない場合)場合のデータの構造式は、次式です。

$$y_{ij}=\bar{\bar{y}}+\left(\overline{y_{i\cdot}}-\bar{\bar{y}}\right)+\left(y_{ij}-\overline{y_{i\cdot}}\right)$$

実験計画法、回帰分析、品質工学は必ずデータの構造式を立てれば、公式暗記不要ですべて解けます！

(2) データの構造式の各項の値とその２乗を計算　((A) $\left(\overline{y_{i\,\cdot}}-\bar{\bar{y}}\right)^2$ (B)$\left(y_{ij}-\overline{y_{i\,\cdot}}\right)^2$)

機械 1							機械 2						
y_{ij}	1	2	3	4	5	平均	y_{ij}	1	2	3	4	5	平均
N1	41	43	39	44	43	42	N1	39	45	41	47	38	42
N2	49	50	48	52	51	50	N2	45	54	55	47	49	50
N3	54	56	55	53	52	54	N3	48	58	51	53	60	54
-						48.67	-						48.67
y_{ij}^2	1	2	3	4	5		y_{ij}^2	1	2	3	4	5	
N1	1681	1849	1521	1936	1849	計	N1	1521	2025	1681	2209	1444	計
N2	2401	2500	2304	2704	2601		N2	2025	2916	3025	2209	2401	
N3	2916	3136	3025	2809	2704	35936	N3	2304	3364	2601	2809	3600	36134
$\bar{\bar{y}}^2$	1	2	3	4	5		$\bar{\bar{y}}^2$	1	2	3	4	5	
N1	2368.44	2368.44	2368.44	2368.44	2368.44	計	N1	2368.44	2368.44	2368.44	2368.44	2368.44	計
N2	2368.44	2368.44	2368.44	2368.44	2368.44		N2	2368.44	2368.44	2368.44	2368.44	2368.44	
N3	2368.44	2368.44	2368.44	2368.44	2368.44	35526.67	N3	2368.44	2368.44	2368.44	2368.44	2368.44	35526.67
(A)	1	2	3	4	5		(A)	1	2	3	4	5	
N1	44.44	44.44	44.44	44.44	44.44	計	N1	44.44	44.44	44.44	44.44	44.44	計
N2	1.78	1.78	1.78	1.78	1.78		N2	1.78	1.78	1.78	1.78	1.78	
N3	28.44	28.44	28.44	28.44	28.44	373.33	N3	28.44	28.44	28.44	28.44	28.44	373.33
(B)	1	2	3	4	5		(B)	1	2	3	4	5	
N1	1	1	9	4	1	計	N1	9	9	1	25	16	計
N2	1	0	4	4	1		N2	25	16	25	9	1	
N3	0	4	1	1	4	36	N3	36	16	9	1	36	234

機械 1,2 は誤差因子Ｎの各水準の平均が等しいので、y_{ij}^2の和と、$\left(y_{ij}-\overline{y_{i\,\cdot}}\right)^2$の和の値がそれぞれ異なります。

(3) 2 乗和の分解を確かめる
●機械１：　35936=35526.67+373.33+36　　　　　●機械２：　36134=35526.67+373.33+234
なので、分散分析ができます。分散分析はまとめて後で比較します。

【3】品質工学の静特性で解く 2（目標値を含む場合)
(1) データの構造式を立てる
品質工学の静特性で解く（目標値を含む場合)場合のデータの構造式は、次式です

$$\left(y_{ij}-m\right)=\left(\bar{\bar{y}}-m\right)+\left(\overline{y_{i\,\cdot}}-\bar{\bar{y}}\right)+\left(y_{ij}-\overline{y_{i\,\cdot}}\right)$$

実験計画法、回帰分析、品質工学は必ずデータの構造式を立てれば、公式暗記不要ですべて解けます！

(2) 目標値によって、分散分析の結果が変わる<
目標値をいくらにするかによって、分散分析の結果が変わってきます。そこで、2 例用意してみましょう。
●平均値に近い m=60 の場合
●平均値から遠い m=200 の場合
数値が変わっても解き方は同じです。

(3) データの構造式の各項の値とその 2 乗を計算

① 目標値 m=60 の場合　((A) $\left(\overline{y_{i\,\cdot}}-\bar{\bar{y}}\right)^2$ (B)$\left(y_{ij}-\overline{y_{i\,\cdot}}\right)^2$)

機械 1							機械 2						
y_{ij}	1	2	3	4	5	平均	y_{ij}	1	2	3	4	5	平均
N1	41	43	39	44	43	42	N1	39	45	41	47	38	42
N2	49	50	48	52	51	50	N2	45	54	55	47	49	50
N3	54	56	55	53	52	54	N3	48	58	51	53	60	54
-						48.67	-						48.67
y_{ij}^2	1	2	3	4	5	計	y_{ij}^2	1	2	3	4	5	計
N1	361	289	441	256	289		N1	441	225	361	169	484	
N2	121	100	144	64	81		N2	225	36	25	169	121	
N3	36	16	25	49	64	2336	N3	144	4	81	49	0	2534
$\bar{\bar{y}}^2$	1	2	3	4	5	計	$\bar{\bar{y}}^2$	1	2	3	4	5	計
N1	128.44	128.44	128.44	128.44	128.44		N1	128.44	128.44	128.44	128.44	128.44	
N2	128.44	128.44	128.44	128.44	128.44		N2	128.44	128.44	128.44	128.44	128.44	
N3	128.44	128.44	128.44	128.44	128.44	1926.67	N3	128.44	128.44	128.44	128.44	128.44	1926.67
(A)	1	2	3	4	5	計	(A)	1	2	3	4	5	計
N1	44.44	44.44	44.44	44.44	44.44		N1	44.44	44.44	44.44	44.44	44.44	
N2	1.78	1.78	1.78	1.78	1.78		N2	1.78	1.78	1.78	1.78	1.78	
N3	28.44	28.44	28.44	28.44	28.44	373.33	N3	28.44	28.44	28.44	28.44	28.44	373.33
(B)	1	2	3	4	5	計	(B)	1	2	3	4	5	計
N1	1	1	9	4	1		N1	9	9	1	25	16	
N2	1	0	4	4	1		N2	25	16	25	9	1	
N3	0	4	1	1	4	36	N3	36	16	9	1	36	234

②目標値 m=200 の場合　((A) $\left(\overline{y_{i\cdot}}-\bar{\bar{y}}\right)^2$ (B)$\left(y_{ij}-\overline{y_{i\cdot}}\right)^2$)

