

【1】データの分解方法がわかる

(1) データの構造式

$$x_{ij} = \mu + \alpha_i + \varepsilon_{ij}$$

(2) 一元配置実験をデータ分解する

① 因子と水準の違いは説明できますか？

【簡単】 因子と水準の違い  
 因子は変数の種類  
 水準はレベル(英語にするとわかりやすい)

② 一元配置実験のデータを用意します。

		x <sub>ij</sub>		
水準1	2	7	12	
水準2	8	13	21	計
水準3	15	23	34	135

③ データの分解方法

全体の平均  $\mu$  を求める  
 主効果  $\alpha_i$  の各値 (i=1,2,3) を求める  
 残差  $\varepsilon_{ij}$  は残りの値

計算して、表を作ってみた方がわかりやすいです。

(i) 全体の平均  $\mu$  を求める。

$$\mu = \text{合計} / \text{個数} = 135 / 9 = 15$$

(ii) 主効果  $\alpha_i$  の各値 (i=1,2,3) を求める

$$\alpha_1 = (\text{水準 1 の平均}) - \mu = \frac{2+7+12}{3} - 15 = -8$$

$$\alpha_2 = (\text{水準 2 の平均}) - \mu = \frac{8+13+21}{3} - 15 = -1$$

$$\alpha_3 = (\text{水準 3 の平均}) - \mu = \frac{15+23+34}{3} - 15 = 9$$

(iii) 残差  $\varepsilon_{ij}$  は残りの値

$$\varepsilon_{ij} = x_{ij} - \mu - \alpha_i$$

例えば i=2, j=3 としましょう。

$$\varepsilon_{23} = x_{23} - \mu - \alpha_2 = 21 - 15 - (-1) = 7$$

これをすべての ij について計算します。

x <sub>ij</sub>				
水準1	2	7	12	
水準2	8	13	21	計
水準3	15	23	34	135

=

μ				
水準1				
水準2	15			計
水準3				15

+

α <sub>i</sub>		
水準1	-8	
水準2	-1	計
水準3	9	0

+

ε <sub>ij</sub>				
水準1	-5	0	5	計0
水準2	-6	-1	7	計0
水準3	-9	-1	10	計0

【2】主効果、残差の平方和がデータの分解から計算できる

データの構造式  $x_{ij} = \mu + \alpha_i + \varepsilon_{ij}$  の、各 i,j に対する値について、表を使って計算しました。次に平方和を導出しましょう。

(1) 平方和の分解を導出

データの構造式  $x_{ij} = \mu + \alpha_i + \varepsilon_{ij}$  から平方和を考えます。

$$\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b (x_{ij})^2 = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b (\mu + \alpha_i + \varepsilon_{ij})^2 \text{ において、}$$

$$\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b (x_{ij})^2 = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b (\mu)^2 + \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b (\alpha_i)^2 + \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b (\varepsilon_{ij})^2$$

$$\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b (x_{ij} - \mu)^2 = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b (\alpha_i)^2 + \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b (\varepsilon_{ij})^2$$

S<sub>T</sub>

S<sub>A</sub>

S<sub>e</sub>

が成り立ちます。実際に表を使って計算しましょう。

(2) データの分解した表から平方和の分解を導出

x <sub>ij</sub>				
水準1	4	49	144	
水準2	64	169	441	計
水準3	225	529	1156	2781

=

μ

水準1	225	225	225	
水準2	225	225	225	計
水準3	225	225	225	2025

+

α <sub>i</sub>				
水準1	64	64	64	
水準2	1	1	1	計
水準3	81	81	81	438

+

ε<sub>ij</sub>

水準1	25	0	25	
水準2	36	1	49	計
水準3	81	1	100	318

表の和をまとめると、

$$2781 = 2025 + 438 + 318$$

と一致します。あら、不思議！

実際、合計、因子 A、残差 e に対する平方和 S は、

$$S_T = 2781 - 2025 = 756$$

$$S_A = 438$$

$$S_e = 318$$

$$(438 + 318 = 756)$$

となります。

(3) 表から中間項の和が 0 になることを確認

$\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \alpha_i \varepsilon_{ij} = 0$  を実際に計算して確認します。

<b>α<sub>i</sub></b>				
水準1	-8	-8	-8	
水準2	-1	-1	-1	計
水準3	9	9	9	0
×				
<b>ε<sub>ij</sub></b>				
水準1	-5	0	5	計0
水準2	-6	-1	7	計0
水準3	-9	-1	10	計0
=				
<b>α<sub>i</sub>ε<sub>ij</sub></b>				
水準1	40	0	-40	計0
水準2	6	1	-7	計0
水準3	-81	-9	90	計0

黄色枠のとおり、合計は 0 になります。

公式暗記の前に、具体的な数字を使った計算結果を見て、慣れていきましょう。

以上、一元配置実験の平方和の分解を詳細に解説しました。

★本記事の答え

繰返し数が異なる二元配置実験では、主効果、残差の平方和の総和と総平方和が一致しないから

【1】 繰返し数が異なる場合(一元配置実験と二元配置実験)

(1) 繰返し数が異なる一元配置実験

① 繰返し数同じの場合

簡単のため  $2 \times 2 = 4$  つのデータで考えます。

データとデータの構造式に沿ってデータを分解した表と

各データを2乗にした表を用意します。平方和の分解が出来ることを確認します。

xij		
A1	12	24
A2	36	60
=		
μ	33	33
	33	33
+		
ai	-15	-15
	15	15
+		
εij	-6	6
	-12	12

xij			
A1	144	576	計
A2	1296	3600	5616
=			
μ	1089	1089	計
	1089	1089	4356
+			
ai	225	225	計
	225	225	900
+			
εij	36	36	計
	144	144	360

② 繰返し数が異なる場合

A2の最初の値  $x_{21}$  つまり 36 を削除します。データを分解してみましょう。

xij		
A1	12	24
A2	×	60
=		
μ	32	32
	32	32
+		
ai	-14	-14
	×	28
+		
εij	-6	6
	×	0

xij			
A1	144	576	計
A2	×	3600	4320
=			
μ	1024	1024	計
	×	1024	3072
+			
ai	196	196	計
	×	784	1176
+			
εij	36	36	計
	×	0	72

$3072 + 1176 + 72 = 4320$  と平方和の合計が一致します。

繰返し数が異なる一元配置実験では、主効果・残差の平方和の和と総平方和が等しい

なので、繰返し数が異なる一元配置実験がよくテストや試験に出ます。

(2) 繰返し数が異なる二元配置実験</h3>

①繰返し数同じの場合

簡単のため  $2 \times 2 = 4$  つのデータで考えます。

データとデータの構造式に沿ってデータを分解した表と

各データを2乗にした表を用意します。平方和の分解が出来ることを確認します。

xij	B1	B2
A1	12	24
A2	36	60
=		
μ	33	33
	33	33
+		
αi	-15	-15
	15	15
+		
βj	-9	9
	-9	9
+		
εij	3	-3
	-3	3

xij	B1	B2	
A1	144	576	計
A2	1296	3600	5616
=			
μ	1089	1089	計
	1089	1089	4356
+			
αi	225	225	計
	225	225	900
+			
βj	81	81	計
	81	81	324
+			
εij	9	9	計
	9	9	36

②繰返し数が異なる場合

AB21 の最初の値 x21 つまり 36 を削除します。データを分解してみましょう。

x	B1	B2
A1	12	24
A2	×	60
=		
μ	32	32
	×	32
+		
αi	-14	-14
	×	28
+		
βj	-20	10
	×	10
+		
εij	14	-4
	×	-10

xij	B1	B2	
A1	144	576	計
A2	×	3600	4320
=			
μ	1024	1024	計
	×	1024	3072
+			
αi	196	196	計
	×	784	1176
+			
βj	400	100	計
	×	100	600
+			
εij	196	16	計
	×	100	312

平方和を合計します。

(左辺)=4320、(右辺)=3072+1176+600+312=5160 ≠ 4320

と一致しません。つまり、 $S_T \neq S_A + S_B + S_e$

となり、平方和が分解できません。これでは分散分析に進めることができません。

繰返し数が異なる二元配置実験では、主効果・残差の平方和の和と総平方和が異なる  
 ないので、繰返し数が異なる二元配置実験が出てきません。

以上、繰返し数が異なる場合は一元配置実験だけあり、二元配置実験には無い理由を詳細に解説しました。

【●You tube 動画もご覧ください】

<https://www.youtube.com/embed/kpf8dOQfAdc>

【1】【導入】一元配置実験(繰返し数が同じ)場合

本記事の理解を深めるために、一元配置実験(繰返し数が同じ)の分散の期待値を導出します。

(1) 一元配置実験のデータの構造式

$$x_{ij} = \mu + \alpha_i + \varepsilon_{ij}$$

$$\bar{x}_i = \mu + \alpha_i + \bar{\varepsilon}_i$$

$$\bar{x} = \mu + \bar{\varepsilon}$$

(2) 分散分析から分散の期待値を導出

①主効果 A の分散の期待値

$$S_A = E[\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b (\bar{x}_i - \bar{x})^2] = E[\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b (\alpha_i + (\bar{\varepsilon}_i - \bar{\varepsilon}))^2]$$

$$= E[\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \alpha_i^2] + E[\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b (\bar{\varepsilon}_i - \bar{\varepsilon})^2] = b(a-1)\sigma_A^2 + (a-1)\sigma_e^2$$

$$\text{ここで、 } \sigma_A^2 = \frac{1}{a-1} E[\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \alpha_i^2]$$

$$\sigma_e^2 = \frac{1}{a-1} E[\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b (\bar{\varepsilon}_i - \bar{\varepsilon})^2]$$

とします。何度も見て慣れましょう。

②残差 e の分散の期待値

$$S_e = E[\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b (x_{ij} - \bar{x}_i)^2] = E[\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b (\varepsilon_{ij} - \bar{\varepsilon}_i)^2] = a(b-1)\sigma_e^2$$

$$\text{ここで、 } \sigma_e^2 = \frac{1}{a(b-1)} E[\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b (\varepsilon_{ij} - \bar{\varepsilon}_i)^2] \quad \text{とします。何度も見て慣れましょう。}$$

【2】一元配置実験(繰返し数が異なる)場合

(1) 繰返し数が同じと異なる場合の違い

繰返し数が異なる場合は、同じ場合と比べて、どこが変化するかを見ながら解説します。

①主効果 A の分散の期待値

まず、繰返し数が同じの場合は、どの i(1~a)に対してもデータ数は n=b で同じです。

i/j	1	2	...	b	データ数
1	X <sub>11</sub>	X <sub>12</sub>	...	X <sub>1b</sub>	b
2	X <sub>21</sub>	X <sub>22</sub>	...	X <sub>2b</sub>	b
...	...	...	...	...	...
a	X <sub>a1</sub>	X <sub>a2</sub>	...	X <sub>ab</sub>	b

なので、 $\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b$  と a,b それぞれの  $\Sigma$  をつけて平方和と分散の期待値をします。

一方、繰返し数が異なる場合は、それぞれの i(1~a)に対して、データ数は変わってきます。すべてデータがある場合(n=b)、そうでない場合(n<b)があります。その場合、データ数は n<sub>i</sub> として定義します。繰返し数が同じ場合と異なるポイントです。

i/j	1	2	...	b	データ数
1	X <sub>11</sub>	X <sub>12</sub>	...	X <sub>1b</sub>	b
2	X <sub>21</sub>	X <sub>22</sub>	...	データ無	n <sub>2</sub> <b
...	...	...	...	...	...
a	X <sub>a1</sub>	X <sub>a2</sub>	...	データ無	n <sub>a</sub> <b

なので、 $\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \rightarrow \sum_{i=1}^a n_i$  に変わります。

繰返し数が同じ :  $\sum_{j=1}^b$

繰返し数が異なる :  $n_i$

(2) 繰返し数が異なる場合の分散の期待値への導出

①主効果 A の分散の期待値

$S_A = E[\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b (\bar{x}_{ij} - \bar{x})^2]$  ではなく、 $S_A = E[\sum_{i=1}^a n_i (\bar{x}_{i\cdot} - \bar{x})^2]$  にします。

$$S_A = E[\sum_{i=1}^a n_i (\alpha_i + (\bar{\varepsilon}_{i\cdot} - \bar{\varepsilon}))^2] = E[\sum_{i=1}^a n_i \alpha_i^2] + 2E[\sum_{i=1}^a n_i \alpha_i (\bar{\varepsilon}_{i\cdot} - \bar{\varepsilon})] + E[\sum_{i=1}^a n_i (\bar{\varepsilon}_{i\cdot} - \bar{\varepsilon})^2]$$

・(第1項)は $\sigma_A^2$ としたいのですが、 $\sigma_A^2 = \frac{1}{a-1} E[\sum_{i=1}^a \alpha_i^2]$ と  $E[\sum_{i=1}^a n_i \alpha_i^2]$ を区別することが多く、 $E[\sum_{i=1}^a n_i \alpha_i^2]$ のままとします。

・(第2項)は合計 $n_i \bar{\varepsilon}_{i\cdot}$ と合計 $n_i \bar{\varepsilon}$ が等しいため0となります。

・(第3項)は誤差扱いとして、 $\sigma_e^2 = E[\frac{1}{a-1} \sum_{i=1}^a n_i (\bar{\varepsilon}_{i\cdot} - \bar{\varepsilon})^2]$ として扱います。

まとめると、

$$S_A = E[\sum_{i=1}^a n_i \alpha_i^2] + (a-1) \sigma_e^2 \qquad V_A = E[\frac{1}{a-1} \sum_{i=1}^a n_i \alpha_i^2] + \sigma_e^2$$

教科書では、導出過程を省かれていることが多いので、丁寧に解説しました。

②残差 e の分散の期待値

$S_e = E[\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b (x_{ij} - \bar{x}_{i\cdot})^2]$ ではなく、 $S_e = E[\sum_{i=1}^a n_i (x_{i(n_i)} - \bar{x}_{i\cdot})^2]$ とします。

$$S_e = E[\sum_{i=1}^a n_i (\varepsilon_{i(n_i)} - \bar{x}_{i\cdot})^2]$$

ここで、 $\sigma_e^2 = E[\frac{1}{a(b-1)-m} \sum_{i=1}^a n_i (\varepsilon_{i(n_i)} - \bar{x}_{i\cdot})^2]$

自由度を見ておくと、下表になります。

	繰返し数	
	同じ	異なる
A	$a - 1$	$a - 1$
e	$a(b - 1)$	$a(b - 1) - m$
T	$ab - 1$	$ab - 1 - m$

よって、まとめると、 $S_e = (a(b-1) - m) \sigma_e^2$   $V_e = \sigma_e^2$

教科書では、導出過程を省かれていることが多いので、丁寧に解説しました。

### 【3】擬水準法への適用

詳細は、関連記事で解説しますが、エッセンスは繰返し数が異なる一元配置実験と同じなので、紹介します。

繰返し数が同じ :  $\sum_{j=1}^b$

繰返し数が異なる :  $n_i$

- ・2水準系直交表で3水準を割当てる場合
- ・3水準系直交表で2水準を割当てる場合

の分散の期待値を導出する際に、 $\Sigma$ ではなく  $n_i$  を使って計算します。

直交表の応用レベルの擬水準法ですが、繰返し数が異なる一元配置実験の分散の期待値の導出と同じ方法を使います。是非関連記事をご覧ください。

以上、繰返し数が異なる一元配置実験の分散分析の分散の期待値の導出方法を詳細に解説しました。

## 【簡単】母数因子と変数因子の違いがすぐわかる

### 【1】母数因子と変数因子とは何かがわかる

- 母数因子は、因子の水準が指定できるもの。
- 変数因子は、因子の水準が指定できないものや指定する意味がないもの。

母数因子と変数因子の例を挙げます。

- (i) 母数因子：温度を因子として、水準を 30°C、50°C、100°C にします。
- (ii) 変数因子：実験ごとに出てくる誤差は、偶発的に発生する値なので、水準指定できないし、指定してみ意味がありません。
- (iii) 変数因子：反復因子(ブロック因子)はブロックそのものにデータの価値はありません。
- (iv) 変数因子：重さを因子とするが、ある集合の一部を抜き取ったサンプルデータである場合。

### 【2】データの構造式や分散分析における母数因子と変数因子の違いがわかる

#### (1) データの構造式で母数因子と変数因子の違いを見る

例として、一元配置実験で母数因子と変数因子の違いを見ましょう。

★データの構造式  $x_{ij} = \mu + \alpha_i + \varepsilon_{ij}$

主効果を調べる因子について (例：因子 A(正規分布  $N(0, \sigma_A^2)$ )

- 母数因子： $\sum_{i=1}^a \alpha_i = 0, E[\sum_{i=1}^a \alpha_i] = 0$
- 変数因子： $\sum_{i=1}^a \alpha_i \neq 0, E[\sum_{i=1}^a \alpha_i] = 0$

反復因子(ブロック因子 R)について(例：因子 R(正規分布  $N(0, \sigma_R^2)$ )

- 変数因子： $\sum_{i=1}^r \gamma_i \neq 0, E[\sum_{i=1}^r \gamma_i] = 0$

誤差因子について(例：誤差 E(正規分布  $N(0, \sigma_E^2)$ )