機械 1							機械 2						
y_{ij}	1	2	3	4	5	平均	y_{ij}	1	2	3	4	5	平均
N1	41	43	39	44	43	42	N1	39	45	41	47	38	42
N2	49	50	48	52	51	50	N2	45	54	55	47	49	50
N3	54	56	55	53	52	54	N3	48	58	51	53	60	54
-						48.67	-						48.67
y_{ij}^2	1	2	3	4	5	計	y_{ij}^2	1	2	3	4	5	計
N1	25281	24649	25921	24336	24649		N1	25921	24025	25281	23409	26244	
N2	22801	22500	23104	21904	22201		N2	24025	21316	21025	23409	22801	
N3	21316	20736	21025	21609	21904	343936	N3	23104	20164	22201	21609	19600	344134
$\bar{\bar{y}}^2$	1	2	3	4	5	計	$\bar{\bar{y}}^2$	1	2	3	4	5	計
N1	22901.78	22901.78	22901.78	22901.78	22901.78		N1	22901.78	22901.78	22901.78	22901.78	22901.78	
N2	22901.78	22901.78	22901.78	22901.78	22901.78		N2	22901.78	22901.78	22901.78	22901.78	22901.78	
N3	22901.78	22901.78	22901.78	22901.78	22901.78	343526.67	N3	22901.78	22901.78	22901.78	22901.78	22901.78	343526.67
(A)	1	2	3	4	5	計	(A)	1	2	3	4	5	計
N1	44.44	44.44	44.44	44.44	44.44		N1	44.44	44.44	44.44	44.44	44.44	
N2	1.78	1.78	1.78	1.78	1.78		N2	1.78	1.78	1.78	1.78	1.78	
N3	28.44	28.44	28.44	28.44	28.44	373.33	N3	28.44	28.44	28.44	28.44	28.44	373.33
(B)	1	2	3	4	5	計	(B)	1	2	3	4	5	計
N1	1	1	9	4	1		N1	9	9	1	25	16	
N2	1	0	4	4	1		N2	25	16	25	9	1	
N3	0	4	1	1	4	36	N3	36	16	9	1	36	234

$\left(y_{ij}-m\right)^2$と$(\bar{\bar{y}}-m)^2$の値が 目標値 m の値が大きいために m=60 の場合より大きな値になっており、誤差分散との比がかなり開くようになってしまいます。

> 理論を忠実に式にすると
>
> $$\left(y_{ij}-m\right)=(\bar{\bar{y}}-m)+\left(\overline{y_{i}\,.}-\bar{\bar{y}}\right)+\left(y_{ij}-\overline{y_{i}\,.}\right)$$
>
> とすべきですが、目標値と実データに大きな差があると分散分析の結果の妥当性が下がるので、
>
> $$y_{ij}=\bar{\bar{y}}+\left(\overline{y_{i}\,.}-\bar{\bar{y}}\right)+\left(y_{ij}-\overline{y_{i}\,.}\right)$$
>
> として、簡略化しているような背景があると感じます。

(4) 2 乗和の分解を確かめる

① 目標値 m=60 の場合

●機械１： 2336=1926.67+373.33+36 　　●機械２： 2534=1926.67+373.33+234

なので、分散分析ができます。分散分析はまとめて後で比較します。

②目標値 m=200 の場合

●機械１： 343936=343526.67+373.33+36 　　●機械２： 344134=343526.67+373.33+234

なので、分散分析ができます。分散分析はまとめて後で比較します。

【4】実験計画法・一元配置実験で解く

(1) データの構造式を立てる

データからＮが１因子である実験計画法の一元配置実験ですね。データの構造式は、次式のとおりです。

$$\left(y_{ij}-\bar{\bar{y}}\right)=\left(\overline{y_{i}\,.}-\bar{\bar{y}}\right)+\left(y_{ij}-\overline{y_{i}\,.}\right)$$

(2) データの構造式の各項の値とその２乗を計算

計算すると下表になります。実際に解いてみてください。

機械 1							機械 2						
y_{ij}	1	2	3	4	5	平均	y_{ij}	1	2	3	4	5	平均
N1	41	43	39	44	43	42	N1	39	45	41	47	38	42
N2	49	50	48	52	51	50	N2	45	54	55	47	49	50
N3	54	56	55	53	52	54	N3	48	58	51	53	60	54
-						48.67	-						48.67
$\left(y_{ij}-\bar{\bar{y}}\right)$	1	2	3	4	5	計	$\left(y_{ij}-\bar{\bar{y}}\right)$	1	2	3	4	5	計
N1	58.78	32.11	93.44	21.78	32.11		N1	93.44	13.44	58.78	2.78	113.78	
N2	0.11	1.78	0.44	11.11	5.44		N2	13.44	28.44	40.11	2.78	0.11	
N3	28.44	53.78	40.11	18.78	11.11	409.33	N3	0.44	87.11	5.44	18.78	128.44	607.33
$\left(\overline{y_{i}\,.}-\bar{\bar{y}}\right)$	1	2	3	4	5	計	$\left(\overline{y_{i}\,.}-\bar{\bar{y}}\right)$	1	2	3	4	5	計
N1	44.44	44.44	44.44	44.44	44.44		N1	44.44	44.44	44.44	44.44	44.44	
N2	1.78	1.78	1.78	1.78	1.78		N2	1.78	1.78	1.78	1.78	1.78	
N3	28.44	28.44	28.44	28.44	28.44	373.33	N3	28.44	28.44	28.44	28.44	28.44	373.33
$\left(y_{ij}-\overline{y_{i}\,.}\right)$	1	2	3	4	5	計	$\left(y_{ij}-\overline{y_{i}\,.}\right)$	1	2	3	4	5	計
N1	1	1	9	4	1		N1	9	9	1	25	16	
N2	1	0	4	4	1		N2	25	16	25	9	1	
N3	0	4	1	1	4	36	N3	36	16	9	1	36	234

上表を見ると、機械１，２は因子Ｎの各水準の平均が等しいので、

$\left(y_{ij}-\bar{\bar{y}}\right)^2$の和と、$\left(y_{ij}-\overline{y_{i}\,.}\right)^2$の和の値が異なることが分かります。

(3) 2 乗和の分解を確かめる
●機械１： 409.33=373.33+36　　　　　　　　●機械２： 607.33=373.33+234
なので、分散分析ができます。分散分析はまとめて後で比較します。

【5】結果を比較
4 つのケースを分散分析表にまとめると、値が異なることがよくわかります。

-	機械 1				機械 2			
	品質工学			実験計画法	品質工学			実験計画法
	m なし				m なし			
Sm	35526.67	1926.67	343526.67	373.33	35526.67	1926.67	343526.67	373.33
SN	373.33	373.33	373.33	-	373.33	373.33	373.33	-
Se	36	36	36	36	234	234	234	234
S	35936	2336	343936	409.33	36134	2534	344134	607.33
SN 比 =Sm/Se	986.85	53.52	9542.41	10.37	151.82	8.23	1468.06	1.6

SN 比=Sm/Se とすると、同じデータでも仮定したデータの構造式によって
SN 比が機械 1 では、10～9500、機械 2 では 8～1500 程度変化することがわかります。

データの構造式をどう定義するかを SN 比から見て確認することも大事です。

また、機械 1 と機械 2 においては機械 2 の方がデータのばらつきが大きい分、
SN 比が機械 1 と機械 2 で若干の差が出ていることが分かります。
でも、SN 比の値が仮定したデータの構造式によって随分大きく変わる方の影響が大きいので、機械 1 と機械 2 の差が見えにくいですね。静特性の例題を使って、実際に丁寧に計算するといろいろわかりますね。