- 変数因子： $\sum \varepsilon_{ijk} \neq 0, E[\varepsilon_{ijk}] = 0$

#### (2) データ構造式でみる母数因子と変数因子の違い

- 違い：和  $\Sigma$  では、母数因子は 0 だが、変数因子は 0 ではない。
- 同じ：和  $\Sigma$  の期待値は母数因子も変数因子も 0 とする。

分散の期待値  $E[ ]$  については、ここを読んでください。期待値は単なる平均という意味だけでなく、データ数を  $\infty$  にした場合の分散の極限值のような意味合いがあることがわかります。

#### (2) 分散分析で母数因子と変数因子の違いを見る

主効果 A において、母数因子と変数因子にそれぞれした場合の分散分析を見てみましょう。

##### ① データの構造式を変形

$$x_{ij} = \mu + \alpha_i + \varepsilon_{ij}$$

$$(x_{ij} - \bar{x}) = (\bar{x}_i - \bar{x}) + (x_{ij} - \bar{x}_i) \quad \text{より、} \alpha_i = (\bar{x}_i - \bar{x}) \quad \text{ですね。}$$

平方和の期待値  $E[S_A]$  を母数因子と変数因子について、それぞれ求めます。

$$E[S_A] = E[\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b (\bar{x}_i - \bar{x})^2] = (\text{あ})$$

(i) 母数因子の場合は次のように変形します。

$$(\text{あ}) = E[\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b ((\mu + \alpha_i + \bar{\varepsilon}_i) - (\mu + \bar{\varepsilon}))^2] = E[\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b (\alpha_i + (\bar{\varepsilon}_i - \bar{\varepsilon}))^2] = E[b \sum_{i=1}^a \alpha_i^2 + \dots]$$

(ii)変数因子の場合は次のように変形します。

$$(あ) = E\left[\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b ((\mu + \alpha_i + \varepsilon_{ij}) - (\mu + \bar{\alpha} + \bar{\varepsilon}))^2\right] = E\left[\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b ((\alpha_i - \bar{\alpha}) + (\varepsilon_{ij} - \bar{\varepsilon}))^2\right] = E[b \sum_{i=1}^a (\alpha_i - \bar{\alpha})^2 + \dots]$$

第1項だけが本記事で重要なので、第1項だけ計算します。

② 期待値の設定がポイント

ここで、期待値を以下のようにします。母数因子・変数因子どちらも分散分析の結果に差はないように設定するのがポイントです。

$$(i) \text{母数因子の場合} : \sigma_A^2 = \frac{E[\sum_{i=1}^a \alpha_i^2]}{a-1}$$

$$(ii) \text{変数因子の場合} : \sigma_A^2 = \frac{E[\sum_{i=1}^a (\alpha_i - \bar{\alpha})^2]}{a-1}$$

変数因子の場合、和  $\sum_{i=1}^a \alpha_i \neq 0$  ですが、平均は  $\bar{\alpha}$  になっています。データの構造式で  $\bar{x}$  に、平均  $\bar{\alpha}$  が入り、 $\sigma_A^2$  の式にうまく入れます。

分散分析すると、母数因子も変数因子も分散の期待値は同じ。

**【3】母数因子と変数因子の違いは気にしないでいい**

**母数因子と変数因子の違いがあるが、母数因子も変数因子も分散の期待値は同じ。なので、どちらでもよいのでは？**

「母数因子と変数因子の違いがあるが、母数因子も変数因子も分散の期待値は同じ。なので、どちらでもよいのでは？」と思いませんか？

数学的、論理的には母数因子と変数因子は別物です。ただし、実務上はどちらも分散分析結果は同じです。あまり気にしなくてもよいところでしょう。全因子を変数因子で解析してもいいし、全因子を母数因子で解析しても分散分析は同じ結果になります。

反復因子 R(ブロック因子)や誤差は変数因子で、その他調べたい主効果の因子は母数因子にすることが多いです。

以上、母数因子と変数因子の違いと解説し、データの構造式では違いがあるが、分散期待値で調整して同じ期待値になるので、あまり気にしないでいいことがわかりました。

分散分析の比較(完全配置実験とラテン方格法と直交表)

【1】分散分析の比較(完全配置実験とラテン方格法と直交表)

比較しやすい3水準3因子(A,B,C)を事例に挙げます。

- (i) 完全配置実験は  $3 \times 3 \times 3 = 27$  回  
 (ii) ラテン方格法は  $3 \times 3 = 9$  回  
 (iii) 直交表は  $L_9(3^4)$ より 9 回

データを用意します。

(1) データの準備(完全配置実験とラテン方格法と直交表)

① 完全配置実験

完全配置実験				
No	A	B	C	データ
1	1	1	1	10
2	1	1	2	3
3	1	1	3	6
4	1	2	1	11
5	1	2	2	12
6	1	2	3	9
7	1	3	1	19
8	1	3	2	14
9	1	3	3	8
10	2	1	1	17
11	2	1	2	12
12	2	1	3	13
13	2	2	1	13
14	2	2	2	10
15	2	2	3	16
16	2	3	1	17
17	2	3	2	14
18	2	3	3	17
19	3	1	1	15
20	3	1	2	15
21	3	1	3	10
22	3	2	1	16
23	3	2	2	19
24	3	2	3	12
25	3	3	1	19
26	3	3	2	19
27	3	3	3	14

② ラテン方格法

ラテン方格法					
No	No	A	B	C	データ
1	1	1	1	1	10
5	2	1	2	2	12
9	3	1	3	3	8
11	4	2	1	2	12
15	5	2	2	3	16
16	6	2	3	1	17
21	7	3	1	3	10
22	8	3	2	1	16
26	9	3	3	2	19

橙色部が同じ実験 No を意味します。

(2) 直交表

次に直交表です。因子 C は交互作用  $A \times B$ 、 $A \times 2B$  の 2 列のうち、 $A \times B$  の方に割り当てます。

直交表					
No	A	B	C	e	データ
1	1	1	1	1	10
2	1	2	2	2	12
3	1	3	3	3	8
4	2	1	2	3	12
5	2	2	3	1	16

6	2	3	1	2	17
7	3	1	3	2	10
8	3	2	1	3	16
9	3	3	2	1	19
成	a		a	a	-
分		b	b	2b	-

完全配置実験 27 回のうち、一部 9 回分をラテン方格法と直交表のデータとしています。なお、9 回のデータについては、ラテン方格法と直交表は同じです。

### (3) 分散分析の比較(完全配置実験とラテン方格法と直交表)

#### ① 完全配置実験

-	平方和S	自由度	平均平方	F	F0
A	136.22	2	68.11	8.59	3.49
B	89.56	2	44.78	5.64	3.49
C	57.56	2	28.78	3.63	3.49
e	158.67	20	7.93	-	-
T	442	26	-	-	-

#### ②ラテン方格法

-	平方和S	自由度	平均平方	F	F0
A	50	2	25	3.15	3.49
B	32	2	16	2.02	3.49
C	18	2	9	1.13	3.49
e	14	2	7	-	-
T	114	8	-	-	-

#### ③直交表

-	平方和S	自由度	平均平方	F	F0
A	50	2	25	3.15	3.49
B	32	2	16	2.02	3.49
C	18	2	9	1.13	3.49
e	14	2	7	-	-
T	114	8	-	-	-

ラテン方格法と直交表の分散分析の結果が一致しました。ラテン方格法と直交表の割当てが一致したためです。一致する場合としない場合があります。今回は直交表に因子 C を交互作用 A×B に配置させた結果、ラテン方格法の分散分析と一致しました。

### (4) 分散分析の比較

- 完全配置実験では、どの因子も有意性ありとわかった。
- 一方、ラテン方格法と直交表では有意性がない因子が出た

<div class="pre">●完全配置実験では、どの因子も有意性ありとわかった。  
●一方、ラテン方格法と直交表では有意性がない因子が出た</div>

結果に違いが出るときがあるので、精度は実験回数をおとした分だけ下がると思っていた方がよいです。それでも、実験が手間で大変な場合は実験回数を減らすことを優先します。

## 【2】 直交表の配列方法の1つがラテン方格法

下表を見ると、確かに、ラテン方格法と直交表の各因子の割当てが同じです。また、直交表にて、因子 C と誤差 e を入れ替えると、ラテン方格法と直交表の分散分析の結果は変わります。具体的には、因子 C の平方和と誤差 e の平方和が入れ替わります。

No	ラテン方格法			直交表 $L_9(3^4)$				データ
	A	B	C	A	B	C	e	
1	1	1	1	1	1	1	1	10
2	1	2	2	1	2	2	2	12
3	1	3	3	1	3	3	3	8
4	2	1	2	2	1	2	3	12
5	2	2	3	2	2	3	1	16
6	2	3	1	2	3	1	2	17
7	3	1	3	3	1	3	2	10
8	3	2	1	3	2	1	3	16
9	3	3	2	3	3	2	1	19

直交表はいろいろな交互作用の組み合わせがあるので、ラテン方格法の割当て方法は直交表の割当ての1つに含まれると言えます。

## 【3】 多水準の分散分析は手間だからラテン方格法と直交表が使いやすい

3水準3因子は27回だからまだ、完全配置実験でもできそうでも、4水準、5水準と増えると指数関数的に実験回数が増える。まずは実験回数を減らしたラテン方格法や直交表を活用する。

水準数3、因子数3の場合は  $3^3=27$  回  
水準数4、因子数4の場合は  $4^4=256$  回  
水準数5、因子数5の場合は  $5^5=3125$  回  
水準数6、因子数6の場合は  $6^6=46656$  回  
...  
ちょっと厳しいですね。

一方、ラテン方格法、直交表を使うと  
水準数3、因子数3の場合は 9回  
水準数4、因子数4の場合は 16回  
水準数5、因子数5の場合は 25回  
水準数6、因子数6の場合は 36回  
...

と100回以内で実験が済みます。分散分析の結果は全パターン実験した場合よりは精度がよくありませんが、実験回数が数千、数万に比べれば現実的です。

精度をとるか？ 手間をとるか？ 調査目的によって使い分ければよいです。

以上、分散分析を使って完全配置実験とラテン方格法と直交表を比較しました。

## 分散分析表の値を綺麗にするデータのつくり方

### 【1】データのつくり方を伝授します

(1) 簡単に作れる方法です

#### 【データのつくり方のポイント】

1. データの構造式の通りに数字を入れる
2. ただし、各効果において、和が0になるように注意する
3. 各効果の平方和の総和が全体の平方和になることを確認する

### 【2】一元配置実験のデータのつくり方

(1) データの構造式の通りに数字を入れる

データの構造式は、

$$x_{ij} = \mu + \alpha_i + \varepsilon_{ij}$$

ですから、 $\mu$ と $\alpha$ と $\varepsilon$ を整数値として代入すればOKです。

(2) 各効果において、和が0になるように注意する

それぞれの効果においては、和が0になる性質があります。

$$\alpha : \sum_{i=1}^a \alpha_i = 0$$

$$\varepsilon : \sum_{i=1}^a \varepsilon_{ij} = 0$$

いま、因子A水準3、繰返し数4の一元配置を用意します。

上の式をみると

【縦方向】  $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0$

【横方向】  $\varepsilon_{11} + \varepsilon_{12} + \varepsilon_{13} + \varepsilon_{14} = 0$

【横方向】  $\varepsilon_{21} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{23} + \varepsilon_{24} = 0$

【横方向】  $\varepsilon_{31} + \varepsilon_{32} + \varepsilon_{33} + \varepsilon_{34} = 0$

という制約条件が入ります。

実際にデータを作ってみましょう。

data					
A1	9	2	8	5	
A2	13	6	15	10	
A3	14	15	9	14	
=					
$\mu$					
A1	10	10	10	10	
A2	10	10	10	10	
A3	10	10	10	10	
+					
$\alpha_i$					
A1	-4	-4	-4	-4	
A2	1	1	1	1	
A3	3	3	3	3	
			計	0	
+					
$\varepsilon_{ij}$					計
A1	3	-4	2	-1	0
A2	2	-5	4	-1	0
A3	1	2	-4	1	0
			計	0	

確かに、黄色部枠を見ると、縦方向、横方向の制約条件を満たしています。

(3) 各効果の平方和の総和が全体の平方和になることを確認する</h3>

平方和の分解についての話になるので、本冊子【二元配置実験(交互作用有り)の平方和の分解ができる【初心者必見】】で確認ください。

一元配置実験において、それぞれのデータを2乗した和が $x_{ij}$ のそれぞれの2乗和に一致するかどうかを確認しましょう。一致しなければ、主効果と残差の各値のどれかが間違っています。

data					
A1	81	4	64	25	
A2	169	36	225	100	計
A3	196	225	81	196	1402

=

$\mu$					
A1	100	100	100	100	
A2	100	100	100	100	計
A3	100	100	100	100	1200

+

$\alpha_i$					
A1	16	16	16	16	
A2	1	1	1	1	計
A3	9	9	9	9	104

+

$\varepsilon_{ij}$					
A1	9	16	4	1	
A2	4	25	16	1	計
A3	1	4	16	1	98

平方和は、 $1402-1200=104+98$  より総和が一致します。  
分散分析をまとめます。

-	S	$\phi$	V	F
A	104	2	52	4.78
e	98	9	10.9	-
T	202	11	-	-

分散分析の平方和はすべて整数で綺麗にまとめられました。

以下、多元配置実験に応用していきますが、基本的な考え方は同じです。違うのは効果の和が0になる条件が増える点です。

【3】二元配置実験のデータの作り方

(1) データの構造式の通りに数字を入れる

データの構造式は、

$$x_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} + \varepsilon_{ijk}$$

$\mu, \alpha, \beta, (\alpha\beta), \varepsilon$  を整数値として代入すれば OK です。

(2) 各効果において、和が0になるように注意する

それぞれの効果においては、和が0になる性質があります。二元配置実験になるとやや複雑になります。

【縦方向】  $\alpha : \sum_{i=1}^a \alpha_i = 0$

【横方向】  $\varepsilon : \sum_{i=1}^a \varepsilon_{ij} = 0$

$(\alpha\beta) : \sum_{i=1}^a (\alpha\beta)_{ij} = 0, \sum_{j=1}^b (\alpha\beta)_{ij} = 0$

(【縦方向】と【横方向】がある)

$\varepsilon : \sum_{k=1}^c \varepsilon_{ijk} = 0$

いま、因子 A 水準 3、因子 B 水準 4、繰返し数 2 の二元配置を用意します。

上の式をみると

【縦方向】  $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0$

【横方向】  $\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \beta_4 = 0$

【横方向】  $(\alpha\beta)_{11} + (\alpha\beta)_{12} + \dots + (\alpha\beta)_{14} = 0$   
 $(\alpha\beta)_{21} + (\alpha\beta)_{22} + \dots + (\alpha\beta)_{24} = 0$   
 $(\alpha\beta)_{31} + (\alpha\beta)_{32} + \dots + (\alpha\beta)_{34} = 0$

【縦方向】  $(\alpha\beta)_{11} + (\alpha\beta)_{21} + \dots + (\alpha\beta)_{31} = 0$   
 $\dots$   
 $(\alpha\beta)_{14} + (\alpha\beta)_{24} + \dots + (\alpha\beta)_{34} = 0$

$\varepsilon_{ijk}$  は

$\varepsilon_{111} + \varepsilon_{112} = 0$

$\dots$

$\varepsilon_{341} + \varepsilon_{342} = 0$

という制約条件が入ります。実際にやってみるとわかりますが、 $\alpha \beta$  はデータが入れにくいです。

実際にデータを作ってみましょう。

xijk	B1	B2	B3	B4
A1	14	12	15	23
	8	20	11	25
A2	12	18	23	19
	16	12	21	23
A3	25	27	22	30
	27	25	28	24
=				
$\mu$	B1	B2	B3	B4
A1	20	20	20	20
	20	20	20	20
A2	20	20	20	20
	20	20	20	20
A3	20	20	20	20
	20	20	20	20
+				
$\alpha_i$	B1	B2	B3	B4
A1	-4	-4	-4	-4
	-4	-4	-4	-4
A2	-2	-2	-2	-2
	-2	-2	-2	-2
A3	6	6	6	6
	6	6	6	6
計	0	0	0	0
+				

$\beta_j$	B1	B2	B3	B4	計
A1	-3	-1	0	4	0
	-3	-1	0	4	
A2	-3	-1	0	4	0
	-3	-1	0	4	
A3	-3	-1	0	4	0
	-3	-1	0	4	
+					
$\alpha_i\beta_j$	B1	B2	B3	B4	計
A1	-2	1	-3	4	0
	-2	1	-3	4	
A2	-1	-2	4	-1	0
	-1	-2	4	-1	
A3	3	1	-1	-3	0
	3	1	-1	-3	
計	0	0	0	0	
$\varepsilon_{ijk}$	B1	B2	B3	B4	
A1	3	-4	2	-1	
	-3	4	-2	1	
A2	-2	3	1	-2	
	2	-3	-1	2	
A3	-1	1	-3	3	
	1	-1	3	-3	

確かに、黄色枠部を見ると、

【縦方向】  $\alpha : \sum_{i=1}^a \alpha_i = 0$

【横方向】  $\beta : \sum_{j=1}^b \beta_j = 0$

$(\alpha\beta) : \sum_{i=1}^a (\alpha\beta)_{ij} = 0, \sum_{j=1}^b (\alpha\beta)_{ij} = 0$

(【縦方向】 と 【横方向】 あり)

$\varepsilon : \sum_{k=1}^c \varepsilon_{ijk} = 0$

(3) 二元配置実験において、それぞれのデータを2乗した和が $x_{ij}$ のそれぞれの2乗和に一致するかどうかを確認しましょう。一致しなければ、主効果と残差の各値のどれかが間違っています。

xijk	B1	B2	B3	B4	
A1	196	144	225	529	
	64	400	121	625	
A2	144	324	529	361	
	256	144	441	529	
A3	625	729	484	900	計
	729	625	784	576	10484
=					
$\mu$	B1	B2	B3	B4	
A1	400	400	400	400	
	400	400	400	400	
A2	400	400	400	400	
	400	400	400	400	
A3	400	400	400	400	計
	400	400	400	400	9600
+					
ai	B1	B2	B3	B4	
A1	16	16	16	16	
	16	16	16	16	
A2	4	4	4	4	
	4	4	4	4	
A3	36	36	36	36	計
	36	36	36	36	448
+					

$\beta_j$	B1	B2	B3	B4	
A1	9	1	0	16	
	9	1	0	16	
A2	9	1	0	16	
	9	1	0	16	
A3	9	1	0	16	計
	9	1	0	16	156
+					
$\alpha_i\beta_j$	B1	B2	B3	B4	
A1	4	1	9	16	
	4	1	9	16	
A2	1	4	16	1	
	1	4	16	1	
A3	9	1	1	9	計
	9	1	1	9	144
計	28	12	52	52	
$\epsilon_{ijk}$	B1	B2	B3	B4	
A1	9	16	4	1	
	9	16	4	1	
A2	4	9	1	4	
	4	9	1	4	
A3	1	1	9	9	計
	1	1	9	9	136

平方和は、 $10484-9600=448+156+144+136$  より総和が一致します。

平方和が一致します。よって、分散分析をまとめます。

-	S	$\phi$	V	F
A	448	3	149.33	4.39
B	156	4	39	1.15
A×B	144	12	12	-
e	136	4	34	-
T	884	23	-	-

分散分析の平方和はすべて整数で綺麗にまとめられました。

以上、分散分析表の値を綺麗にするデータのつくり方を解説しました。

分散分析の期待値は極限值としてとらえる

【1】わかりやすい期待値とわかりにくい期待値  
期待値については、関連記事で解説しています。

【関連記事】確率変数の期待値と分散が計算できる【初心者向け】  
<https://qcplanets.com/method/statistics/additivity-expectation/>

期待値は、簡単な内容と、難解な内容があります。

1. サイコロの出る目の期待値(平均値)は簡単
2. E[V]の数学公式が出てくると一気に期待値が難しくなる

分散分析の期待値は、期待値の難解な内容である、E[V]の数学公式を使って求めます。そのため、数式の理解が難解です。分散分析の E[V]の列の文字式を丸暗記で済ませるしかないオチになっています。

【2】分散分析の期待値は極限として理解する

わかりやすい分散の期待値とは 分散分析の期待値は極限值としてとらえる  $\lim_{n \rightarrow \infty} V(A)$

【3】データ数を極限増やした場合の分散分析

では本当に、データ数をおもいきり増やしたら平均平方(不偏分散)V が分散の期待値 $\sigma_e^2$ に近づくのかを実験してみましょう。

簡単のため、一元配置実験とし、因子 A 水準 3 とします。繰り返し回数 n をどんどん増やしてみます。

n	A1	A2	A3
1	12	26	28
2	17	19	21
3	16	17	23
...	...	...	...
∞	...	...	...

★繰り返し数 n=3 の場合

n=3	S	Φ	V
A	194	2	97
e	70	6	11.67
T	264	8	-

★繰り返し数 n=69 の場合

n=69	S	Φ	V
A	2954.81	2	1477.41
e	2415.8	204	11.84
T	5370.61	206	-

★繰り返し数 n=5241 の場合

n=5241	S	Φ	V
A	265576	2	132788
e	187642	15720	11.94
T	453218	15722	-

★繰り返し数 n=10933 の場合

n=10933	S	Φ	V
A	547175	2	273587
e	391493	32796	11.94
T	938667	32798	-

ところで、一元配置実験の分散分析において、分散の期待値をまとめます。

—	S	φ	V	E[V]
A	S <sub>A</sub>	φ <sub>A</sub>	V <sub>A</sub>	$n\sigma_A^2 + \sigma_e^2$
e	S <sub>e</sub>	φ <sub>e</sub>	V <sub>e</sub>	$\sigma_e^2$
T	S <sub>T</sub>	φ <sub>T</sub>	—	—

$$\sigma_e^2 = E[V_e] \equiv V_e$$

$$\sigma_A^2 = E\left[\frac{V_A - V_e}{n}\right] \equiv \frac{V_A - V_e}{n}$$

として、各 n の値に対して  $\sigma_e^2$ 、 $\sigma_A^2$  を推定します。

n	$\sigma_e^2$	$\sigma_A^2$
3	11.67	28.44
69	11.84	21.24
5241	11.94	25.33
10933	11.94	25.02
...	...	...

上表から、

$$E[V_e] = \sigma_e^2 \doteq 11.9$$

$$E\left[\frac{V_A - V_e}{n}\right] = \sigma_A^2 \doteq 25.0$$

程度であることがわかります。

★本記事の最も重要なポイント

実験は、有限なデータしか測定できません。しかし、本来はその水準には無限なデータがあり、その一部を実験から調べているにすぎません。測定データから、測定用の平方和や分散を求め、期待値によって無限あるデータにおける平方和や分散を推測するイメージが重要です。分散分析表の右側にある、 $E[V]$ は単なる付けたしではなく、無限あるデータを推測するためにあるのです。

以上から、分散分析の期待値は、平均値ではなく、データ数を $\infty$ に増やした場合の極限值として見ると理解しやすいことを解説しました。

以上、分散分析の期待値は極限值としてとらえる理由を解説しました。

【You Tube でも解説しています。ご覧ください】

<https://www.youtube.com/embed/ywbYJazpbh8>

【1】二元配置実験(繰り返し無し)のデータの構造式が書ける

(1) データの構造式

2 因子の完全配置実験のデータの構造式からスタートします。機械的に書けますね。

★二元配置実験のデータの構造式

$$x_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j + e_{ij}$$

(2) 各平均値をデータの構造式で作る

- $\bar{x}_{i\cdot} = \mu + \alpha_i + \bar{e}_{i\cdot}$
- $\bar{x}_{\cdot j} = \mu + \beta_j + \bar{e}_{\cdot j}$
- $\bar{x} = \mu + \bar{e}$

【2】二元配置実験(繰り返し無し)の平方和の分解の式が書ける

(1) データの構造式を変形

式を書くとき見づらいので、表にまとめます。分散分析はデータの構造式が複雑になると表で整理するのがオススメです。

-	$\bar{x}_{i\cdot}$	$\bar{x}_{\cdot j}$	$x_{ij}$	$\bar{x}$
S <sub>A</sub>	1			-1
S <sub>B</sub>		1		-1
S <sub>e</sub>	-1	-1	1	1

表から各平方和の導出式が簡単にできますね。S<sub>A</sub>、S<sub>B</sub>、S<sub>e</sub>を例に挙げます。

$$\cdot S_A = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b (\bar{x}_{i\cdot} - \bar{x})^2$$

$$\cdot S_B = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b (\bar{x}_{\cdot j} - \bar{x})^2$$

$$\cdot S_e = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b (x_{ij} - \bar{x}_{i\cdot} - \bar{x}_{\cdot j} + \bar{x})^2$$

と書けますね。他の平方和も計算できます。

【3】主効果・交互作用・誤差の期待値が導出できる

(1) 主効果 A の分散の期待値の導出

$$E[S_A] = E[\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b (\bar{x}_{i\cdot} - \bar{x})^2] = E[\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b (\alpha_i + (\bar{e}_{i\cdot} - \bar{e}))^2]$$

$$= b(a-1)\sigma_A^2 + (a-1)\sigma_e^2$$

主効果 A の自由度は(a-1)より、分散の期待値 E[V<sub>A</sub>] = bσ<sub>A</sub><sup>2</sup> + σ<sub>e</sub><sup>2</sup>

(2) 残差の分散の期待値の導出

$$E[S_e] = E[\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b (x_{ij} - \bar{x}_{i\cdot} - \bar{x}_{\cdot j} + \bar{x})^2] = E[\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b (e_{ij} - \bar{e}_{i\cdot} - \bar{e}_{\cdot j} + \bar{e})^2]$$

$$= (a-1)(b-1)\sigma_e^2$$

残差 e の自由度は (a-1)(b-1)より、分散の期待値 E[V<sub>e</sub>] = σ<sub>e</sub><sup>2</sup>

**【4】 二元配置実験(繰り返し無し)の分散分析ができる**

(1) 自由度の計算

表から各平方和の導出式が簡単にできますね。

-	a	b	ab	1
A	1			-1
B		1		-1
e	-1	-1	1	1

(2) 分散分析の結果

分散分析表を作ります。

-	自由度 $\Phi$	E[V]
A	$a - 1$	$\sigma_e^2 + b\sigma_A^2$
B	$b - 1$	$\sigma_e^2 + a\sigma_B^2$
e	$(a - 1)(b - 1)$	$\sigma_e^2$
T	$ab - 1$	-

**【5】 主効果・交互作用の区間推定が導出できる**

(1) 分散の期待値から分散の推定値を導出

分散分析から、eの分散の推定値 E[V]を導出します。

$$V_e = \widehat{\sigma_e^2}$$

上の表から、分散の推定値を求めます。

(2) 主効果の点推定と区間推定

点推定： $\hat{\mu}(A_i) = \bar{x}_{i\cdot} = \widehat{\mu + \alpha_i} = \mu + \alpha_i + \bar{e}_i$

分散： $\widehat{Var}(\hat{\mu}(A_i)) = V[\mu + \alpha_i + \bar{e}_i] = V[\bar{e}_i] = \frac{\widehat{\sigma_e^2}}{b}$

$V_e$  が求まったので、自由度  $\phi$  と、点推定  $\mu$  を代入すれば推定区間が求まります。

一連の導出過程を解説しました。

以上、二元配置実験(繰り返し無し)の分散分析の導出過程を詳細に解説しました。

【You Tube でも解説しています。ご覧ください】

<https://www.youtube.com/embed/5bQppaweHpk>

【1】二元配置実験(繰り返し有り)のデータの構造式が書ける

(1) データの構造式

2 因子の完全配置実験のデータの構造式からスタートします。機械的に書けますね。

★二元配置実験のデータの構造式

$$x_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} + e_{ijk}$$

(2) 各平均値をデータの構造式で作る

- $\bar{x}_{i..} = \mu + \alpha_i + \bar{e}_{i..}$
- $\bar{x}_{.j.} = \mu + \beta_j + \bar{e}_{.j.}$
- $\bar{x}_{ij.} = \mu + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} + \bar{e}_{ij.}$
- $\bar{x} = \mu + \bar{e}$

【2】二元配置実験(繰り返し有り)の平方和の分解の式が書ける

(1) データの構造式を変形

式を書くと見づらいので、表にまとめます。分散分析はデータの構造式が複雑になると表で整理するのがオススメです。

-	$\bar{x}_{i..}$	$\bar{x}_{.j.}$	$\bar{x}_{ij.}$	$x_{ijk}$	$\bar{x}$
S <sub>A</sub>	1				-1
S <sub>B</sub>		1			-1
S <sub>A×B</sub>	-1	-1	1		1
S <sub>e</sub>			-1	1	

表から各平方和の導出式が簡単にできますね。S<sub>A</sub>、S<sub>A×B</sub>、S<sub>e</sub>を例に挙げます。

- $S_A = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^c (\bar{x}_{i..} - \bar{x})^2$
- $S_{A \times B} = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^c (\bar{x}_{ij.} - \bar{x}_{i..} - \bar{x}_{.j.} + \bar{x})^2$
- $S_e = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^c (x_{ijk} - \bar{x}_{ij.})^2$

と書けますね。他の平方和も計算できます。

【3】主効果・交互作用・誤差の期待値が導出できる

(1) 主効果 A の分散の期待値の導出

$$E[S_A] = E[\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^c (\bar{x}_{i..} - \bar{x})^2] = E[\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^c (\alpha_i + (\bar{e}_{i..} - \bar{e}))^2]$$

$$= bc(a-1)\sigma_A^2 + (a-1)\sigma_e^2$$

主効果 A の自由度は(a-1)より、分散の期待値 E[V<sub>A</sub>]=bcσ<sub>A</sub><sup>2</sup> + σ<sub>e</sub><sup>2</sup>

(2) 交互作用 A×B の分散の期待値の導出

$$E[S_{A \times B}] = E[\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^c (\bar{x}_{ij.} - \bar{x}_{i..} - \bar{x}_{.j.} + \bar{x})^2] = E[\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^c ((\alpha\beta)_{ij} + (\bar{e}_{ij.} - \bar{e}_{i..} - \bar{e}_{.j.} + \bar{e}))^2]$$

$$= c(a-1)(b-1)\sigma_A^2 + (a-1)(b-1)\sigma_e^2$$

交互作用 A×B の自由度は(a-1)(b-1)より、分散の期待値 E[V<sub>A×B</sub>] = cσ<sub>A</sub><sup>2</sup> + σ<sub>e</sub><sup>2</sup>

(3) 残差の分散の期待値の導出

$$E[S_e] = E[\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^c (x_{ijk} - \bar{x}_{ij\cdot})^2] = E[\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^c (e_{ijk} - \bar{e}_{ij\cdot})^2]$$

$$= ab(c-1)\sigma_e^2$$

残差 e の自由度は  $ab(c-1)$  より、分散の期待値  $E[V_e] = \sigma_e^2$

【4】二元配置実験(繰り返し有り)の分散分析ができる

(1) 自由度の計算

表から各平方和の導出式が簡単にできますね。

-	a	b	ab	abc	1
A	1				-1
B		1			-1
A×B	-1	-1	1		1
e			-1	1	

(2) 分散分析の結果

分散分析表を作ります。

-	自由度 $\Phi$	$E[V]$
A	$a-1$	$\sigma_e^2 + bc\sigma_A^2$
B	$b-1$	$\sigma_e^2 + ac\sigma_B^2$
A×B	$(a-1)(b-1)$	$\sigma_e^2 + c\sigma_{A\times B}^2$
e	$ab(c-1)$	$\sigma_e^2$
T	$abc-1$	-

【5】主効果・交互作用の区間推定が導出できる

(1) 分散の期待値から分散の推定値を導出

分散分析から、e の分散の推定値  $E[V]$  を導出します。

$$V_e = \widehat{\sigma_e^2}$$

上の表から、分散の推定値を求めます。

(2) 主効果の点推定と区間推定

点推定： $\hat{\mu}(A_i) = \bar{x}_{i\cdot\cdot} = \mu + \widehat{\alpha}_i = \mu + \alpha_i + \bar{e}_{i\cdot\cdot}$

分散： $\widehat{Var}(\hat{\mu}(A_i)) = V[\mu + \alpha_i + \bar{e}_{i\cdot\cdot}] = V[\bar{e}_{i\cdot\cdot}] = \frac{\widehat{\sigma_e^2}}{bc}$

$V_e$  が求まったので、自由度  $\phi$  と、点推定  $\mu$  を代入すれば推定区間が求まります。

(3) 交互作用の区間推定

点推定： $\hat{\mu}(A_i B_j) = \bar{x}_{ij\cdot} = \mu + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} + \bar{e}_{ij\cdot}$

分散： $\widehat{Var}(\hat{\mu}(A_i B_j))$

$$= V[\mu + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} + \bar{e}_{ij\cdot}] = V[\bar{e}_{ij\cdot}] = \frac{\widehat{\sigma_e^2}}{c}$$

$V_e$  が求まったので、自由度  $\phi$  と、点推定  $\mu$  を代入すれば推定区間が求まります。

一連の導出過程を解説しました。

以上、二元配置実験(繰り返し有り)の分散分析の導出過程を詳細に解説しました。

【You Tube でも解説しています。ご覧ください】

[https://www.youtube.com/embed/MZ\\_t1fL\\_Wzc](https://www.youtube.com/embed/MZ_t1fL_Wzc)

【1】 四元配置実験(繰り返し有り)のデータの構造式が書ける

(1) データの構造式

4 因子の完全配置実験のデータの構造式からスタートします。機械的に書けますね。

★四元配置実験のデータの構造式

$$x_{ijklm} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_k + \delta_l + (\alpha\beta)_{ij} + (\alpha\gamma)_{ik} + (\alpha\delta)_{il} + (\beta\gamma)_{jk} + (\beta\delta)_{jl} + (\gamma\delta)_{kl} + (\alpha\beta\gamma)_{ijk} + (\alpha\beta\delta)_{ijl} + (\alpha\gamma\delta)_{ikl} + (\beta\gamma\delta)_{jkl} + (\alpha\beta\gamma\delta)_{ijkl} + e_{ijklm}$$