以上、「品質工学,静特性の演習問題が解ける(誤差因子 1 つの場合)」を解説しました。

品質工学,静特性の演習問題が解ける(誤差因子２つの場合)

【1】演習問題

(1) 演習問題

ある機械性能を評価した。２種類の機械の特性を測定した。物理特性を因子Ｎ、Ｏ としたときのデータを下表に示す。2 種類の機械による結果を分散分析してＳＮ比を求めて比較せよ。
(1) 品質工学の静特性で解く場合（目標値を含まない場合)
(2) 品質工学の静特性で解く場合（目標値を含む場合)
(3) 実験計画法・二元配置実験で解く場合

＜データ＞

機械 1					機械 2				
y_{ij}	O1	O2	O3	平均 N	y_{ij}	O1	O2	O3	bar
N1	11.6	12.2	12.5	12.1	N1	12.8	13.5	14.3	13.53
N2	10.8	11.1	11.5	11.13	N2	11.2	12.8	13.8	12.6
平均 O	11.2	11.65	12	11.62	平均 O	12	13.15	14.05	13.07

(2) 解法の流れ

4 つ問いがありますが、すべて同じ流れで解いていきます。

① データの構造式を立てる
② データの構造式の各項の値とその２乗を計算
③ ２乗和の分解を確かめる
④ 分散分析表を作る

では、行きます。

(3) 基礎は関連記事で確認

① 本冊子の「【初心者必見】品質工学で全変動と平方和の違いがわかる」
② 【関連記事】品質工学,静特性の変動と SN 比の注意点がわかる
https://qcplanets.com/method/robust-parameter-design/static-variance-sn-2/
③ 本冊子の「品質工学,静特性、誤差因子が 1 つの場合がわかる」

【2】品質工学の静特性で解く 1（目標値を含まない場合)

(1) データの構造式を立てる

品質工学の静特性で解く（目標値を含まない場合)場合のデータの構造式は、次式です。

$$y_{ij}=\bar{\bar{y}}+\left(\overline{y_{i\cdot}}-\bar{\bar{y}}\right)+\left(\overline{y_{\cdot j}}-\bar{\bar{y}}\right)+\left(y_{ij}-\overline{y_{i\cdot}}-\overline{y_{\cdot j}}+\bar{\bar{y}}\right) \quad (式 1)$$

実験計画法、回帰分析、品質工学は必ずデータの構造式を立てれば、公式暗記不要ですべて解けます！

(2) データの構造式の各項の値とその２乗を計算

計算すると下表になります。実際に解いてみてください。

機械 1					機械 2				
y_{ij}	O1	O2	O3	平均 N	y_{ij}	O1	O2	O3	bar
N1	11.6	12.2	12.5	12.1	N1	12.8	13.5	14.3	13.53
N2	10.8	11.1	11.5	11.13	N2	11.2	12.8	13.8	12.6
平均 O	11.2	11.65	12	11.62	平均 O	12	13.15	14.05	13.07
y_{ij}^2	O1	O2	O3	計	y_{ij}^2	O1	O2	O3	計
N1	134.56	148.84	156.25	811.75	N1	163.84	182.25	204.49	1030.30
N2	116.64	123.21	132.25		N2	125.44	163.84	190.44	
$\bar{\bar{y}}^2$	O1	O2	O3	計	$\bar{\bar{y}}^2$	O1	O2	O3	計
N1	134.95	134.95	134.95	809.68	N1	170.74	170.74	170.74	1024.43
N2	134.95	134.95	134.95		N2	170.74	170.74	170.74	
(A)	O1	O2	O3	計	(A)	O1	O2	O3	計
N1	0.23	0.23	0.23	1.40	N1	0.22	0.22	0.22	1.31
N2	0.23	0.23	0.23		N2	0.22	0.22	0.22	
(B)	O1	O2	O3	計	(B)	O1	O2	O3	計
N1	0.17	0.00	0.15	0.64	N1	1.14	0.01	0.97	4.22
N2	0.17	0.00	0.15		N2	1.14	0.01	0.97	
(C)	1	2	3	計	(C)	1	2	3	計
N1	0.01	0.00	0.00	0.02	N1	0.11	0.01	0.05	0.34
N2	0.01	0.00	0.00		N2	0.11	0.01	0.05	

((A) $\left(\overline{y_{i\cdot}}-\bar{\bar{y}}\right)^2$ (B) $\left(\overline{y_{\cdot j}}-\bar{\bar{y}}\right)^2$ (C) $\left(y_{ij}-\overline{y_{i\cdot}}-\overline{y_{\cdot j}}+\bar{\bar{y}}\right)^2$)

機械 1 と機械 2 では、機械 2 の方がデータのばらつきが多いことが分かります。

(3) 2 乗和の分解を確かめる

2 乗和の分解を確かめると、

●機械 1： 811.75=809.68+1.40+0.64+0.02

●機械 2： 1030.30=1024.43+1.31+4.22+0.34

なので、分散分析ができます。分散分析はまとめて後で比較します。

【3】品質工学の静特性で解く 2（目標値を含む場合）

(1) データの構造式を立てる

品質工学の静特性で解く（目標値を含む場合)場合のデータの構造式は、(式 1)です。

(2) 目標値によって、分散分析の結果が変わる

目標値をいくらにするかによって、分散分析の結果が変わってきますが、今回は平均値に近い 12 を選択します。（別に目標値はいくらにしても構いません）

(3) データの構造式の各項の値とその 2 乗を計算

機械 1					機械 2				
y_{ij}	O1	O2	O3	平均 N	y_{ij}	O1	O2	O3	bar
N1	11.6	12.2	12.5	12.1	N1	12.8	13.5	14.3	13.53
N2	10.8	11.1	11.5	11.13	N2	11.2	12.8	13.8	12.6
平均 O	11.2	11.65	12	11.62	平均 O	12	13.15	14.05	13.07
y_{ij}^2	O1	O2	O3	計	y_{ij}^2	O1	O2	O3	計
N1	0.16	0.04	0.25	2.95	N1	0.64	2.25	5.29	12.70
N2	1.44	0.81	0.25		N2	0.64	0.64	3.24	
$\bar{\bar{y}}^2$	O1	O2	O3	計	$\bar{\bar{y}}^2$	O1	O2	O3	計
N1	0.15	0.15	0.15	0.88	N1	1.14	1.14	1.14	6.83
N2	0.15	0.15	0.15		N2	1.14	1.14	1.14	
(A)	O1	O2	O3	計	(A)	O1	O2	O3	計
N1	0.23	0.23	0.23	1.40	N1	0.22	0.22	0.22	1.31
N2	0.23	0.23	0.23		N2	0.22	0.22	0.22	
(B)	O1	O2	O3	計	(B)	O1	O2	O3	計
N1	0.17	0.00	0.15	0.64	N1	1.14	0.01	0.97	4.22
N2	0.17	0.00	0.15		N2	1.14	0.01	0.97	
(C)	1	2	3	計	(C)	1	2	3	計
N1	0.01	0.00	0.00	0.02	N1	0.11	0.01	0.05	0.34
N2	0.01	0.00	0.00		N2	0.11	0.01	0.05	