(2) 各平均値をデータの構造式で作る

- $\bar{x}_{i\dots} = \mu + \alpha_i + \bar{e}_{i\dots}$
- $\bar{x}_{\cdot j\dots} = \mu + \beta_j + \bar{e}_{\cdot j\dots}$
- $\bar{x}_{\cdot\cdot k\dots} = \mu + \gamma_k + \bar{e}_{\cdot\cdot k\dots}$
- $\bar{x}_{\dots l} = \mu + \delta_l + \bar{e}_{\dots l}$
- $\bar{x}_{ij\dots} = \mu + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} + \bar{e}_{ij\dots}$
- $\bar{x}_{i\cdot k\dots} = \mu + \alpha_i + \gamma_k + (\alpha\gamma)_{ik} + \bar{e}_{i\cdot k\dots}$
- $\bar{x}_{i\dots l} = \mu + \alpha_i + \delta_l + (\alpha\delta)_{il} + \bar{e}_{i\dots l}$
- $\bar{x}_{\cdot jk\dots} = \mu + \beta_j + \gamma_k + (\beta\gamma)_{jk} + \bar{e}_{\cdot jk\dots}$
- $\bar{x}_{\cdot j\dots l} = \mu + \beta_j + \delta_l + (\beta\delta)_{jl} + \bar{e}_{\cdot j\dots l}$
- $\bar{x}_{\cdot\cdot kl} = \mu + \gamma_k + \delta_l + (\gamma\delta)_{kl} + \bar{e}_{\cdot\cdot kl}$
- $\bar{x}_{ijk\dots} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_k + (\alpha\beta)_{ij} + (\alpha\gamma)_{ik} + (\beta\gamma)_{jk} + (\alpha\beta\gamma)_{ijk} + \bar{e}_{ijk\dots}$
- $\bar{x}_{ij\dots l} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \delta_l + (\alpha\beta)_{ij} + (\alpha\delta)_{il} + (\beta\delta)_{jl} + (\alpha\beta\gamma)_{ijk} + (\alpha\beta\delta)_{ijl} + \bar{e}_{ij\dots l}$
- $\bar{x}_{i\cdot kl} = \mu + \alpha_i + \gamma_k + \delta_l + (\alpha\gamma)_{ik} + (\alpha\delta)_{il} + (\gamma\delta)_{kl} + (\alpha\gamma\delta)_{ikl} + \bar{e}_{i\cdot kl}$
- $\bar{x}_{\cdot jkl} = \mu + \beta_j + \gamma_k + \delta_l + (\beta\gamma)_{jk} + (\beta\delta)_{jl} + (\gamma\delta)_{kl} + (\beta\gamma\delta)_{jkl} + \bar{e}_{\cdot jkl}$
- $\bar{x}_{ijkl} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_k + \delta_l + (\alpha\beta)_{ij} + (\alpha\gamma)_{ik} + (\alpha\delta)_{il} + (\beta\gamma)_{jk} + (\beta\delta)_{jl} + (\gamma\delta)_{kl} + (\alpha\beta\gamma)_{ijk} + (\alpha\beta\delta)_{ijl} + (\alpha\gamma\delta)_{ikl} + (\beta\gamma\delta)_{jkl} + (\alpha\beta\gamma\delta)_{ijkl} + \bar{e}_{ijkl}$
- $\bar{\bar{x}} = \mu + \bar{e}$

【2】 四元配置実験(繰り返し有り)の平方和の分解の式が書ける

(1) データの構造式を变形

式を書くと見づらいので、表にまとめます。分散分析はデータの構造式が複雑になると表で整理するのがオススメです。

-	$\bar{x}_{i...}$	$\bar{x}_{.j...}$	$\bar{x}_{..k..}$	$\bar{x}_{...l.}$	$\bar{x}_{ij...}$	$\bar{x}_{i.k..}$	$\bar{x}_{i..l.}$	$\bar{x}_{.jk..}$	$\bar{x}_{.j.l.}$	$\bar{x}_{..kl.}$	$\bar{x}_{ijk..}$	$\bar{x}_{ij.l.}$	$\bar{x}_{i.kl.}$	$\bar{x}_{.jkl.}$	$\bar{x}_{ijkl.}$	$x_{ijklm}$	$\bar{\bar{x}}$
S <sub>A</sub>	1																-1
S <sub>B</sub>		1															-1
S <sub>C</sub>			1														-1
S <sub>D</sub>				1													-1
S <sub>AB</sub>	-1	-1			1												1
S <sub>AC</sub>	-1		-1			1											1
S <sub>AD</sub>	-1			-1			1										1
S <sub>BC</sub>		-1	-1					1									1
S <sub>BD</sub>		-1		-1					1								1
S <sub>CD</sub>			-1	-1						1							1
S <sub>ABC</sub>	1	1	1		-1	-1		-1			1						-1
S <sub>ABD</sub>	1	1		1	-1		-1		-1			1					-1
S <sub>ACD</sub>	1		1	1		-1	-1			-1			1				-1
S <sub>BCD</sub>		1	1	1				-1	-1	-1				1			-1
S <sub>ABCD</sub>	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1		1
S <sub>e</sub>																1	-1

(交互作用の「×」は表のサイズにより省略して書いています。)

表から各平方和の導出式が簡単にできますね。S<sub>D</sub>、S<sub>A×C×D</sub>、S<sub>e</sub>を例に挙げます。

$$\cdot S_D = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^c \sum_{l=1}^d \sum_{m=1}^e (\bar{x}_{i...} - \bar{\bar{x}})^2$$

$$\cdot S_{A \times C \times D} = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^c \sum_{l=1}^d \sum_{m=1}^e (\bar{x}_{ij.l.} - \bar{x}_{i.j...} - \bar{x}_{i..l.} - \bar{x}_{.j.l.} + \bar{x}_{i...} + \bar{x}_{.j...} + \bar{x}_{...l.} - \bar{\bar{x}})^2$$

$$\cdot S_e = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^c \sum_{l=1}^d \sum_{m=1}^e (x_{ijklm} - \bar{x}_{ijkl.})^2$$

と書けますね。他の平方和も計算できます。

### 【3】主効果・交互作用・誤差の期待値が導出できる

#### (1) 主効果の分散の期待値の導出

$$E[S_D] = E[\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^c \sum_{l=1}^d \sum_{m=1}^e (\bar{x}_{i...} - \bar{\bar{x}})^2] = E[\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^c \sum_{l=1}^d \sum_{m=1}^e (\delta_l + (\bar{e}_{i..} - \bar{e}))^2]$$

$$= abce(d-1)\sigma_D^2 + (d-1)\sigma_e^2$$

主効果 D の自由度は(d-1)より、分散の期待値 E[V<sub>D</sub>] = abceσ<sub>D</sub><sup>2</sup> + σ<sub>e</sub><sup>2</sup>

#### (2) 交互作用の分散の期待値の導出

$$E[S_{A \times C \times D}] = E[\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^c \sum_{l=1}^d \sum_{m=1}^e (\bar{x}_{ij.l.} - \bar{x}_{i.j...} - \bar{x}_{i..l.} - \bar{x}_{.j.l.} + \bar{x}_{i...} + \bar{x}_{.j...} + \bar{x}_{...l.} - \bar{\bar{x}})^2]$$

$$= E[\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^c \sum_{l=1}^d \sum_{m=1}^e ((\alpha\beta\delta)_{ijl} + (\bar{e}_{ij.l.} - \bar{e}_{i.j...} - \bar{e}_{i..l.} - \bar{e}_{.j.l.} + \bar{e}_{i...} + \bar{e}_{.j...} + \bar{e}_{...l.} - \bar{e}))^2]$$

$$= ce(a-1)(c-1)(d-1)\sigma_{A \times C \times D}^2 + (a-1)(c-1)(d-1)\sigma_e^2$$

交互作用 A×C×D の自由度は(a-1)(c-1)(d-1)より、分散の期待値 E[V<sub>A×C×D</sub>] = ceσ<sub>A×C×D</sub><sup>2</sup> + σ<sub>e</sub><sup>2</sup>

#### (3) 残差の分散の期待値の導出

$$E[S_e] = E[\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^c \sum_{l=1}^d \sum_{m=1}^e (x_{ijklm} - \bar{x}_{ijkl.})^2] = E[\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^c \sum_{l=1}^d \sum_{m=1}^e (e_{ijklm} - \bar{e}_{ijkl.})^2]$$

$$= abcd(e-1)\sigma_e^2$$

残差 e の自由度はabcd(e-1)より、分散の期待値 E[V<sub>e</sub>] = σ<sub>e</sub><sup>2</sup>

【4】 四元配置実験(繰り返し有り)の分散分析ができる

(1) 自由度の計算

表から各平方和の導出式が簡単にできますね。

-	a	b	c	d	ab	ac	ad	bc	bd	cd	abc	abd	acd	bcd	abcd	abcde	1
A	1																-1
B		1															-1
C			1														-1
D				1													-1
A×B	-1	-1			1												1
A×C	-1		-1			1											1
A×D	-1			-1			1										1
B×C		-1	-1					1									1
B×D		-1		-1					1								1
C×D			-1	-1						1							1
A×B×C	1	1	1		-1	-1		-1			1						-1
A×B×D	1	1		1	-1		-1		-1			1					-1
A×C×D	1		1	1		-1	-1			-1			1				-1
B×C×D		1	1	1				-1	-1	-1				1			-1
A×B×C×D	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1		1
e																1	-1

(2) 分散分析の結果

分散分析表を作ります。

-	自由度 $\Phi$	E[V]
A	$a - 1$	$\sigma_e^2 + bcde\sigma_A^2$
B	$b - 1$	$\sigma_e^2 + acde\sigma_B^2$
C	$c - 1$	$\sigma_e^2 + abdc\sigma_C^2$
D	$d - 1$	$\sigma_e^2 + abce\sigma_D^2$
A×B	$(a - 1)(b - 1)$	$\sigma_e^2 + cde\sigma_{A \times B}^2$
A×C	$(a - 1)(c - 1)$	$\sigma_e^2 + bde\sigma_{A \times C}^2$
A×D	$(a - 1)(d - 1)$	$\sigma_e^2 + bce\sigma_{A \times D}^2$
B×C	$(b - 1)(c - 1)$	$\sigma_e^2 + ade\sigma_{B \times C}^2$
B×D	$(b - 1)(d - 1)$	$\sigma_e^2 + ace\sigma_{B \times D}^2$
C×D	$(c - 1)(d - 1)$	$\sigma_e^2 + abe\sigma_{C \times D}^2$
A×B×C	$(a - 1)(b - 1)(c - 1)$	$\sigma_e^2 + de\sigma_{A \times B \times C}^2$
A×B×D	$(a - 1)(b - 1)(d - 1)$	$\sigma_e^2 + ce\sigma_{A \times B \times D}^2$
A×C×D	$(a - 1)(c - 1)(d - 1)$	$\sigma_e^2 + be\sigma_{A \times C \times D}^2$
B×C×D	$(b - 1)(c - 1)(d - 1)$	$\sigma_e^2 + ae\sigma_{B \times C \times D}^2$
A×B×C×D	$(a - 1)(b - 1)(c - 1)(d - 1)$	$\sigma_e^2 + e\sigma_{A \times B \times C \times D}^2$
e	$abcd(e - 1)$	$\sigma_e^2$
T	$abcde - 1$	-

**【5】 主効果・交互作用の区間推定が導出できる**

(1) 分散の期待値から分散の推定値を導出

分散分析から、eの分散の推定値  $E[V]$  を導出します。

$$V_e = \widehat{\sigma_e^2}$$

上の表から、分散の推定値を求めます。

(2) 主効果の点推定と区間推定

点推定： $\hat{\mu}(D_l) = \overline{x_{\dots l}} = \widehat{\mu + \delta_l} = \mu + \delta_l + \overline{e_{\dots l}}$

分散： $\widehat{Var}(\hat{\mu}(D_l)) = V[\mu + \delta_l + \overline{e_{\dots l}}] = V[\overline{e_{\dots l}}] = \frac{\widehat{\sigma_e^2}}{abce}$

$V_e$  が求まったので、自由度  $\phi$  と、点推定  $\mu$  を代入すれば推定区間が求まります。

(3) 交互作用の区間推定

点推定： $\hat{\mu}(A_i B_j D_l) = \overline{x_{ij \dots l}} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \delta_l + (\alpha\beta)_{ij} + (\alpha\delta)_{il} + (\beta\delta)_{jl} + (\alpha\beta\gamma)_{ijk} + (\alpha\beta\delta)_{ijl} + \overline{e_{ij \dots l}}$

分散： $\widehat{Var}(\hat{\mu}(A_i C_k))$

$$= V[\mu + \alpha_i + \beta_j + \delta_l + (\alpha\beta)_{ij} + (\alpha\delta)_{il} + (\beta\delta)_{jl} + (\alpha\beta\gamma)_{ijk} + (\alpha\beta\delta)_{ijl} + \overline{e_{ij \dots l}}] = V[\overline{e_{ij \dots l}}] = \frac{\widehat{\sigma_e^2}}{ce}$$

$V_e$  が求まったので、自由度  $\phi$  と、点推定  $\mu$  を代入すれば推定区間が求まります。

一連の導出過程を解説しました。

以上、四元配置実験(繰り返し有り)の分散分析の導出過程を詳細に解説しました。

【You Tube でも解説しています。ご覧ください】

<https://youtu.be/C3yVqGVca1c>

【1】 分割法とは何かがわかる

(1) 教科書の定義は重要ではない

全条件をランダムに実験できない場合、実験を複数に分けて、その中でランダムにする方法が分割法である。  
⇒よくわかりませんよね。でも、心配は不要です

(2) データの構造式から分割法を理解する

- ・完全配置実験のデータの構造式を作る
- ・一部の項を変形すれば分割法になる

【2】 分割法のデータの構造式が書ける

(1) データの構造式

1 段分割が 2 因子、2 段分割が 1 因子から構成する 3 因子の分割法を考えます。

① 三元配置実験のデータの構造式

$$x_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_k + (\alpha\beta)_{ij} + (\alpha\gamma)_{ik} + (\beta\gamma)_{jk} + e_{ijk}$$

$$(\alpha\gamma)_{ik} = e_{(1)ik}$$

$$(\beta\gamma)_{jk} + e_{ijk} = e_{(2)ijk}$$

に変形すると、分割法(2 因子+1 因子の 2 段分割)のデータの構造式ができます。

② 分割法のデータの構造式

$$x_{ijk} = \mu + \gamma_k + \alpha_i + e_{(1)ik} + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} + e_{(2)ijk}$$

(2) 各平均値をデータの構造式で作る

① 母数因子と変数因子の違い

本冊子の「【簡単】母数因子と変数因子の違いがすぐわかる」にて、母数因子と変数因子を解説しました。

② 母数因子と変数因子

- ・母数因数： $\alpha$ 、 $\beta$ 、 $\alpha\beta$
- ・変数因子： $r$ 、 $e_{(1)}$ 、 $e_{(2)}$

③ 平均値

- ・母数因数の平均は 0。
- ・変数因子の平均は 0 ではない。

平均値を式にする場合、添字のない文字項はすべて 0 にしますが、変数因子の場合は平均値をいれます。

④ 平均値の式の代表例

- ・データの構造式  $x_{ijk} = \mu + \gamma_k + \alpha_i + e_{(1)ik} + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} + e_{(2)ijk}$
- ・  $\bar{x}_{i..} = \mu + \bar{\gamma} + \alpha_i + \bar{e}_{(1)i.} + \bar{e}_{(2)i.}$
- ・  $\bar{x}_{.j.} = \mu + \bar{\gamma} + \beta_j + \bar{e}_{(2).j.}$
- ・  $\bar{x}_{..k} = \mu + \gamma_k + \bar{e}_{(1)..k} + \bar{e}_{(2)..k}$
- ・  $\bar{x}_{i.j.} = \mu + \bar{\gamma} + \alpha_i + \bar{e}_{(1)i.} + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} + \bar{e}_{(2)ij.}$
- ・  $\bar{x}_{i.k} = \mu + \gamma_k + \alpha_i + e_{(1)ik} + \bar{e}_{(2)ik}$
- ・  $\bar{\bar{x}} = \mu + \bar{\gamma} + \bar{e}$

**【3】** 分割法の平方和の分解の式が書ける

(1) データの構造式を変形

式を書くと見づらいので、表にまとめます。分散分析はデータの構造式が複雑になると表で整理するのがオススメです。

	$x_{ijk}$	$\bar{x}_{i\cdot}$	$\bar{x}_{\cdot j}$	$\bar{x}_{\cdot k}$	$\bar{x}_{ij\cdot}$	$\bar{x}_{\cdot jk}$	$\bar{x}_{i\cdot k}$	$\bar{\bar{x}}$
$S_R$				1				-1
$S_A$		1						-1
$S_{e(1)}$		-1		-1			1	1
$S_B$			1					-1
$S_{A \times B}$		-1	-1		1			1
$S_{e(2)}$	1	1			-1		-1	1
$S_T$ (計)	1							-1

表から各平方和の導出式が簡単にできますね。  $S_A$ 、 $S_{A \times B}$ 、 $S_{e(2)}$ を例に挙げます。

$$\cdot S_A = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^c (\bar{x}_{i\cdot} - \bar{\bar{x}})^2$$

$$\cdot S_{A \times B} = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^c (\bar{x}_{ij\cdot} - \bar{x}_{i\cdot} - \bar{x}_{\cdot j} + \bar{\bar{x}})^2$$

$$\cdot S_{e(2)} = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^c (x_{ijk} - \bar{x}_{ij\cdot} - \bar{x}_{\cdot k} + \bar{x}_{i\cdot})^2$$

**【4】** 分割法の主効果・交互作用・誤差の期待値が導出できる

(1) 主効果の分散の期待値の導出

$$E[S_A] = E[\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^c (\bar{x}_{i\cdot} - \bar{\bar{x}})^2] = E[\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^c (\alpha_i + \bar{e}_{(1)i\cdot} + \bar{e}_{(2)i\cdot} - \bar{\bar{e}})^2]$$

$$= E[\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^c (\alpha_i)^2] + E[\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^c (\bar{e}_{(1)i\cdot} + \bar{e}_{(2)i\cdot} - \bar{\bar{e}})^2] = bc(a-1)\sigma_A^2 + (a-1)(b\sigma_{e(1)}^2 + \sigma_{e(2)}^2)$$

主効果 A の自由度は  $(a-1)$  より、分散の期待値  $E[V_A]$  を求めます。

$$E[V_A] = bc\sigma_A^2 + (b\sigma_{e(1)}^2 + \sigma_{e(2)}^2)$$

(2) 交互作用の分散の期待値の導出

$$E[S_{A \times B}] = E[\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^c (\bar{x}_{ij\cdot} - \bar{x}_{i\cdot} - \bar{x}_{\cdot j} + \bar{\bar{x}})^2] = cE[\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b ((\alpha\beta)_{ij} + (\bar{e}_{(2)ij\cdot} - \bar{e}_{(2)i\cdot} - \bar{e}_{(2)\cdot j} + \bar{\bar{e}}))^2]$$

$$= cE[\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b ((\alpha\beta)_{ij})^2] + E[\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^c (\bar{e}_{(2)ij\cdot} - \bar{e}_{(2)i\cdot} - \bar{e}_{(2)\cdot j} + \bar{\bar{e}})^2]$$

$$= c(a-1)(b-1)\sigma_{A \times B}^2 + (a-1)(b-1)\sigma_e^2$$

交互作用  $A \times B$  の自由度は  $(a-1)(b-1)$  より、分散の期待値  $E[V_{A \times B}]$  を求めます。

$$E[V_{A \times B}] = c\sigma_{A \times B}^2 + \sigma_e^2$$

(3) 残差の分散の期待値の導出

$$E[S_{e(2)}] = E[\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^c (x_{ijk} - \bar{x}_{ij\cdot} - \bar{x}_{\cdot k} + \bar{x}_{i\cdot})^2] = E[\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^c (e_{(2)ijk} - \bar{e}_{(2)ijk} - \bar{e}_{(2)\cdot k} + \bar{e}_{(2)i\cdot})^2]$$

$$= a(b-1)(c-1)\sigma_e^2$$

残差  $e(2)$  の自由度は  $a(b-1)(c-1)$  より、分散の期待値  $E[V_{e(2)}]$  を求めます。

$$E[V_{e(2)}] = \sigma_e^2$$

**【5】 分割法の分散分析ができる**

(1) 自由度の計算

各主効果・交互作用の自由度の計算は簡単です。

**【関連記事】【簡単】 データの構造式で実験計画法がわかる(必読)**  
<https://qcplanets.com/method/doe/data-structure/>

- ① データの構造式を書く
- ② 主効果・交互作用の構造式にある添字から自由度を算出
- ③ 自由度は表を活用すると簡単に求まる

自由度をまとめます。

-	a	b	c	ab	ac	bc	abc	1
R			1					-1
A	1							-1
e(1)	-1		-1		1			1
B		1						-1
A×B	-1	-1		1				1
e(2)	1			-1	-1		1	
T							1	-1

(2) 分散分析の結果

分散分析表を作ります。

-	自由度Φ	E[V]
R	$c - 1$	$ab\sigma_R^2 + b\sigma_{e(1)}^2 + \sigma_{e(2)}^2$
A	$a - 1$	$bc\sigma_A^2 + b\sigma_{e(1)}^2 + \sigma_{e(2)}^2$
e(1)	$(a - 1)(c - 1)$	$b\sigma_{e(1)}^2 + \sigma_{e(2)}^2$
B	$b - 1$	$ac\sigma_B^2 + \sigma_{e(2)}^2$
A×B	$(a - 1)(b - 1)$	$c\sigma_{A\times B}^2 + \sigma_{e(2)}^2$
e(2)	$a(b - 1)(c - 1)$	$\sigma_{e(2)}^2$
T	$abc - 1$	-

**【6】 分割法の主効果・交互作用の区間推定が導出できる**

(1) 母平均の点推定の導出方法

**【関連記事】【簡単】 データの構造式から母平均の点推定が導出できる**  
<https://qcplanets.com/method/doe/point-estimation/>

(2) 有効繰返し数と区間推定の導出方法

区間推定 
$$\bar{\mu} + t(\Phi_e, \alpha) \sqrt{\frac{V_e}{n_e}}$$

- ★区間推定のポイント
1. ルートの中は、誤差 e の分散から個数を割ったものが入る
  2. 誤差 e の自由度  $\phi$  は  $\Phi_e$  である。
  3.  $V_e$  が複数項である場合、サタースウェイトの式から自由度を導

(3) 主効果の点推定と区間推定の導出

① 分散の期待値から分散の推定値を導出

分散分析から、R、e(1)と e(2)の分散の推定値 E[V]を導出します。

-	V
R	$V_R = ab\widehat{\sigma_R^2} + b\widehat{\sigma_{e(1)}^2} + \widehat{\sigma_{e(2)}^2}$
e(1)	$V_{e(1)} = b\widehat{\sigma_{e(1)}^2} + \widehat{\sigma_{e(2)}^2}$
e(2)	$V_{e(2)} = \widehat{\sigma_{e(2)}^2}$

上の表から、分散の推定値を求めます。

$$\widehat{\sigma_R^2} = \frac{1}{ab}(V_R - V_{e(1)})$$

$$\widehat{\sigma_{e(1)}^2} = \frac{1}{b}(V_{e(1)} - V_{e(2)})$$

$$\widehat{\sigma_{e(2)}^2} = V_{e(2)}$$

② 主効果の点推定と区間推定

点推定： $\hat{\mu}(A_i) = \bar{x}_{i..} = \widehat{\mu} + \widehat{\alpha}_i = \mu + \bar{r} + \alpha_i + \overline{e_{(1)l.}} + \overline{e_{(2)l..}}$

分散： $V\widehat{ar}(\hat{\mu}(A_i)) = V[\mu + \bar{r} + \alpha_i + \overline{e_{(1)l.}} + \overline{e_{(2)l..}}] = V[\bar{r}] + V[\overline{e_{(1)l.}}] + V[\overline{e_{(2)l..}}] = \frac{\widehat{\sigma_R^2}}{c} + \frac{\widehat{\sigma_{e(1)}^2}}{c} + \frac{\widehat{\sigma_{e(2)}^2}}{bc}$

Ve が求まったので、自由度 φ と、点推定 μ を代入すれば推定区間が求まります。

③ 交互作用の区間推定

点推定：

点推定： $\hat{\mu}(A_i B_j) = \bar{x}_{ij.} = \mu + \alpha_i + \widehat{\beta}_j + (\alpha\beta)_{ij} = \mu + \bar{r} + \alpha_i + \overline{e_{(1)l.}} + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} + \overline{e_{(2)l.j.}}$

分散： $V\widehat{ar}(\hat{\mu}(A_i B_j)) = V[\mu + \bar{r} + \alpha_i + \overline{e_{(1)l.}} + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} + \overline{e_{(2)l.j.}}] = V[\bar{r}] + V[\overline{e_{(1)l.}}] + V[\overline{e_{(2)l.j.}}] = \frac{\widehat{\sigma_R^2}}{c} + \frac{\widehat{\sigma_{e(1)}^2}}{c} + \frac{\widehat{\sigma_{e(2)}^2}}{c}$

Ve が求まったので、自由度 φ と、点推定 μ を代入すれば推定区間が求まります。

一連の導出過程を解説しました。

以上、分割法の分散分析の導出過程を詳細に解説しました。

【You Tube でも解説しています。ご覧ください】

<https://www.youtube.com/embed/UmL9AAekk8A>

【1】 分割法とは何かがわかる

(1) 教科書の定義は重要ではない

全条件をランダムに実験できない場合、実験を複数に分けて、その中でランダムにする方法が分割法である。  
⇒よくわかりませんよね。でも、心配は不要です

(2) データの構造式から分割法を理解する

- ・ 完全配置実験のデータの構造式を作る
- ・ 一部の項を変形すれば分割法になる

【2】 分割法のデータの構造式が書ける

(1) データの構造式

1 段分割が 2 因子、2 段分割が 1 因子から構成する 3 因子の分割法で、3 因子の交互作用を見るために、添字が ijkl と 4 種類ある場合を考えます。

① 四元配置実験のデータの構造式

$$x_{ijkl} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_k + \delta_l + (\alpha\beta)_{ij} + (\alpha\gamma)_{ik} + (\alpha\delta)_{il} + (\beta\gamma)_{jk} + (\beta\delta)_{jl} + (\gamma\delta)_{kl} + (\alpha\beta\gamma)_{ijk} + (\alpha\beta\delta)_{ijl} + (\alpha\gamma\delta)_{ikl} + (\beta\gamma\delta)_{jkl} + e_{ijkl}$$

●  $(\alpha\beta)_{ij} = e_{(1)ij}$

●  $\delta_l + (\alpha\delta)_{il} + (\beta\gamma)_{jk} + (\beta\delta)_{jl} + (\gamma\delta)_{kl} + (\alpha\beta\delta)_{ijl} + (\alpha\gamma\delta)_{ikl} + (\beta\gamma\delta)_{jkl} + e_{ijkl} = e_{(2)ijkl}$

に変形すると、分割法のデータの構造式ができます。

② 分割法のデータの構造式

$$x_{ijkl} = \mu + \alpha_i + \beta_j + e_{(1)ij} + \gamma_k + (\alpha\gamma)_{ik} + (\alpha\beta\gamma)_{ijk} + e_{(2)ijkl}$$

(2) 各平均値をデータの構造式で作る

- ・  $\overline{x_{ijk}} = \mu + \alpha_i + \beta_j + e_{(1)ij} + \gamma_k + (\alpha\gamma)_{ik} + (\alpha\beta\gamma)_{ijk} + \overline{e_{(2)ijk}}$
- ・  $\overline{x_{ij\cdot}} = \mu + \alpha_i + \beta_j + e_{(1)ij} + \overline{e_{(2)ij\cdot}}$
- ・  $\overline{x_{i\cdot k}} = \mu + \alpha_i + \overline{e_{(1)i\cdot}} + \gamma_k + (\alpha\gamma)_{ik} + \overline{e_{(2)i\cdot k}}$
- ・  $\overline{x_{\cdot jk}} = \mu + \beta_j + \overline{e_{(1)\cdot j}} + \gamma_k + \overline{e_{(2)\cdot jk}}$
- ・  $\overline{x_{i\cdot\cdot}} = \mu + \alpha_i + \overline{e_{(1)i\cdot}} + \overline{e_{(2)i\cdot\cdot}}$
- ・  $\overline{x_{\cdot j\cdot\cdot}} = \mu + \beta_j + \overline{e_{(1)\cdot j}} + \overline{e_{(2)\cdot j\cdot\cdot}}$
- ・  $\overline{x_{\cdot\cdot k}} = \mu + \gamma_k + \overline{e_{(2)\cdot\cdot k}}$
- ・  $\overline{\bar{x}} = \mu + \overline{e}$

【3】 分割法の平方和の分解の式が書ける

(1) データの構造式を変形

-	$x_{ijkl}$	$\overline{x_{i\cdot\cdot}}$	$\overline{x_{\cdot j\cdot\cdot}}$	$\overline{x_{\cdot\cdot k}}$	$\overline{x_{ij\cdot\cdot}}$	$\overline{x_{i\cdot k}}$	$\overline{x_{\cdot jk}}$	$\overline{x_{ijk\cdot}}$	$\overline{\bar{x}}$
SA		1							-1
SB			1						-1
Se(1)		-1	-1		1				1
SC				1					-1
SA×C		-1		-1		1			1
SA×B×C		1	1	1	-1	-1	-1	1	-1
Se(2)	1		-1	-1			1	-1	1
ST(計)	1								-1

表から各平方和の導出式が簡単にできますね。S<sub>A</sub>、S<sub>A×B</sub>、S<sub>e(2)</sub>を例に挙げます。

$$\bullet S_A = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^c \sum_{l=1}^d (\bar{x}_{i\cdot\cdot\cdot} - \bar{\bar{x}})^2$$

$$\bullet S_{A \times C} = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^c \sum_{l=1}^d (\bar{x}_{i\cdot k\cdot} - \bar{x}_{i\cdot\cdot\cdot} - \bar{x}_{\cdot\cdot k\cdot} + \bar{\bar{x}})^2$$

$$\bullet S_{e(2)} = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^c \sum_{l=1}^d (x_{ijkl} - \bar{x}_{i\cdot j\cdot} - \bar{x}_{\cdot\cdot k\cdot} + \bar{x}_{\cdot j k\cdot} - \bar{x}_{i j k\cdot} + \bar{\bar{x}})^2$$

と書けますね。他の平方和も計算できます。

**【4】 分割法の主効果・交互作用・誤差の期待値が導出できる**

(1) 主効果の分散の期待値の導出

$$E[S_A] = E[\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^c \sum_{l=1}^d (\bar{x}_{i\cdot\cdot\cdot} - \bar{\bar{x}})^2] = E[\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^c \sum_{l=1}^d (\alpha_i + \bar{e}_{(1)l\cdot} + \bar{e}_{(2)l\cdot} - \bar{\bar{e}})^2]$$

$$= E[\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^c \sum_{l=1}^d (\alpha_i)^2] + E[\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^c \sum_{l=1}^d (\bar{e}_{(1)l\cdot} + \bar{e}_{(2)l\cdot} - \bar{\bar{e}})^2]$$

$$= bcd(a-1)\sigma_A^2 + (a-1)(cd\sigma_{e(1)}^2 + \sigma_{e(2)}^2)$$

主効果 A の自由度は(a-1)より、分散の期待値 E[V<sub>A</sub>]を求めます。

$$E[V_A] = bcd\sigma_A^2 + (cd\sigma_{e(1)}^2 + \sigma_{e(2)}^2)$$

(2) 交互作用の分散の期待値の導出

$$E[S_{A \times C}] = E[\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^c \sum_{l=1}^d (\bar{x}_{i\cdot k\cdot} - \bar{x}_{i\cdot\cdot\cdot} - \bar{x}_{\cdot\cdot k\cdot} + \bar{\bar{x}})^2]$$

$$= E[\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^c \sum_{l=1}^d ((\alpha\gamma)_{ik} + (\bar{e}_{(2)l\cdot k\cdot} - \bar{e}_{(2)l\cdot\cdot\cdot} - \bar{e}_{(2)\cdot\cdot k\cdot} + \bar{\bar{e}}))^2]$$

$$= E[\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^c \sum_{l=1}^d (\alpha\gamma)_{ik}^2] + E[\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^c \sum_{l=1}^d (\bar{e}_{(2)l\cdot k\cdot} - \bar{e}_{(2)l\cdot\cdot\cdot} - \bar{e}_{(2)\cdot\cdot k\cdot} + \bar{\bar{e}})^2]$$

$$= bd(a-1)(c-1)\sigma_{A \times C}^2 + (a-1)(c-1)\sigma_{e(2)}^2$$

交互作用 A×C の自由度は(a-1)(c-1)より、分散の期待値 E[V<sub>A×C</sub>]を求めます。

$$E[V_{A \times C}] = bd\sigma_{A \times C}^2 + \sigma_{e(2)}^2$$

(3) 残差の分散の期待値の導出

$$E[S_{e(2)}] = E[\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^c \sum_{l=1}^d (x_{ijkl} - \bar{x}_{i\cdot j\cdot} - \bar{x}_{\cdot\cdot k\cdot} + \bar{x}_{\cdot j k\cdot} - \bar{x}_{i j k\cdot} + \bar{\bar{x}})^2]$$

$$= \{abc(d-1) + (b-1)(c-1)\}\sigma_{e(2)}^2$$

残差 e<sub>(2)</sub>の自由度はabc(d-1) + (b-1)(c-1)より、分散の期待値 E[V<sub>e(2)</sub>]が求まります。

$$E[S_{e(2)}] = \sigma_{e(2)}^2$$

**【5】 分割法の分散分析ができる**

(1) 自由度の計算

各主効果・交互作用の自由度の計算は簡単です。

**【関連記事】【簡単】 データの構造式で実験計画法がわかる(必読)**  
<https://qcplanets.com/method/doe/data-structure/>

- ① データの構造式を書く
- ② 主効果・交互作用の構造式にある添字から自由度を算出
- ③ 自由度は表を活用すると簡単に求まる

自由度をまとめます。

-	a	b	c	ab	ac	bc	abc	abcd	1
A	1								-1
B		1							-1
e(1)	-1	-1		1					1
C			1						-1
AC	-1		-1		1				1
ABC	1	1	1	-1	-1	-1	1		-1
e(2)		-1	-1			1	-1	1	1
T								1	-1