((A) $\left(\overline{y_{i\cdot}}-\bar{\bar{y}}\right)^2$ (B) $\left(\overline{y_{\cdot j}}-\bar{\bar{y}}\right)^2$ (C) $\left(y_{ij}-\overline{y_{i\cdot}}-\overline{y_{\cdot j}}+\bar{\bar{y}}\right)^2$)

理論を忠実に式にすると

$$\left(y_{ij}-m\right)=(\bar{\bar{y}}-m)+\left(\overline{y_{i\cdot}}-\bar{\bar{y}}\right)+\left(\overline{y_{\cdot j}}-\bar{\bar{y}}\right)+\left(y_{ij}-\overline{y_{i\cdot}}-\overline{y_{\cdot j}}+\bar{\bar{y}}\right)$$

とすべきですが、目標値と実データに大きな差があると分散分析の結果の妥当性が下がるので、

$$y_{ij}=\bar{\bar{y}}+\left(\overline{y_{i\cdot}}-\bar{\bar{y}}\right)+\left(\overline{y_{\cdot j}}-\bar{\bar{y}}\right)+\left(y_{ij}-\overline{y_{i\cdot}}-\overline{y_{\cdot j}}+\bar{\bar{y}}\right)$$

として、簡略化しているような背景があると感じます。

(4) 2 乗和の分解を確かめる
2 乗和の分解を確かめると、
●機械 1： 2.95=0.88+1.40+0.64+0.02
●機械 2： 12.70=6.83+1.31+4.22+0.34
なので、分散分析ができます。分散分析はまとめて後で比較します。

【4】実験計画法・一元配置実験で解く
(1) データの構造式を立てる
データをよく見ると、N,O の 2 因子から成る実験計画法の二元配置実験ですよね。
実験計画法・一元配置実験のデータの構造式は、次式です。

$$\left(y_{ij}-\bar{\bar{y}}\right)=\left(\overline{y_{i\cdot}}-\bar{\bar{y}}\right)+\left(\overline{y_{\cdot j}}-\bar{\bar{y}}\right)+\left(y_{ij}-\overline{y_{i\cdot}}-\overline{y_{\cdot j}}+\bar{\bar{y}}\right) \quad \text{(式 2)}$$

(2) データの構造式の各項の値とその 2 乗を計算
計算すると下表になります。実際に解いてみてください。

機械 1					機械 2				
y_{ij}	O1	O2	O3	平均 N	y_{ij}	O1	O2	O3	bar
N1	11.6	12.2	12.5	12.1	N1	12.8	13.5	14.3	13.53
N2	10.8	11.1	11.5	11.13	N2	11.2	12.8	13.8	12.6
平均 O	11.2	11.65	12	11.62	平均 O	12	13.15	14.05	13.07
(A)	O1	O2	O3	計	(A)	O1	O2	O3	計
N1	0.00	0.34	0.78	2.07	N1	0.07	0.19	1.52	5.87
N2	0.67	0.27	0.01		N2	3.48	0.07	0.54	
(B)	O1	O2	O3	計	(B)	O1	O2	O3	計
N1	0.23	0.23	0.23	1.40	N1	0.22	0.22	0.22	1.31
N2	0.23	0.23	0.23		N2	0.22	0.22	0.22	
(C)	O1	O2	O3	計	(C)	O1	O2	O3	計
N1	0.17	0.00	0.15	0.64	N1	1.14	0.01	0.97	4.22
N2	0.17	0.00	0.15		N2	1.14	0.01	0.97	
(D)	1	2	3	計	(D)	1	2	3	計
N1	0.01	0.00	0.00	0.02	N1	0.11	0.01	0.05	0.34
N2	0.01	0.00	0.00		N2	0.11	0.01	0.05	

((A) $\left(y_{ij}-\bar{\bar{y}}\right)$、(B) $\left(\overline{y_{i\cdot}}-\bar{\bar{y}}\right)$、(C) $\left(\overline{y_{\cdot j}}-\bar{\bar{y}}\right)$、(D) $\left(y_{ij}-\overline{y_{i\cdot}}-\overline{y_{\cdot j}}+\bar{\bar{y}}\right)$)

(3) 2 乗和の分解を確かめる
2 乗和の分解を確かめると、
●機械 1： 2.07=1.40+0.64+0.02
●機械 2： 5.87=1.31+4.22+0.34
なので、分散分析ができます。分散分析はまとめて後で比較します。

【5】結果を比較
3 つのケースを分散分析表にまとめると、値が異なることがよくわかります。

-	機械 1			機械 2		
	m なし	m あり	DOE	m なし	m あり	DOE
S	809.68	0.88	ー	1024.43	6.83	ー
SN	1.40	1.40	1.40	1.31	1.31	1.31
SO	0.64	0.64	0.64	4.22	4.22	4.22
Se	0.02	0.02	0.02	0.34	0.34	0.34
S	811.75	2.95	2.07	1030.30	12.70	5.87
SN 比	34700.64	37.79	27.57	2983.77	19.88	12.30
	(S/Se)	(S/Se)	(SN/Se)	(S/Se)	(S/Se)	(SN/Se)

SN 比=S/Se(実験計画法ではあえて、SO/Se とします)とすると、同じデータでも仮定したデータの構造式によって、SN 比が機械 1 では、30～35000、機械 2 では 10～3000 程度変化することがわかります。

おそらく、変動 S がデータy_{ij}そのものの 2 乗を誤差 Se で割ると、桁が大きすぎるので、SN 比は log を取る習慣ができたのでしょうね。だったら、平均で差し引いたものを変動 S とすればいいと考えます。

以上、「品質工学,静特性の演習問題が解ける(誤差因子 2 つの場合)」を解説しました。

【1】演習問題

(1) 演習問題のポイント

① 単純な公式代入練習ではないこと
② データの構造式から分散分析する意識をもつこと
③ 回帰分析も使って品質工学と比較しながら理解を深めること

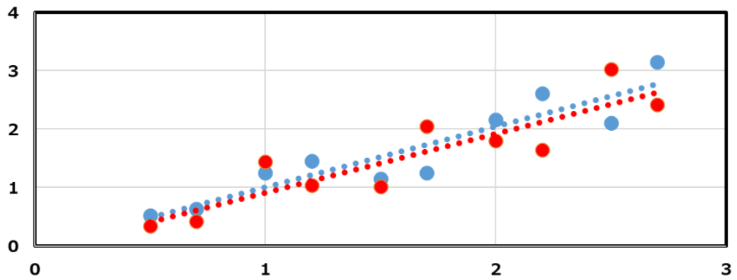
品質工学と他の領域の手法を比較する例はＱＣプラネッツオリジナルですね。でも比較しながら解くと理解を深めることができます！やってみましょう！