(2) 分散分析の結果

分散分析表を作ります。

-	自由度 $\Phi$	E[V]
A	$a - 1$	$cd\sigma_{e(1)}^2 + \sigma_{e(2)}^2 + bcd\sigma_A^2$
B	$b - 1$	$cd\sigma_{e(1)}^2 + \sigma_{e(2)}^2 + acd\sigma_B^2$
e(1)	$(a - 1)(b - 1)$	$cd\sigma_{e(1)}^2 + \sigma_{e(2)}^2$
C	$c - 1$	$\sigma_{e(2)}^2 + abd\sigma_C^2$
AC	$(a - 1)(c - 1)$	$\sigma_{e(2)}^2 + bd\sigma_{A \times C}^2$
ABC	$(a - 1)(b - 1)(c - 1)$	$\sigma_{e(2)}^2 + d\sigma_{A \times B \times C}^2$
e(2)	$abc(d - 1) + (b - 1)(c - 1)$	$\sigma_{e(2)}^2$
T	$abcd - 1$	-

**【6】 分割法の主効果・交互作用の区間推定が導出できる**

(1) 母平均の点推定の導出方法

**【関連記事】【簡単】 データの構造式から母平均の点推定が導出できる**  
<https://qcplanets.com/method/doe/point-estimation/>

(2) 有効繰返し数と区間推定の導出方法

区間推定 
$$\bar{\mu} + t(\Phi_e, \alpha) \sqrt{\frac{V_e}{n_e}}$$

★区間推定のポイント

1. ルートの中は、誤差 e の分散から個数を割ったものが入る。
2. 誤差 e の自由度  $\phi$  は  $\phi_e$  である。
3.  $V_e$  が複数項である場合、サタースウェイトの式から自由度を導く。

(3) 主効果の点推定と区間推定の導出

① 分散の期待値から分散の推定値を導出

分散分析から、 $e_{(1)}$  と  $e_{(2)}$  の分散の推定値  $E[V]$  を導出します。

-	V
$e_{(1)}$	$V_{e(1)} = cd\widehat{\sigma_{e(1)}^2} + \widehat{\sigma_{e(2)}^2}$
$e_{(2)}$	$V_{e(2)} = \widehat{\sigma_{e(2)}^2}$

上の表から、分散の推定値を求めます。

$$\widehat{\sigma_{e(1)}^2} = \frac{1}{cd} (V_{e(1)} - V_{e(2)})$$

$$\widehat{\sigma_{e(2)}^2} = V_{e(2)}$$

② 主効果の点推定と区間推定

点推定： $\hat{\mu}(B_j) = \overline{x_{\cdot j \cdot}} = \mu + \widehat{\beta_j} = \mu + \beta_j + \overline{e_{(1) \cdot j}} + \overline{e_{(2) \cdot j \cdot}}$

分散： $\widehat{Var}(\hat{\mu}(B_j)) = V[\mu + \beta_j + \overline{e_{(1) \cdot j}} + \overline{e_{(2) \cdot j \cdot}}] = V[\overline{e_{(1) \cdot j}}] + V[\overline{e_{(2) \cdot j \cdot}}] = \frac{\widehat{\sigma_{e(1)}^2}}{a} + \frac{\widehat{\sigma_{e(2)}^2}}{acd}$

$V_e$  が求まったので、自由度  $\phi$  と、点推定  $\mu$  を代入すれば推定区間が求まります。

③ 交互作用の区間推定

点推定： $\hat{\mu}(A_i B_j C_k) = \overline{x_{ijk}} = \mu + \alpha_i + \beta_j + e_{(1)ij} + \gamma_k + (\alpha\gamma)_{ik} + (\alpha\beta\gamma)_{ijk} + \overline{e_{(2)ijk}}$

分散： $\widehat{Var}(\hat{\mu}(A_i B_j C_k)) = V[\mu + \alpha_i + \beta_j + e_{(1)ij} + \gamma_k + (\alpha\gamma)_{ik} + (\alpha\beta\gamma)_{ijk} + \overline{e_{(2)ijk}}] = V[e_{(1)ij}] + V[\overline{e_{(2)ijk}}]$   
 $= \widehat{\sigma_{e(1)}^2} + \frac{\widehat{\sigma_{e(2)}^2}}{d}$

$V_e$  が求まったので、自由度  $\phi$  と、点推定  $\mu$  を代入すれば推定区間が求まります。

一連の導出過程を解説しました。

以上、分割法の分散分析の導出過程を詳細に解説しました。

【You Tube でも解説しています。ご覧ください】

<https://www.youtube.com/embed/aI34PJtxYRU>

【1】 分割法とは何かがわかる

(1) 教科書の定義は重要ではない

全条件をランダムに実験できない場合、実験を複数に分けて、その中でランダムにする方法が分割法である。  
⇒よくわかりませんよね。でも、心配は不要です

(2) データの構造式から分割法を理解する

- ・ 完全配置実験のデータの構造式を作る
- ・ 一部の項を変形すれば分割法になる

【2】 分割法のデータの構造式が書ける

(1) データの構造式

① 四元配置実験のデータの構造式

$$x_{ijkl} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_k + \delta_l + (\alpha\beta)_{ij} + (\alpha\gamma)_{ik} + (\alpha\delta)_{il} + (\beta\gamma)_{jk} + (\beta\delta)_{jl} + (\gamma\delta)_{kl} + (\alpha\beta\gamma)_{ijk} + (\alpha\beta\delta)_{ijl} + (\alpha\gamma\delta)_{ikl} + (\beta\gamma\delta)_{jkl} + e_{ijkl}$$

$$\bullet (\alpha\delta)_{il} = e_{(1)il}$$

$$\bullet (\alpha\beta\delta)_{ijl} = e_{(2)ijl}$$

$$\bullet (\beta\delta)_{jl} + (\gamma\delta)_{kl} + (\alpha\gamma\delta)_{ikl} + (\beta\gamma\delta)_{jkl} + e_{ijkl} = e_{(3)ijkl}$$

に変形すると、分割法のデータの構造式ができます。

② 分割法のデータの構造式

$$x_{ijkl} = \mu + \delta_l + \alpha_i + e_{(1)il} + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} + e_{(2)ijl} + \gamma_k + (\alpha\gamma)_{ik} + (\beta\gamma)_{jk} + (\alpha\beta\gamma)_{ijk} + e_{(3)ijkl}$$

(2) 各平均値をデータの構造式で作る

- ・  $\bar{x}_{ijk\cdot} = \mu + \delta + \alpha_i + \bar{e}_{(1)l\cdot} + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} + \bar{e}_{(2)ij\cdot} + \gamma_k + (\alpha\gamma)_{ik} + (\beta\gamma)_{jk} + (\alpha\beta\gamma)_{ijk} + \bar{e}_{(3)ijk\cdot}$
- ・  $\bar{x}_{ij\cdot l} = \mu + \delta_l + \alpha_i + e_{(1)il} + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} + e_{(2)ijl} + \bar{e}_{(3)ij\cdot l}$
- ・  $\bar{x}_{i\cdot\cdot} = \mu + \delta + \alpha_i + \bar{e}_{(1)l\cdot} + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} + \bar{e}_{(2)ij\cdot} + \bar{e}_{(3)ij\cdot\cdot}$
- ・  $\bar{x}_{i\cdot k\cdot} = \mu + \delta + \alpha_i + \bar{e}_{(1)l\cdot} + \bar{e}_{(2)l\cdot\cdot} + \gamma_k + (\alpha\gamma)_{ik} + \bar{e}_{(3)l\cdot k\cdot}$
- ・  $\bar{x}_{i\cdot\cdot l} = \mu + \delta_l + \alpha_i + e_{(1)il} + \bar{e}_{(2)l\cdot l} + \bar{e}_{(3)l\cdot\cdot l}$
- ・  $\bar{x}_{\cdot jk\cdot} = \mu + \delta + \beta_j + \bar{e}_{(2)\cdot j\cdot} + \gamma_k + (\beta\gamma)_{jk} + \bar{e}_{(3)\cdot jk\cdot}$
- ・  $\bar{x}_{i\cdot\cdot\cdot} = \mu + \delta + \alpha_i + \bar{e}_{(1)l\cdot} + \bar{e}_{(2)l\cdot\cdot} + \bar{e}_{(3)l\cdot\cdot\cdot}$
- ・  $\bar{x}_{\cdot j\cdot\cdot} = \mu + \delta + \beta_j + \bar{e}_{(2)\cdot j\cdot} + \bar{e}_{(3)\cdot j\cdot\cdot}$
- ・  $\bar{x}_{\cdot\cdot k\cdot} = \mu + \delta + \gamma_k + \bar{e}_{(3)\cdot\cdot k\cdot}$
- ・  $\bar{x}_{\cdot\cdot\cdot l} = \mu + \delta_l + \bar{e}_{(1)\cdot l} + \bar{e}_{(2)\cdot\cdot l} + \bar{e}_{(3)\cdot\cdot\cdot l}$
- ・  $\bar{\bar{x}} = \mu + \delta + \bar{\bar{e}}$

**【3】 分割法の平方和の分解の式が書ける**

(1) データの構造式を変形

-	$\bar{x}_{i...}$	$\bar{x}_{.j..}$	$\bar{x}_{..k.}$	$\bar{x}_{...l}$	$\bar{x}_{ij..}$	$\bar{x}_{i.k.}$	$\bar{x}_{i..l}$	$\bar{x}_{.jk.}$	$\bar{x}_{.j.l}$	$\bar{x}_{..kl}$	$\bar{x}_{ijk.}$	$\bar{x}_{ij.l}$	$\bar{x}_{i.kl}$	$\bar{x}_{.jkl}$	$x_{ijkl}$	$\bar{\bar{x}}$
S <sub>D</sub>				1												-1
S <sub>A</sub>	1															-1
S <sub>e(1)</sub>	-1			-1			1									1
S <sub>B</sub>		1														-1
S <sub>AB</sub>	-1	-1			1											1
S <sub>ABD</sub>	1	1		1	-1		-1		-1			1				-1
S <sub>C</sub>			1													-1
S <sub>AC</sub>	-1		-1			1										1
S <sub>BC</sub>		-1	-1					1								1
S <sub>ABC</sub>	1	1	1		-1	-1		-1			1					-1
S <sub>e(3)</sub>	0	-1	0	-1	1	0	0	0	1	0	-1	-1	0	0	1	1

表から各平方和の導出式が簡単にできますね。S<sub>A</sub>、S<sub>A×C</sub>、S<sub>e(3)</sub>を例に挙げます。

$$\bullet S_A = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^c \sum_{l=1}^d (\bar{x}_{i...} - \bar{\bar{x}})^2$$

$$\bullet S_{A \times C} = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^c \sum_{l=1}^d (\bar{x}_{i.k.} - \bar{x}_{i...} - \bar{x}_{..k.} + \bar{\bar{x}})^2$$

$$\bullet S_{e(3)} = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^c \sum_{l=1}^d (x_{ijkl} - \bar{x}_{.j..} - \bar{x}_{...l} + \bar{x}_{ij..} + \bar{x}_{.j.l} - \bar{x}_{ijk.} - \bar{x}_{ij.l} + \bar{\bar{x}})^2$$

と書けますね。他の平方和も計算できます。

**【4】 分割法の主効果・交互作用・誤差の期待値が導出できる**

(1) 主効果の分散の期待値の導出

$$E[S_A] = E[\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^c \sum_{l=1}^d (\bar{x}_{i...} - \bar{\bar{x}})^2] = bcd(a-1)\sigma_A^2 + (a-1)(bc\sigma_{e(1)}^2 + c\sigma_{e(2)}^2 + \sigma_{e(3)}^2)$$

$$\text{主効果 A の自由度は}(a-1)\text{より、分散の期待値 } E[V_A] = bcd\sigma_A^2 + (bc\sigma_{e(1)}^2 + c\sigma_{e(2)}^2 + \sigma_{e(3)}^2)$$

(2) 交互作用の分散の期待値の導出

$$E[S_{A \times C}] = E[\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^c \sum_{l=1}^d (\bar{x}_{i.k.} - \bar{x}_{i...} - \bar{x}_{..k.} + \bar{\bar{x}})^2] = bd(a-1)(c-1)\sigma_{A \times C}^2 + (a-1)(c-1)\sigma_{e(2)}^2$$

$$\text{交互作用 A} \times \text{C の自由度は}(a-1)(c-1)\text{より、分散の期待値 } E[V_{A \times C}] = bd\sigma_{A \times C}^2 + \sigma_{e(2)}^2$$

(3) 残差の分散の期待値の導出

$$E[S_{e(3)}] = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^c \sum_{l=1}^d (x_{ijk.} - \bar{x}_{.j..} - \bar{x}_{...l} + \bar{x}_{ij..} + \bar{x}_{.j.l} - \bar{x}_{ijk.} - \bar{x}_{ij.l} + \bar{\bar{x}})^2$$

$$= ab(c-1)(d-1)\sigma_{e(3)}^2$$

$$\text{残差 } e(3)\text{ の自由度は } ab(c-1)(d-1)\text{より、分散の期待値 } E[V_{e(3)}] = \sigma_{e(3)}^2$$

【5】 分割法分散分析ができる

自由度をまとめます。

-	a	b	c	d	ab	ac	ad	bc	bd	cd	abc	abd	acd	bcd	abcd	1
D				1												-1
A	1															-1
e(1)	-1			-1			1									1
B		1														-1
A×B	-1	-1			1											1
e(2)	1	1		1	-1		-1		-1			1				-1
C			1													-1
A×C	-1		-1			1										1
B×C		-1	-1					1								1
A×B×C	1	1	1		-1	-1		-1			1					-1
e(3)	0	-1	0	-1	1	0	0	0	1	0	-1	-1	0	0	1	1

(2) 分散分析の結果

分散分析表を作ります。

-	自由度 $\Phi$	E[V]
D	$d - 1$	$\sigma_{e(3)}^2 + c\sigma_{e(2)}^2 + bc\sigma_{e(1)}^2 + abc\sigma_D^2$
A	$a - 1$	$\sigma_{e(3)}^2 + c\sigma_{e(2)}^2 + bc\sigma_{e(1)}^2 + bcd\sigma_A^2$
e(1)	$(a - 1)(d - 1)$	$\sigma_{e(3)}^2 + c\sigma_{e(2)}^2 + bc\sigma_{e(1)}^2$
B	$b - 1$	$\sigma_{e(3)}^2 + c\sigma_{e(2)}^2 + acd\sigma_B^2$
A×B	$(a - 1)(b - 1)$	$\sigma_{e(3)}^2 + c\sigma_{e(2)}^2 + cd\sigma_{A \times B}^2$
e(2)	$a(b - 1)(d - 1)$	$\sigma_{e(3)}^2 + c\sigma_{e(2)}^2$
C	$c - 1$	$\sigma_{e(3)}^2 + abd\sigma_C^2$
A×C	$(a - 1)(c - 1)$	$\sigma_{e(3)}^2 + bd\sigma_{A \times C}^2$
B×C	$(b - 1)(c - 1)$	$\sigma_{e(3)}^2 + ad\sigma_{B \times C}^2$
A×B×C	$(a - 1)(b - 1)(c - 1)$	$\sigma_{e(3)}^2 + d\sigma_{A \times B \times C}^2$
A	$ab(c - 1)(d - 1)$	$\sigma_{e(3)}^2$
T	$abcd - 1$	-

**[6]** 分割法の主効果・交互作用の区間推定が導出できる

(1) 分散の期待値から分散の推定値を導出

分散分析から、 $e(1)$ と  $e(2)$ の分散の推定値  $E[V]$ を導出します。

-	V
D	$V_D = \widehat{\sigma_{e(3)}^2} + c\widehat{\sigma_{e(2)}^2} + bc\widehat{\sigma_{e(1)}^2} + abc\widehat{\sigma_D^2}$
$e(1)$	$V_{e(1)} = \widehat{\sigma_{e(3)}^2} + c\widehat{\sigma_{e(2)}^2} + bc\widehat{\sigma_{e(1)}^2}$
$e(2)$	$V_{e(2)} = \widehat{\sigma_{e(3)}^2} + c\widehat{\sigma_{e(2)}^2}$
$e(3)$	$V_{e(3)} = \widehat{\sigma_{e(3)}^2}$

上の表から、分散の推定値を求めます。

$$\widehat{\sigma_{e(1)}^2} = \frac{1}{bc}(V_{e(1)} - V_{e(2)})$$

$$\widehat{\sigma_{e(2)}^2} = \frac{1}{c}(V_{e(2)} - V_{e(3)})$$

$$\widehat{\sigma_{e(3)}^2} = V_{e(3)}$$

$$\widehat{\sigma_D^2} = \frac{1}{abc}(V_D - V_{e(1)})$$

(2) 主効果の点推定と区間推定

点推定： $\hat{\mu}(B_j) = \bar{x}_{j..} = \widehat{\mu + \beta_j} = \mu + \bar{\delta} + \beta_j + \overline{e_{(2)j.}} + \overline{e_{(3)j..}}$

分散： $\widehat{Var}(\hat{\mu}(B_j)) = V[\mu + \bar{\delta} + \beta_j + \overline{e_{(2)j.}} + \overline{e_{(3)j..}}] = V[\bar{\delta}] + V[\overline{e_{(2)j.}}] + V[\overline{e_{(3)j..}}] = \frac{\widehat{\sigma_D^2}}{d} + \frac{\widehat{\sigma_{e(2)}^2}}{ad} + \frac{\widehat{\sigma_{e(3)}^2}}{acd}$