(2) 演習問題

同じ測定器が 2 台あり、それぞれの性能を評価した。計測したい長さの期待値x_jに対して、実測結果y_jが下表になった。当然、理想はy_j=1×x_jの直線としたいが、ずれはある。どちらの測定器がよいか傾き β と SN 比などから評価したい。
(1) 各測定器結果の回帰直線と寄与率 R と回帰分析における分散分析を求めよ。
(2) 品質工学の動特性から直線、分散分析、SN 比を求めよ。

＜データ＞

No	–	測定器1	測定器2
	xj	yj	yj
1	0.5	0.52	0.34
2	0.7	0.64	0.42
3	1	1.25	1.44
4	1.2	1.45	1.04
5	1.5	1.15	1.02
6	1.7	1.25	2.05
7	2	2.16	1.8
8	2.2	2.61	1.64
9	2.5	2.11	3.02
10	2.7	3.15	2.42



(3) 解法の流れ

4 つ問いがありますが、すべて同じ流れで解いていきます。

① データの構造式を立てる
② データの構造式の各項の値とその 2 乗を計算
③ 2 乗和の分解を確かめる
④ 分散分析表を作る

(4) 基礎は関連記事で確認

● 本冊子 「【初心者必見】品質工学で全変動と平方和の違いがわかる」
● 関連記事「品質工学,静特性の変動と SN 比の注意点がわかる」
https://qcplanets.com/method/robust-parameter-design/static-variance-sn/
● 本冊子 「品質工学の動特性は回帰分析と同じ(その 1)」
● 本冊子 「品質工学の動特性は回帰分析と同じ(その 2)」
● 本冊子 「品質工学、動特性、誤差因子 1 つの場合がわかる」
● 本冊子 「品質工学,動特性の理想直線は原点通らなくて OK な理由がわかる」

【2】回帰分析で解く

(1) データの構造式を立てる

品質工学の動特性で解く場合のデータの構造式は次式です。

$$\left(y_{ij}-\bar{\bar{y}}\right)=\left(\widehat{y_{i\cdot}}-\bar{\bar{y}}\right)+\left(y_{ij}-\widehat{y_{i\cdot}}\right) \quad (式1)$$

(2) データの構造式の各項の値とその2乗を計算

計算すると下表になります。実際に解いてみてください。

測定器1			⑥	①	②	③	④	⑤	⑦	⑧	⑨
No	x_j	y_j	*	*	*	*	*	*	y_j^2	*	*
1	0.5	0.52	0.480	-1.1	-1.109	1.21	1.220	1.230	0.270	0.231	0.002
2	0.7	0.64	0.689	-0.9	-0.989	0.81	0.890	0.978	0.410	0.475	0.002
3	1	1.25	1.002	-0.6	-0.379	0.36	0.227	0.144	1.563	1.005	0.061
4	1.2	1.45	1.211	-0.4	-0.179	0.16	0.072	0.032	2.103	1.467	0.057
5	1.5	1.15	1.525	-0.1	-0.479	0.01	0.048	0.229	1.323	2.324	0.140
6	1.7	1.25	1.733	0.1	-0.379	0.01	-0.038	0.144	1.563	3.005	0.234
7	2	2.16	2.047	0.4	0.531	0.16	0.212	0.282	4.666	4.189	0.013
8	2.2	2.61	2.256	0.6	0.981	0.36	0.589	0.962	6.812	5.088	0.126
9	2.5	2.11	2.569	0.9	0.481	0.81	0.433	0.231	4.452	6.599	0.211
10	2.7	3.15	2.778	1.1	1.521	1.21	1.673	2.313	9.923	7.716	0.139
計	16	16.290	16.290	0	0	5.1	5.326	6.546	33.082	32.098	0.984
平均	1.6	1.629	1.629	0	0	↑S_{xx}	↑S_{xy}	↑S_{yy}	↑S	↑S_m	↑S_e

（＊：① $x_j-\bar{x}$ ② $y_j-\bar{y}$ ③ $\left(x_j-\bar{x}\right)^2$ ④ $\left(x_j-\bar{x}\right)\left(y_j-\bar{y}\right)$ ⑤ $\left(y_j-\bar{y}\right)^2$ ⑥ $\widehat{y_{j\cdot}}$ ⑨ $\left(y_j-\widehat{y_{j\cdot}}\right)^2$）

測定器2			⑥	①	②	③	④	⑤	⑦	⑧	⑨
No	x_j	y_j	*	*	*	*	*	*	y_j^2	*	*
1	0.5	0.34	0.407	-1.1	-1.179	1.21	1.297	1.390	0.116	0.166	0.005
2	0.7	0.42	0.609	-0.9	-1.099	0.81	0.989	1.208	0.176	0.371	0.036
3	1	1.44	0.913	-0.6	-0.079	0.36	0.047	0.006	2.074	0.833	0.278
4	1.2	1.04	1.115	-0.4	-0.479	0.16	0.192	0.229	1.082	1.243	0.006
5	1.5	1.02	1.418	-0.1	-0.499	0.01	0.050	0.249	1.040	2.011	0.158
6	1.7	2.05	1.620	0.1	0.531	0.01	0.053	0.282	4.203	2.625	0.185
7	2	1.8	1.923	0.4	0.281	0.16	0.112	0.079	3.240	3.699	0.015
8	2.2	1.64	2.125	0.6	0.121	0.36	0.073	0.015	2.690	4.518	0.236
9	2.5	3.02	2.429	0.9	1.501	0.81	1.351	2.253	9.120	5.899	0.350
10	2.7	2.42	2.631	1.1	0.901	1.21	0.991	0.812	5.856	6.921	0.044
計	16	15.190	15.190	0	0	5.1	5.155	6.523	29.597	28.284	1.312
平均	1.6	1.519	1.519	0	0	↑S_{xx}	↑S_{xy}	↑S_{yy}	↑S	↑S_m	↑S_e

（＊：① $x_j-\bar{x}$ ② $y_j-\bar{y}$ ③ $\left(x_j-\bar{x}\right)^2$ ④ $\left(x_j-\bar{x}\right)\left(y_j-\bar{y}\right)$ ⑤ $\left(y_j-\bar{y}\right)^2$ ⑥ $\widehat{y_{j\cdot}}$ ⑨ $\left(y_j-\widehat{y_{j\cdot}}\right)^2$）

上表の①から⑧は計算順に並べています。
●まず、各データと平均の差をとる（①②）
●それの積や２乗を作って、変動 S を計算する(③④⑤)
●回帰直線上のデータを計算(⑥)
●品質工学の動特性に必要な変動を計算(⑦⑧⑨)
の流れで計算しています。