$V_e$  が求まったので、自由度  $\phi$  と、点推定  $\mu$  を代入すれば推定区間が求まります。

(3) 交互作用の区間推定

点推定： $\hat{\mu}(A_i B_j C_k) = \bar{x}_{ijk} = \mu + \bar{\delta} + \alpha_i + \overline{e_{(1)i.}} + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} + \overline{e_{(2)ij.}} + \gamma_k + (\alpha\gamma)_{ik} + (\beta\gamma)_{jk} + (\alpha\beta\gamma)_{ijk} + \overline{e_{(3)ijk}}$

分散： $\widehat{Var}(\hat{\mu}(A_i B_j C_k))$

$$= V[\mu + \bar{\delta} + \alpha_i + \overline{e_{(1)i.}} + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} + \overline{e_{(2)ij.}} + \gamma_k + (\alpha\gamma)_{ik} + (\beta\gamma)_{jk} + (\alpha\beta\gamma)_{ijk} + \overline{e_{(3)ijk}}]$$

$$= V[\bar{\delta}] + V[\overline{e_{(1)i.}}] + V[\overline{e_{(2)ij.}}] + V[\overline{e_{(3)ijk}}] = \frac{\widehat{\sigma_D^2}}{d} + \frac{\widehat{\sigma_{e(1)}^2}}{a} + \frac{\widehat{\sigma_{e(2)}^2}}{d} + \frac{\widehat{\sigma_{e(3)}^2}}{d}$$

$V_e$  が求まったので、自由度  $\phi$  と、点推定  $\mu$  を代入すれば推定区間が求まります。

一連の導出過程を解説しました。

以上、分割法の分散分析の導出過程を詳細に解説しました。

【You Tube でも解説しています。ご覧ください】

<https://www.youtube.com/embed/oBjSlKmxV0>

【1】 分割法とは何かがわかる

本記事で「分割法(2 因子 1 段分割)の分散分析・区間推定が解ける【必見】」で基本を確認ください。

【2】 分割法(乱塊法無し)のデータの構造式が書ける

(1) データの構造式

★分割法(乱塊法有り)のデータの構造式

$$x_{ijk} = \mu + \gamma_k + \alpha_i + e_{(1)ik} + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} + e_{(2)ijk}$$

次に、乱塊法無しの分割法</mark>のデータの構造式を挙げます。違いを確認しましょう。

$$x_{ijk} = \mu + \alpha_i + e_{(1)ik} + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} + e_{(2)ijk}$$

反復因子 R の  $\gamma_k$  の有無の違いだけです。簡単ですが、反復因子 R の違いによる影響を挙げます。

★反復因子 R の違いによる影響

- ・ 残差 e(1)の自由度、分散の期待値の値が変わる
- ・ それ以外の主効果、交互作用、残差には影響無し

(2) 各平均値をデータの構造式で作る

- ・  $\bar{x}_{i..} = \mu + \alpha_i + \bar{e}_{(1)i.} + \bar{e}_{(2)i.}$
- ・  $\bar{x}_{.j.} = \mu + \beta_j + \bar{e}_{(2).j.}$
- ・  $\bar{x}_{..k} = \mu + \bar{e}_{(1)..k} + \bar{e}_{(2)..k}$
- ・  $\bar{x}_{ij.} = \mu + \alpha_i + \bar{e}_{(1)ij.} + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} + \bar{e}_{(2)ij.}$
- ・  $\bar{x}_{i.k} = \mu + \alpha_i + \bar{e}_{(1)ik} + \bar{e}_{(2)i.k}$
- ・  $\bar{x}_{.jk} = \mu + \bar{e}_{(1).k} + \bar{e}_{(2).jk}$
- ・  $\bar{x} = \mu + \bar{e}$

【3】 多水準法の平方和の分解の式が書ける

(1) データの構造式を変形

-	$\bar{x}_{i..}$	$\bar{x}_{.j.}$	$\bar{x}_{..k}$	$\bar{x}_{ij.}$	$\bar{x}_{i.k}$	$\bar{x}_{.jk}$	$x_{ijk}$	$\bar{x}$
S <sub>A</sub>	1							-1
S <sub>e(1)</sub>	-1				1			
S <sub>B</sub>		1						-1
S <sub>A×B</sub>	-1	-1		1				1
S <sub>e(2)</sub>	1			-1	-1		1	
S <sub>T</sub>							1	-1

表から各平方和の導出式が簡単にできますね。S<sub>B</sub>、S<sub>e(1)</sub>を例に挙げます。

$$S_B = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^c (\bar{x}_{.j.} - \bar{x})^2$$

$$S_{e(1)} = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^c (\bar{x}_{i.k} - \bar{x}_{i..})^2$$

と書けますね。他の平方和も同様に計算できます。

【4】主効果・交互作用・誤差の期待値が導出できる

(1) 主効果 B の分散の期待値の導出

$$E[S_B] = E[\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^c (\bar{x}_{.j} - \bar{x})^2] = E[\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^c (\beta_j + (\bar{e}_{(2) \cdot j} - \bar{e}))^2] = ac(b-1)\sigma_B^2 + (b-1)\sigma_{e(2)}^2$$

主効果 B の自由度は  $(b-1)$  より、分散の期待値  $E[V_B] = ac\sigma_B^2 + \sigma_{e(2)}^2$

(2) 残差 e(1) の分散の期待値の導出

$$E[S_{e(1)}] = E[\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^c (\bar{x}_{ik} - \bar{x}_{i..})^2] = E[\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^c ((e_{(1)ik} - \bar{e}_{(1) i \cdot}) + (\bar{e}_{(2) i \cdot k} - \bar{e}_{(2) i \cdot}))^2]$$

$$= ab(c-1)\sigma_{e(1)}^2 + a(c-1)\sigma_{e(2)}^2$$

残差 e(1) の自由度は  $a(c-1)$  より、分散の期待値  $E[V_{e(1)}] = b\sigma_{e(1)}^2 + \sigma_{e(2)}^2$

【5】⑤分割法の分散分析ができる

(1) 自由度の計算

-	a	b	c	ab	ac	$\bar{bc}$	abc	1
A	1							-1
e(1)	-1				1			
B		1						-1
A×B	-1	-1		1				1
e(2)	1			-1	-1		1	
T							1	-1

(2) 分散分析の結果

分散分析表を作ります。

-	自由度 $\Phi$	$E[V]$
A	$a-1$	$\sigma_{e(2)}^2 + b\sigma_{e(1)}^2 + bc\sigma_A^2$
e(1)	$a(c-1)$	$\sigma_{e(2)}^2 + b\sigma_{e(1)}^2$
B	$b-1$	$\sigma_{e(2)}^2 + ac\sigma_B^2$
A×B	$(a-1)(b-1)$	$\sigma_{e(2)}^2 + c\sigma_{A \times B}^2$
e(2)	$a(b-1)(c-1)$	$\sigma_{e(2)}^2$
T	$abc-1$	-

**【6】** 主効果・交互作用の区間推定が導出できる

(1) 分散の期待値から分散の推定値を導出

分散分析から、 $e(1)$ と  $e(2)$ の分散の推定値  $E[V]$ を導出します。

-	V
$e(1)$	$V_{e(1)} = \widehat{\sigma_{e(2)}^2} + b\widehat{\sigma_{e(1)}^2}$
$e(2)$	$V_{e(2)} = \widehat{\sigma_{e(2)}^2}$

上の表から、分散の推定値を求めます。

$$\widehat{\sigma_{e(1)}^2} = \frac{1}{b}(V_{e(1)} - V_{e(2)})$$

$$\widehat{\sigma_{e(2)}^2} = V_{e(2)}$$

(2) 主効果の点推定と区間推定

点推定： $\hat{\mu}(B_j) = \overline{x_{\cdot j}} = \widehat{\mu} + \widehat{\beta}_j = \mu + \beta_j + \overline{e_{(2)\cdot j}}$

分散： $V\widehat{ar}(\hat{\mu}(B_j)) = V[\mu + \beta_j + \overline{e_{(2)\cdot j}}] = V[\overline{e_{(2)\cdot j}}] = \frac{\widehat{\sigma_{e(2)}^2}}{bc}$

$V_e$  が求まったので、自由度  $\phi$  と、点推定  $\mu$  を代入すれば推定区間が求まります。

以上、分割法(乱塊法無し)の分散分析の導出過程を詳細に解説しました。

【1】サタースウェイトの等価自由度の計算が必要な乱塊法と分割法

求めたい母平均の分散  $V$  が複数の残差分散  $Var$  の和になる場合、

$$\mu \pm t(\varphi^*, \alpha) \sqrt{Var}$$

の自由度  $\varphi^*$  をサタースウェイトの等価自由度として計算する。

分割法の 2 次単位以降の交互作用の推定区間や乱塊法の反復因子の平均を含む交互作用の推定区間を求めるときに、母平均の分散  $V$  が複数の残差分散  $Ve$  の和になる。

★【関連記事】サタースウェイトの等価自由度が導出できる【本記事限定】

<https://qcplanets.com/method/doe/satterthwaite/>

もご覧ください。

次に、具体事例 2 例を解説します。

(A)乱塊法(4 因子)

$$x_{ijkl} = \mu + \gamma_k + \alpha_i + \beta_j + \delta_l + (\alpha\beta)_{ij} + (\alpha\delta)_{il} + (\beta\delta)_{jl} + (\alpha\beta\delta)_{ijl} + e_{ijkl}$$

(B)乱塊法+分割法(3 因子)

$$x_{ijkl} = \mu + \delta_l + \alpha_i + e_{(1)il} + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} + e_{(2)ijl} + \gamma_k + (\alpha\gamma)_{ik} + (\beta\gamma)_{jk} + (\alpha\beta\gamma)_{ijk} + e_{(3)ijkl}$$

なお、本冊子の関連記事で、データの構造式→分散分析→期待値の導出を読んでおいてください。

【2】乱塊法(4 因子)のサタースウェイトの等価自由度の計算事例

(A)乱塊法(4 因子)

$$x_{ijkl} = \mu + \gamma_k + \alpha_i + \beta_j + \delta_l + (\alpha\beta)_{ij} + (\alpha\delta)_{il} + (\beta\delta)_{jl} + (\alpha\beta\delta)_{ijl} + e_{ijkl}$$

	自由度 $\Phi$	$E[V]$
R	$c - 1$	$\sigma_e^2 + abd\sigma_c^2$
A	$a - 1$	$\sigma_e^2 + bcd\sigma_a^2$
...	...	...
e	$(abd - 1)(c - 1)$	$\sigma_e^2$
T	$abcd - 1$	-

分散分析の表から、分散の推定値を求めます。

$$V_R = \widehat{\sigma_e^2} + abd \widehat{\sigma_R^2}$$

$$V_e = \widehat{\sigma_e^2}$$

よって、

$$\widehat{\sigma_R^2} = \frac{1}{abd} (V_R - V_e)$$

$$\widehat{\sigma_e^2} = V_e$$

①主効果、交互作用の等価自由度

(i)主効果  $A_i$

(ii)交互作用  $A \times D$

(iii)交互作用  $A \times B \times D$

(i)主効果  $A_i$  のサタースウェイトの等価自由度

●主効果の点推定と区間推定

点推定： $\hat{\mu}(A_i) = \overline{x_{i\dots}} = \widehat{\mu + \alpha_i} = \mu + \bar{r} + \alpha_i + \overline{e_{i\dots}}$

分散： $\widehat{Var}(\hat{\mu}(A_i)) = V[\mu + \bar{r} + \alpha_i + \overline{e_{i\dots}}] = V[\bar{r}] + V[\overline{e_{i\dots}}] = \frac{\widehat{\sigma_R^2}}{c} + \frac{\widehat{\sigma_e^2}}{bcd} = \frac{1}{abcd}(V_R - V_e) + \frac{1}{bcd}V_e = \frac{1}{abcd}V_R + \frac{a-1}{abcd}V_e$

●サタースウェイトの等価自由度： $\varphi^*$

$$\varphi^* = \frac{(C_1V_1 + C_2V_2)^2}{\frac{(C_1V_1)^2}{\varphi_1} + \frac{(C_2V_2)^2}{\varphi_2}}$$

$C_1 = \frac{1}{abcd}, V_1 = V_R, \varphi_1 = c - 1, C_2 = \frac{a-1}{abcd}, V_2 = V_e, \varphi_2 = (abd - 1)(c - 1)$  を代入

(ii)交互作用  $A \times D$  のサタースウェイトの等価自由度

点推定： $\hat{\mu}(A_iD_l) = \overline{x_{i\dots l}} = \mu + \alpha_i + \widehat{\delta_l} + (\alpha\delta)_{il} = \mu + \bar{r} + \alpha_i + \delta_l + (\alpha\delta)_{il} + \overline{e_{i\dots l}}$

分散： $\widehat{Var}(\hat{\mu}(A_iD_l)) = V[\mu + \alpha_i + \delta_l + (\alpha\delta)_{il}] = V[\bar{r}] + V[\overline{e_{i\dots l}}] = \frac{\widehat{\sigma_R^2}}{c} + \frac{\widehat{\sigma_e^2}}{bc} = \frac{1}{abcd}(V_R - V_e) + \frac{1}{bc}V_e = \frac{1}{abcd}V_R + \frac{ad-1}{abcd}V_e$

●サタースウェイトの等価自由度： $\varphi^*$

$$\varphi^* = \frac{(C_1V_1 + C_2V_2)^2}{\frac{(C_1V_1)^2}{\varphi_1} + \frac{(C_2V_2)^2}{\varphi_2}}$$

$C_1 = \frac{1}{abcd}, V_1 = V_R, \varphi_1 = c - 1, C_2 = \frac{ad-1}{abcd}, V_2 = V_e, \varphi_2 = (abd - 1)(c - 1)$  を代入

(iii)交互作用  $A \times B \times D$  のサタースウェイトの等価自由度の計算事例

点推定： $\hat{\mu}(A_iB_jD_l) = \overline{x_{ij\dots l}} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \delta_l + (\alpha\beta)_{ij} + (\alpha\delta)_{il} + (\beta\delta)_{jl} + (\alpha\beta\delta)_{ijl}$

$= \mu + \bar{r} + \alpha_i + \beta_j + \delta_l + (\alpha\beta)_{ij} + (\alpha\delta)_{il} + (\beta\delta)_{jl} + (\alpha\beta\delta)_{ijl} + \overline{e_{ij\dots l}}$

分散： $\widehat{Var}(\hat{\mu}(A_iB_jD_l)) = V[\mu + \bar{r} + \alpha_i + \beta_j + \delta_l + (\alpha\beta)_{ij} + (\alpha\delta)_{il} + (\beta\delta)_{jl} + (\alpha\beta\delta)_{ijl} + \overline{e_{ij\dots l}}]$

$= V[\bar{r}] + V[\overline{e_{ij\dots l}}] = \frac{\widehat{\sigma_R^2}}{c} + \frac{\widehat{\sigma_e^2}}{c} = \frac{1}{abcd}(V_R - V_e) + \frac{1}{c}V_e = \frac{1}{abcd}V_R + \frac{abd-1}{abcd}V_e$

●サタースウェイトの等価自由度： $\varphi^*$

$$\varphi^* = \frac{(C_1V_1 + C_2V_2)^2}{\frac{(C_1V_1)^2}{\varphi_1} + \frac{(C_2V_2)^2}{\varphi_2}}$$

$C_1 = \frac{1}{abcd}, V_1 = V_R, \varphi_1 = c - 1, C_2 = \frac{abd-1}{abcd}, V_2 = V_e, \varphi_2 = (abd - 1)(c - 1)$  を代入

**【3】乱塊法+分割法(3 因子)のサタースウェイトの等価自由度の計算事例</h2>**

**(B)乱塊法+分割法(3 因子)**

$$x_{ijkl} = \mu + \delta_l + \alpha_i + e_{(1)il} + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} + e_{(2)ijl} + \gamma_k + (\alpha\gamma)_{ik} + (\beta\gamma)_{jk} + (\alpha\beta\gamma)_{ijk} + e_{(3)ijkl}$$

-	自由度 $\Phi$	E[V]
D	$d - 1$	$\sigma_{e(3)}^2 + c\sigma_{e(2)}^2 + bc\sigma_{e(1)}^2 + abc\sigma_D^2$
...	...	...
e(1)	$(a - 1)(d - 1)$	$\sigma_{e(3)}^2 + c\sigma_{e(2)}^2 + bc\sigma_{e(1)}^2$
...	...	...
e(2)	$a(b - 1)(d - 1)$	$\sigma_{e(3)}^2 + c\sigma_{e(2)}^2$
...	...	...
e(3)	$ab(c - 1)(d - 1)$	$\sigma_{e(3)}^2$
T	$abcd - 1$	...