(3) 回帰直線と寄与率 R と分散分析を求める
上の表から必要な情報を抜き出しましょう。せっかくなので、実際に計算してみてくださいね。
① 回帰直線

●傾き $\beta = \frac{S_{xy}}{S_{xx}}$

●y 切片 α： $\bar{y}= \beta\bar{x}+\alpha$ より、

●測定器 1：y=1.044x-0.0419

●測定器 2：y=1.011x-0.0983

となります。

傾きだけ評価すると、測定器２の方が理想の傾き１に近いですね。

②寄与率 R

R = $\frac{S_{xy}^2}{S_{xx}S_{yy}}$ より、

●測定器 1：R=$\frac{5.155^2}{5.1\times 6.546}$=0.850

●測定器 2：R=$\frac{5.155^2}{5.1\times 6.523}$=0.780

となります。

③分散分析
回帰における分散分析は、次式で計算できますね。よって分散分析表は、

・$S_T=S_{yy}$

・$S_R=\frac{S_{xy}^2}{S_{xx}}$

・$S_{er} = S_T - S_R$

-	計測器 1	計測器 2
S_R	5.56	5.21
S_{er}	0.98	1.31
S_T	6.55	6.52

と一通り計算できますね。では、回帰分析と品質工学の動特性の違いを見ながら、次を解説します。

【3】品質工学の動特性で解く
(1) データの構造式を立てる
品質工学の動特性で解く場合のデータの構造式は、(式 2)です。

$y_{ij} = \widehat{y_{i}.} + \left(y_{ij} - \widehat{y_{i}.}\right)$ (式 2)

回帰分析と比較するとシンプルですね。

●回帰分析： $\left(y_{ij} - \bar{\bar{y}}\right) = \left(\widehat{y_{i}.} - \bar{\bar{y}}\right) + \left(y_{ij} - \widehat{y_{i}.}\right)$ (式 1)

●動特性： $y_{ij} = \widehat{y_{i}.} + \left(y_{ij} - \widehat{y_{i}.}\right)$ (式 2)

$\bar{\bar{y}}$の有無に差があります。実験計画法、回帰分析、品質工学は必ずデータの構造式を立てて考えます。

(2) 品質工学の動特性から直線、分散分析、SN 比を求める

①理想直線

「直線は実は、回帰直線と同じで OK です」

理想直線(回帰直線)は以下となります。

●測定器 1：y=1.044x-0.0419　　●測定器 2：y=1.011x-0.0983

②分散分析（再掲）

S	S_{xx}	S_{xy}	S_{yy}	S	S_m	S_e
測定器 1	5.1	5.326	6.546	33.082	32.098	0.984
測定器 2	5.1	5.155	6.523	29.597	28.284	1.312

$\bar{y}$ を引いた分の効果がないだけ、回帰分析の変動の値より大きい値になります。

③ SN 比($\eta=\frac{S_m}{S_e}$)

●測定器 1：　η=32.62　　●測定器 2：　η=21.55

となります。

傾きが 1 に近いのは測定器 2 でしたが、SN 比は測定器 1 の方が高いので、SN 比を優先するなら、
測定器 1 を使うべきという判断になります。

【4】結果を比較

回帰分析と品質工学の動特性の　直線、変動　SN 比を比較します。

(1) 直線

回帰直線と品質工学の理想直線は同じでよいので、

回帰直線は

●測定器 1：y=1.044x-0.0419

●測定器 2：y=1.011x-0.0983

となります。

(2) 分散分析と SN 比

下表にまとめます。

回帰	測定器 1	測定器 2	動特性	測定器 1	測定器 2
S_R	5.56	5.21	S_m	32.098	28.284
S_{er}	0.98	1.31	S_e	0.984	1.312
S_T	6.54	6.52	S	33.082	29/596
SN 比	5.67	3.98	SN 比	32.62	21.56

演習問題の問いは、

演習問題の問いは、理想直線の傾きが 1 に近く、SN 比の大きい方はどれかという問いでしたから、あとは数字から判断しましょう。

以上、「品質工学_動特性(誤差因子なし)の演習問題が解ける」を解説しました。

品質工学、ここがわからない！と思ったら読んで!

【1】2 段階設計でばらつきを先に考える理由
品質工学のオリジナリティがある 2 段階設計つまり、

① ばらつき低減してから ② 目標値を狙う

ばらつきを先に考えるのが品質工学の良さとか言っているけど、何で逆じゃないの？と思いませんか？

これ、理由は簡単です。

データの構造式を立てた後、各項を２乗して和を取って分散分析しますよね。 分散を評価する分散分析している段階で、最初にばらつきからチェックしているんですよ！ ばらつきを先に考えるのは品質工学オリジナルの考え方ではないです。

実験計画法や回帰分析も品質工学のように、最初にばらつきを評価しているんですよね！

【2】因子の種類が多い理由
いろいろな種類の因子がありますが、覚えますか？

・制御因子 ・誤差因子 ・信号因子 ・標示因子 ・ブロック因子 因子の種類は覚えなくてＯＫ！むしろデータの構造式をどう定義する方がはるかに大事！

計算機が未熟な時代は、手計算でそこそこの結果がほしいので因子を区別していたんでしょうけど、今の時代は計算できるので、モデル式をどう定義するかの方が重要です。品質工学独特な因子があると、実験計画法や回帰分析と比較しにくくなるため、解析結果の妥当性が見えにくくなります。
今の時代に合わないと考えます。

【3】混合系直交表をよく使う理由<

これが一番わからない！ 別に一般の直交表を使えばいいし、データの構造式によって使うべき直交表が決まるので、直交表ありきはおかしい。先にデータを特徴づけるデータの構造式を立てる方が大事

混合系を使う理由は、交互作用を避けたい理由であることは理解できますが、そもそもデータを構成する要因は互いに影響し合うので、交互作用は必ずあります。それを省くモデルを使って混合系直交表で解析するのは違和感があります。

また、混合系直交表は直交表の中でも突然変異みたいに、たまたま見つかった直交表なので、データの構造式をベースとする L8,L16,L27 などの一般直交表を使った方がよいでしょう。直交表を自分で作ると L12,L18 などの混合系直交表は特殊なものであるとよくわかります。直交表作ってみてください。

【4】品質工学の教科書が理解しにくい理由
過去の偉い先生の教科書の流れと合わせようとする同調圧力を感じます。偉い先生であっても、時代は変化しています。今のＡＩや成熟した計算機を使って解析する我々の価値観と合わない教科書を勉強しても理解しにくい理由がここにあります。

確かに、昔は１つのデータを取るのが、非常に手間であり、手計算でどうにかした方が速かったですが、今は、まったく逆です。データがあり、モデル式を立ててから、仮説を十分に立ててから実験で確かめる時代です。今の時代に合う考え方で品質工学を再定義したいですよね。

【5】品質工学で大事なこと

QC プラネッツは、以下のように考えています。

①　単元手法によらず１つの解法でできること
②　実験計画法や回帰分析と同様にデータの構造式がベース
③　データの構造式の各項の２乗和が一致することを確かめること
④　分散分析を先に行うのでばらつきを先に評価することを理解すること
⑤　直交表から最適条件を見つけるのもよいが､データ全体の変動を各因子がどう取り合っているかも理解すること
⑥　実験計画法や回帰分析などの他の手法と品質工学の解析結果を比較すること
⑦　常に時代に合った考え方で品質工学を更新すること

実験計画法を究めた後、全ての教科書を勉強して、１つの解法でできるにはどうしたらよいかを QC プラネッツなりに考えた結論です。QC プラネッツが自分で考え抜いて作った豊富な関連記事があるので、自信があります。

以上、「品質工学、ここがわからない！と思ったら読んで!」を解説しました。

直交表 L12 を使ったパラメータ設計がわかる

【1】パラメータ設計にはどの直交表を使っても良い

品質工学、ロバストパラメータ設計、タグチメソッドで扱う直交表について疑問に思うことが 2 つあります。

1.「品質工学＝混合系直交表」じゃないとダメなのか？
2.「品質工学≠実験計画法」は正しいのか？

(1)「品質工学＝混合系直交表」は正しいのか？

品質工学、ロバストパラメータ設計、タグチメソッドは特殊な直交表 L12,L18 を使います。その理由は

交互作用を割り付けるのは品質工学的に無意味だから、交互作用が出ない混合系直交表を使いたいから
⇒でも、これが意味わからないんですよ！
主効果、交互作用の有無はデータが決めるはずで、我々ではないから！

(2)「品質工学≠実験計画法」は正しいのか？

同じ直交表を使うのに、

品質工学≠実験計画法で別物扱い
⇒これもピンと来ません。同じで良いではないかと！
品質工学の発展や普及させる中で皆が同じことを言えば正しいという同調圧力を感じます！

実験計画法の延長として品質工学を検討したり一般の直交表を使ってパラメータ設計してみましょう。

【2】直交表 L12 を使ったパラメータ設計事例

(1) 事例

あるデータから最適条件を直交表 L12 から求めたい。
(1) 分散分析表を作れ。
(2) 各因子の、各水準におけるＳＮ比と感度を計算し、要因効果図を作れ。
(3) 最適条件を選び、その条件におけるＳＮ比と感度を計算せよ。

＜直交表 L12＞

No/列	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k(誤差)	データ
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	8
2	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	12
3	1	1	2	2	2	1	1	1	2	2	2	14
4	1	2	1	2	2	1	2	2	1	1	2	16
5	1	2	2	1	2	2	1	2	1	2	1	8
6	1	2	2	2	1	2	2	1	2	1	1	10
7	2	1	2	2	1	1	2	2	1	2	1	9
8	2	1	2	1	2	2	2	1	1	1	2	6
9	2	1	1	2	2	2	1	2	2	1	1	3
10	2	2	2	1	1	1	1	2	2	1	2	10
11	2	2	1	2	1	2	1	1	1	2	2	6
12	2	2	1	1	2	1	2	1	2	2	1	18
水準 1 の和	68	52	63	62	55	75	49	62	53	53	56	計 120
水準 2 の和	52	68	57	58	65	45	71	58	67	67	64	
平方和 S	21.3	21.3	3	1.33	8.33	75	40.3	1.33	16.3	16.3	5.33	210

(3) 各因子の平方和と分散分析を解析

直交表 L12 は 2 水準系なので、各列の平方和を計算する公式があります。関連記事で解説しています。

【関連記事】【本記事限定】直交表の各列の平方和の式は自力で導出できる【必見】
https://qcplanets.com/method/doe/orthogonal-array7/

これをもとに前頁表の「水準 1 の和」、「水準 2 の和」、「各列の平方和 S」を計算します。

●分散分析表

-	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k(誤差)	計
平方和 S	21.33	21.33	3	1.33	8.33	75	40.33	1.33	16.33	16.33	5.33	210
自由度Φ	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	11
平均平方 V	21.33	21.33	3	1.33	8.33	75	40.33	1.33	16.33	16.33	5.33	-

(4) データの構造式

分散分析を扱うための最も重要なデータの構造式を定義します。混合系直交表のデータの構造式は交互作用を一切含まない式となります（あまり好きではないんですが）。

$x = \mu + a + b + c + d + \cdots + j + k$

【3】SN 比と感度の計算

(1) SN 比と感度 S の公式

関連記事にも公式導出過程を解説しています。

【関連記事】品質工学の SN 比が導出できる
https://qcplanets.com/method/robust-parameter-design/dynamic-chara7/

●SN 比 $\eta = 10\log\frac{\mu^2}{\sigma^2} = 10\log\frac{\frac{1}{n}(S_m - V_e)}{V_e}$　　●感度 S $= 10\log\mu^2 = 10\log\frac{1}{n}(S_m - V_e)$

ですが、今回簡略化のため、

●SN 比 $\eta = \frac{\mu^2}{\sigma^2} = \frac{\bar{x}^2}{s^2}$　(sは標準偏差)　　●感度 S $= \mu^2 = \bar{x}^2$

で計算します。

(2) 各効果の各水準における平均 $\bar{x}$ と標準偏差 s

各効果の水準 1,2 に属するデータの平均と標準偏差を計算すると下表になります。

-	No	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k(誤差)
水準 1	平均	11.33	8.67	10.50	10.33	9.17	12.50	8.17	10.33	8.83	8.83	9.33
	標準偏差	3.27	3.98	5.86	4.27	2.04	4.09	3.71	4.80	3.71	4.40	4.89
水準 2	平均	8.67	11.33	9.50	9.67	10.83	7.50	11.83	9.67	11.17	11.17	10.67
	標準偏差	5.20	4.68	2.66	4.84	6.01	3.21	4.49	4.32	5.00	4.40	4.13

●因子 A から K の各因子において、水準ごとの 6 個のデータの平均と標準偏差を計算します。</p

(3) 直交表 L12 の各列の SN 比と感度

●SN 比 $\eta = \frac{\mu^2}{\sigma^2} = \frac{\bar{x}^2}{s^2}$　(sは標準偏差)　　●感度 S $= \mu^2 = \bar{x}^2$

で計算すると、下表になります。

-	No	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k(誤差)
水準 1	SN 比	12.04	4.73	3.21	5.85	20.17	9.36	4.84	4.63	5.67	4.03	3.65
	感度 S	128.44	75.11	110.25	106.78	84.03	156.25	66.69	106.78	78.03	78.03	87.11
水準 2	SN 比	2.78	5.87	12.71	3.98	3.25	5.46	6.94	5.01	4.99	6.44	6.67
	感度 S	75.11	128.44	90.25	93.44	117.36	56.25	140.03	93.44	124.69	124.69	113.78

よく 対数を取って SN 比や感度 S の値を計算しますが、別になくても OK なので、対数にしていません。要因効果図があると見やすいですが、数表からも確認できるので、割愛します。

【4】最適条件の選定</h2>

因子 A,C,D,F の水準の高い方を選択します。μ(ACDF)の式を先に作ります。関連記事で解説しています。

【関連記事】【簡単】データの構造式で実験計画法がわかる(必読)
https://qcplanets.com/method/doe/data-structure/

$\mu(ACDF) = \mu + (\mu_a - \mu) + (\mu_c - \mu) + (\mu_d - \mu) + (\mu_f - \mu) = \mu_a + \mu_c + \mu_d + \mu_f - 3\mu$　となります。

SN 比 η、感度 S は

● $\eta_{ACDF} = \eta_a + \eta_c + \eta_d + \eta_f - 3\bar{\eta}$　　● $S_{ACDF} = S_a + S_c + S_d + S_f - 3\bar{S}$

暗記不要で、データの構造式からどんな組み合わせパターンも式が作れます！

●SN 比において、

A,C,D,F で値の SN 比が大きい水準をみると A1,C2,D,1,F1 なので、

$\eta_{ACDF} = \eta_a + \eta_c + \eta_d + \eta_f - 3\bar{\eta}$　= 12.01+12.76+5.85+9.34-3×6.47 = 20.55

●感度において、

A,C,D,F で値の SN 比が大きい水準をみると A1,C1,D,1,F1 なので、

$S_{ACDF} = S_a + S_c + S_d + S_f - 3\bar{S}$ =128.37+110.25+106.71+156.25-3×101.59=196.81

直交表 L12 を使って、SN 比、感度の計算を実施しました。直交表の種類に関係なく 1 つの解法で解ける事がわかりますね。

以上、「直交表 L12 を使ったパラメータ設計がわかる」を解説しました。

品質工学、変動の期待値が導出できる

①静特性の変動の期待値を導出
②動特性の変動の期待値を導出

●静特性
データの構造式： $y_i = \bar{y} + (y_i - \bar{y})$の場合、
・全変動 E[S]= $n(m^2 + \sigma^2)$ ・平均変動 E[S$_m$]= $nm^2 + \sigma^2$ ・誤差変動 E[S$_e$]= $(n-1)\sigma^2$

●動特性
データの構造式： $y_i = \hat{y_i} + (y_i - \hat{y_i})$の場合、
・比例変動 E[S]= $r\beta^2 + \sigma^2$ ・誤差変動 E[S$_e$]= $(n-1)\sigma^2$ （ただし、 $r = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$ ）

【1】静特性の変動の期待値を導出
(1) データの構造式を定義
データの構造式を次のように定義します。 $y_i = \bar{y} + (y_i - \bar{y})$
(2) 全変動 S の期待値を導出
ここで、データ値y_iの期待値と分散を定義します。
・E[y_i]=m ・V[y_i]=σ^2
これは、単にデータの平均がmで分散σ^2にばらついているという意味ですね。
① E[y_i^2]を導出
分散の公式 V(X) = E[X^2] – E[X]^2 より、次式となります。後で使います。
・σ^2＝E[y_i^2]－ m^2 ・E[y_i^2]= $\sigma^2 + m^2$
②全変動 S を導出
S = $\sum_{i=1}^{n} y_i^2$ より
E[S]=E[$\sum_{i=1}^{n} y_i^2$]= $\sum_{i=1}^{n}(\sigma^2 + m^2) = n(\sigma^2 + m^2)$
と導出できます。よって、
E[S]= $n(\sigma^2 + m^2)$

(3) 平均変動 S$_m$ の期待値を導出
①E[$(\sum_{i=1}^{n} y_i)^2$]を導出
分散の公式から V($\sum_{i=1}^{n} y_i$)=E[($\sum_{i=1}^{n} y_i$)^2]－E[($\sum_{i=1}^{n} y_i$)]^2 となり、
V($\sum_{i=1}^{n} y_i$)= $n\sigma^2$
E[($\sum_{i=1}^{n} y_i$)]^2= $(nm)^2$ が成り立つので、
E[$(\sum_{i=1}^{n} y_i)^2$]= $n\sigma^2 +$ $(nm)^2$ となります。これを後で使います。
②平均変動 S$_m$ は定義式から

S$_m$ = $\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{y_i}{n}\right)^2$より

E[S$_m$]=E[$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{y_i}{n}\right)^2$]=E[$n \cdot \frac{(\sum_{i=1}^{n} y_i)^2}{n^2}$]= E[$\frac{(\sum_{i=1}^{n} y_i)^2}{n}$] となり、 E[$(\sum_{i=1}^{n} y_i)^2$] = $n\sigma^2 +$ $(nm)^2$を代入すると
S$_m$ = $nm^2 +$ σ^2

(4) 誤差変動 S$_e$ の期待値を導出
S$_e$=S－S$_m$ から
E[S$_e$] = E[S]－E[S$_m$]
= $n(\sigma^2 + m^2) - (nm^2 + \sigma^2) = (n-1)\sigma^2$
となります。確かに、自由度が$(n-1)$なので、
E[V$_e$]= $(n-1)\sigma^2/(n-1) = \sigma^2$
ですね。

【2】動特性の変動の期待値を導出

(1) データの構造式を定義

$$y_i = \hat{y}_i + (y_i - \hat{y}_i)$$

$\hat{y}_i = \beta x_i$ として、傾きβは　$\beta = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$　で回帰直線の傾きと同じです。本冊子の関連記事で確認します。

・品質工学の動特性は回帰分析と同じ(その 1)
・品質工学の動特性は回帰分析と同じ(その 2)

(2) 比例項の分散 V(β)を導出

ここで、x_iは定数、y_iを変数と見ると、

$$\mathrm{V}(\beta) = \mathrm{V}\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}\right) = \mathrm{V}\left(\frac{x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n}{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}\right) = \mathrm{V}\left(\frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2} y_1 + \frac{x_2}{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2} y_2 + \cdots + \frac{x_n}{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2} y_n\right)$$

$$= \frac{x_1^2}{(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)^2}\sigma^2 + \frac{x_2^2}{(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)^2}\sigma^2 + \cdots + \frac{x_n^2}{(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)^2}\sigma^2 = \frac{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}{(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)^2}\sigma^2 = \frac{1}{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{r}$$

ここで、$r = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$ とします。

まとめると、

$\mathrm{V}(\beta) = \frac{\sigma^2}{r}$　　$(r = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)$

次に、E[β^2]を分散の公式から計算します。

V(β)= E[β^2]- E[β]^2

から

$\mathrm{E}[\beta^2] = \frac{\sigma^2}{r} + \beta^2$

(3) 比例変動 S_β の期待値を導出

次に、比例変動 S_β を計算すると、

$S_\beta = \sum_{i=1}^{n} \hat{y}_i^{\,2} = \sum_{i=1}^{n} (\beta x_i)^2 = \beta^2 (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2) = \beta^2 r$

まとめると、下の２つの式から

・$S_\beta = \beta^2 r$　　　　　・$\mathrm{E}[\beta^2] = \frac{\sigma^2}{r} + \beta^2$

比例変動 S_β の期待値は、次式となります。

$\mathrm{E}[S_\beta] = \mathrm{E}[\beta^2 r] = \mathrm{E}[(\frac{\sigma^2}{r} + \beta^2) r] = \sigma^2 + \beta^2 r$

(4) 誤差変動 S_e の期待値を導出

　自由度$(n-1)$に分散 $V_e = \sigma^2$を掛け算すればいいので、

$\mathrm{E}[S_e] = (n-1)\sigma^2$

となります。

以上、「品質工学、変動の期待値が導出できる」を解説しました。