分散分析の表から、分散の推定値を求めます。

$$\widehat{\sigma_{e(1)}^2} = \frac{1}{bc} (V_{e(1)} - V_{e(2)})$$

$$\widehat{\sigma_{e(2)}^2} = \frac{1}{c} (V_{e(2)} - V_{e(3)})$$

$$\widehat{\sigma_{e(3)}^2} = V_{e(3)}$$

$$\widehat{\sigma_D^2} = \frac{1}{abc} (V_D - V_{e(1)})$$

①主効果、交互作用の等価自由度

(i)主効果 Ai

(ii) 主効果 Bj

(iii)交互作用 A×B×C

(i)主効果 Ai のサタースウェイトの等価自由度

●主効果の点推定と区間推定

点推定： $\hat{\mu}(A_i) = \bar{x}_{i...} = \mu + \delta + \alpha_i + \bar{e}_{(1)i.} + \bar{e}_{(2)i..} + \bar{e}_{(3)i...}$

分散： $\widehat{Var}(\hat{\mu}(A_i)) = V[\mu + \delta + \alpha_i + \bar{e}_{(1)i.} + \bar{e}_{(2)i..} + \bar{e}_{(3)i...}] = V[\delta] + V[\bar{e}_{(1)i.}] + V[\bar{e}_{(2)i..}] + V[\bar{e}_{(3)i...}]$

$$= \frac{\widehat{\sigma_D^2}}{d} + \frac{\widehat{\sigma_{e(1)}^2}}{d} + \frac{\widehat{\sigma_{e(2)}^2}}{bd} + \frac{\widehat{\sigma_{e(3)}^2}}{bcd} = \frac{1}{abcd} (V_D - V_{e(1)}) + \frac{1}{bcd} (V_{e(1)} - V_{e(2)}) + \frac{1}{bcd} (V_{e(2)} - V_{e(3)}) + \frac{1}{bcd} V_{e(3)}$$

$$= \frac{1}{abcd} V_D + \frac{a-1}{abcd} V_{e(1)}$$

●サタースウェイトの等価自由度： $\varphi^*$

$$\varphi^* = \frac{(C_1 V_1 + C_2 V_2)^2}{\frac{(C_1 V_1)^2}{\varphi_1} + \frac{(C_2 V_2)^2}{\varphi_2}}$$

$C_1 = \frac{1}{abcd}$ ,  $V_1 = V_D$ ,  $\varphi_1 = d - 1$ ,  $C_2 = \frac{a-1}{abcd}$ ,  $V_2 = V_{e(1)}$ ,  $\varphi_2 = (a - 1)(d - 1)$  を代入

(ii) 主効果 Bj のサタースウェイトの等価自由度

●主効果の点推定と区間推定

$$\text{点推定: } \hat{\mu}(B_j) = \overline{x_{j..}} = \mu + \widehat{\beta}_j = \mu + \bar{\delta} + \overline{e_{(1)..}} + \beta_j + \overline{e_{(2).j.}} + \overline{e_{(3).j..}}$$

$$\text{分散: } \widehat{Var}(\hat{\mu}(B_j)) = V[\mu + \bar{\delta} + \overline{e_{(1)..}} + \beta_j + \overline{e_{(2).j.}} + \overline{e_{(3).j..}}] = V[\bar{\delta}] + V[\overline{e_{(1)..}}] + V[\overline{e_{(2).j.}}] + V[\overline{e_{(3).j..}}]$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\widehat{\sigma_D^2}}{d} + \frac{\widehat{\sigma_{e(1)}^2}}{ad} + \frac{\widehat{\sigma_{e(2)}^2}}{ad} + \frac{\widehat{\sigma_{e(3)}^2}}{acd} = \frac{1}{abcd} (V_D - V_{e(1)}) + \frac{1}{abcd} (V_{e(1)} - V_{e(2)}) + \frac{1}{acd} (V_{e(2)} - V_{e(3)}) + \frac{1}{acd} V_{e(3)} \\ &= \frac{1}{abcd} V_D + \frac{b-1}{abcd} V_{e(2)} \end{aligned}$$

●サタースウェイトの等価自由度:  $\varphi^*$

$$\varphi^* = \frac{(C_1 V_1 + C_2 V_2)^2}{\frac{(C_1 V_1)^2}{\varphi_1} + \frac{(C_2 V_2)^2}{\varphi_2}}$$

$$C_1 = \frac{1}{abcd}, V_1 = V_D, \varphi_1 = d - 1, C_2 = \frac{b-1}{abcd}, V_2 = V_{e(2)}, \varphi_2 = a(b-1)(d-1) \quad \text{を代入}$$

(iii) 交互作用 A×B×C のサタースウェイトの等価自由度の計算事例

$$\text{点推定: } \hat{\mu}(A_i B_j C_k) = \overline{x_{ijk.}} = \mu + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} + \gamma_k + \overline{(\alpha\gamma)_{ik}} + (\beta\gamma)_{jk} + (\alpha\beta\gamma)_{ijk}$$

$$= \mu + \bar{\delta} + \alpha_i + \overline{e_{(1)i.}} + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} + \overline{e_{(2)ij.}} + \gamma_k + (\alpha\gamma)_{ik} + (\beta\gamma)_{jk} + (\alpha\beta\gamma)_{ijk} + \overline{e_{(3)ijk.}}$$

$$\text{分散: } \widehat{Var}(\hat{\mu}(A_i B_j C_k)) = V[\mu + \bar{\delta} + \alpha_i + \overline{e_{(1)i.}} + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} + \overline{e_{(2)ij.}} + \gamma_k + (\alpha\gamma)_{ik} + (\beta\gamma)_{jk} + (\alpha\beta\gamma)_{ijk} + \overline{e_{(3)ijk.}}]$$

$$\begin{aligned} &= V[\bar{\delta}] + V[\overline{e_{(1)i.}}] + V[\overline{e_{(2)ij.}}] + V[\overline{e_{(3)ijk.}}] \\ &= \frac{\widehat{\sigma_D^2}}{d} + \frac{\widehat{\sigma_{e(1)}^2}}{ad} + \frac{\widehat{\sigma_{e(2)}^2}}{ad} + \frac{\widehat{\sigma_{e(3)}^2}}{acd} = \frac{1}{abcd} (V_D - V_{e(1)}) + \frac{1}{bcd} (V_{e(1)} - V_{e(2)}) + \frac{1}{cd} (V_{e(2)} - V_{e(3)}) + \frac{1}{d} V_{e(3)} \\ &= \frac{1}{abcd} V_D + \frac{a-1}{abcd} V_{e(1)} + \frac{b-1}{bcd} V_{e(2)} + \frac{c-1}{cd} V_{e(3)} \end{aligned}$$

●サタースウェイトの等価自由度:  $\varphi^*$

$$\varphi^* = \frac{(C_1 V_1 + C_2 V_2 + C_3 V_3 + C_4 V_4)^2}{\frac{(C_1 V_1)^2}{\varphi_1} + \frac{(C_2 V_2)^2}{\varphi_2} + \frac{(C_3 V_3)^2}{\varphi_3} + \frac{(C_4 V_4)^2}{\varphi_4}}$$

$$C_1 = \frac{1}{abcd}, V_1 = V_D, \varphi_1 = d - 1, C_2 = \frac{a-1}{abcd}, V_2 = V_{e(1)}, \varphi_2 = (a-1)(d-1)$$

$$C_3 = \frac{b-1}{bcd}, V_3 = V_{e(2)}, \varphi_3 = a(b-1)(d-1), C_4 = \frac{c-1}{cd}, V_4 = V_{e(3)}, \varphi_4 = ab(c-1)(d-1)$$

以上、サタースウェイトの等価自由度を詳細に解説しました。

【You Tube でも解説しています。ご覧ください】

<https://www.youtube.com/embed/3txz7IMmVLM>

【1】乱塊法(2 因子)のデータの構造式が書ける

(1) データの構造式

2 因子の完全配置実験のデータの構造式からスタートします。機械的に書けますね。

★二元配置実験のデータの構造式

$$x_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} + e_{ijk}$$

次に、乱塊法に変形します。ここで、 $\beta_j$ を反復因子としてブロック因子に定義します。因子 A は調べたい因子、B は反復因子として区別します。

反復因子 B と因子 A との交互作用に意味を持たないため、残差にプーリングします。

まとめると、次の式変形を行います。

$$x_{ij} = \mu + \beta_j + \alpha_i + e_{ij}$$

$$(e_{ij} \equiv (\alpha\beta)_{ij} + e_{ijk}) \quad (k \text{ は消去します})$$

★乱塊法(2 因子)のデータの構造式

$$x_{ij} = \mu + \beta_j + \alpha_i + e_{ij}$$

(3) 各平均値をデータの構造式で作る

- $\bar{x}_{i\cdot} = \mu + \beta + \alpha_i + \bar{e}_{i\cdot}$
- $\bar{x}_{\cdot j} = \mu + \beta_j + \beta_j + \bar{e}_{\cdot j}$
- $\bar{x} = \mu + \beta + \bar{e}$

【2】分割法の平方和の分解の式が書ける

(1) データの構造式を変形

式を書くと見づらいので、表にまとめます。分散分析はデータの構造式が複雑になると表で整理するのがオススメです。

$$x_{ij} = \mu + \beta_j + \alpha_i + e_{ij}$$

-	$\bar{x}_{i\cdot}$	$\bar{x}_{\cdot j}$	$x_{ij}$	$\bar{x}$
S <sub>B</sub>		1		-1
S <sub>A</sub>	1			-1
S <sub>e</sub>	-1	-1	1	1

表から各平方和の導出式が簡単にできますね。S<sub>A</sub>、S<sub>e</sub>を例に挙げます。

$$\cdot S_A = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b (\bar{x}_{i\cdot} - \bar{x})^2$$

$$\cdot S_e = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b (x_{ij} - \bar{x}_{i\cdot} - \bar{x}_{\cdot j} + \bar{x})^2$$

と書けますね。他の平方和も計算できます。

**【3】** 主効果・交互作用・誤差の期待値が導出できる

(1) 主効果 A の分散の期待値の導出

$$E[S_A] = E[\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b (\bar{x}_{i.} - \bar{x})^2] = E[\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b (\alpha_i + \bar{e}_{i.} - \bar{e})^2]$$

$$= E[\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \alpha_i^2] + E[\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b (\bar{e}_{i.} - \bar{e})^2] = b(a-1)\sigma_A^2 + (a-1)\sigma_e^2$$

主効果 A の自由度は  $(a-1)$  より、分散の期待値  $E[V_A] = b\sigma_A^2 + \sigma_e^2$

(2) 残差の分散の期待値の導出

$$E[S_e] = E[\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b (x_{ij} - \bar{x}_{i.} - \bar{x}_{.j} + \bar{x})^2] = E[\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b (e_{ij} - \bar{e}_{i.} - \bar{e}_{.j} + \bar{e})^2]$$

$$= (a-1)(b-1)\sigma_e^2$$

残差 e の自由度は  $(a-1)(b-1)$  より、分散の期待値  $E[V_e] = \sigma_e^2$

**【4】** 乱塊法(2 因子)の分散分析ができる

(1) 自由度の計算

-	a	b	ab	1
B		1		-1
A	1			-1
e	-1	-1	1	1

(2) 分散分析の結果

分散分析表を作ります。

-	自由度 $\Phi$	$E[V]$
B	$b-1$	$\sigma_e^2 + a\sigma_B^2$
A	$a-1$	$\sigma_e^2 + b\sigma_A^2$
e	$(a-1)(b-1)$	$\sigma_e^2$
T	$abc-1$	-

**【6】** 主効果・交互作用の区間推定が導出できる

(1) 分散の期待値から分散の推定値を導出

分散分析から、e の分散の推定値  $E[V]$  を導出します。

$$V_e = \widehat{\sigma_e^2}$$

上の表から、分散の推定値を求めます。

(2) 主効果の点推定と区間推定

$$\text{点推定: } \hat{\mu}(A_i) = \bar{x}_{i.} = \widehat{\mu + \bar{\alpha}_i} = \mu + \bar{\beta} + \alpha_i + \bar{e}_{i.}$$

$$\text{分散: } \widehat{Var}(\hat{\mu}(A_i)) = V[\mu + \bar{\beta} + \alpha_i + \bar{e}_{i.}] = V[\bar{\beta}] + V[\bar{e}_{i.}] = \frac{\widehat{\sigma_B^2}}{b} + \frac{\widehat{\sigma_e^2}}{b}$$

$V_e$  が求まったので、自由度  $\phi$  と、点推定  $\mu$  を代入すれば推定区間が求まります。

一連の導出過程を解説しました。

以上、乱塊法(2 因子)の導出過程を詳細に解説しました。

【You Tube でも解説しています。ご覧ください】

<https://www.youtube.com/embed/1MLBTKdkPIA>

【1】乱塊法(3 因子)のデータの構造式が書ける

(1) データの構造式

3 因子の完全配置実験のデータの構造式からスタートします。機械的に書けますね。

★三元配置実験のデータの構造式

$$x_{ijkl} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_k + (\alpha\beta)_{ij} + (\alpha\gamma)_{ik} + (\beta\gamma)_{jk} + e_{ijk}$$

次に、乱塊法に変形します。ここで、 $\gamma_k$ を反復因子としてブロック因子に定義します。因子 A,B は調べたい因子、C は反復因子として区別します。

反復因子 C と因子 A,B との交互作用に意味を持たないため、残差にプーリングします。

まとめると、次の式変形を行います。

$$x_{ijk} = \mu + \gamma_k + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} + e_{ijk}$$

$$(e_{ijk} \equiv (\alpha\gamma)_{ik} + (\beta\gamma)_{jk} + e_{ijk})$$

★乱塊法(3 因子)のデータの構造式

$$x_{ijk} = \mu + \gamma_k + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} + e_{ijk}$$

(3) 各平均値をデータの構造式で作る

- $\bar{x}_{i..} = \mu + \bar{\gamma} + \alpha_i + \bar{e}_{i..}$
- $\bar{x}_{.j.} = \mu + \bar{\gamma} + \beta_j + \bar{e}_{.j.}$
- $\bar{x}_{..k} = \mu + \gamma_k + \bar{e}_{..k}$
- $\bar{x}_{ij.} = \mu + \bar{\gamma} + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} + \bar{e}_{ij.}$
- $\bar{x}_{i.k} = \mu + \gamma_k + \alpha_i + \bar{e}_{i.k}$
- $\bar{x}_{.jk} = \mu + \gamma_k + \beta_j + \bar{e}_{.jk}$
- $\bar{\bar{x}} = \mu + \bar{\gamma} + \bar{e}$

【2】分割法の平方和の分解の式が書ける

(1) データの構造式を変形

式を書くとき見づらいので、表にまとめます。分散分析はデータの構造式が複雑になると表で整理するのがオススメです。

$$x_{ijk} = \mu + \gamma_k + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} + e_{ijk}$$

-	$\bar{x}_{i..}$	$\bar{x}_{.j.}$	$\bar{x}_{..k}$	$\bar{x}_{ij.}$	$\bar{x}_{i.k}$	$\bar{x}_{.jk}$	$x_{ijk}$	$\bar{\bar{x}}$
S <sub>C</sub>			1					-1
S <sub>A</sub>	1							-1
S <sub>B</sub>		1						-1
S <sub>A×B</sub>	-1	-1		1				1
S <sub>e</sub>			-1	-1			1	1

表から各平方和の導出式が簡単にできますね。S<sub>B</sub>、S<sub>A×B</sub>、S<sub>e</sub>を例に挙げます。

$$\cdot S_B = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^c (\bar{x}_{.j} - \bar{x})^2$$

$$\cdot S_{A \times B} = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^c (\bar{x}_{ij.} - \bar{x}_{i..} - \bar{x}_{.j.} + \bar{x})^2$$

$$\cdot S_e = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^c (x_{ijk} - \bar{x}_{ij.} - \bar{x}_{.k.} + \bar{x})^2$$

と書けますね。他の平方和も計算できます。

**【3】 主効果・交互作用・誤差の期待値が導出できる**

(1) 主効果 B の分散の期待値の導出

$$E[S_C] = E[\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^c (\bar{x}_{.j} - \bar{x})^2] = E[\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^c (\gamma_k + \bar{e}_{.k} - \bar{e})^2] = ab(c-1)\sigma_C^2 + (c-1)\sigma_e^2$$

主効果 C の自由度は  $(c-1)$  より、分散の期待値  $E[V_C] = ab\sigma_C^2 + \sigma_e^2$

(2) 交互作用 A×B の分散の期待値の導出

$$E[S_{A \times B}] = E[\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^c (\bar{x}_{ij.} - \bar{x}_{i..} - \bar{x}_{.j.} + \bar{x})^2] = E[\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^c ((\alpha\beta)_{ij} + (\bar{e}_{ij.} - \bar{e}_{i..} - \bar{e}_{.j.} + \bar{e}))^2]$$

$$= c(a-1)(b-1)\sigma_{A \times B}^2 + (a-1)(b-1)\sigma_e^2$$

交互作用 A×B の自由度は  $(a-1)(b-1)$  より、分散の期待値  $E[V_{A \times B}] = c\sigma_{A \times B}^2 + \sigma_e^2$

(3) 残差の分散の期待値の導出

$$E[S_e] = E[\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^c (x_{ijk} - \bar{x}_{ij.} - \bar{x}_{.k.} + \bar{x})^2] = E[\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^c (e_{ijk} - \bar{e}_{ij.} - \bar{e}_{.k.} + \bar{e})^2]$$

$$= (ab-1)(c-1)\sigma_e^2$$

残差 e の自由度は  $(ab-1)(c-1)$  より、分散の期待値  $E[V_e] = \sigma_e^2$

**【4】 乱塊法(3 因子)のの分散分析ができる**

(1) 自由度の計算

-	a	b	c	ab	ac	bc	abc	1
C			1					-1
A	1							-1
B		1						-1
A×B	-1	-1		1				1
Se			-1	-1			1	1

(2) 分散分析の結果

分散分析表を作ります。

-	自由度 Φ	E[V]
C	$c-1$	$\sigma_e^2 + ab\sigma_C^2$
A	$a-1$	$\sigma_e^2 + bc\sigma_A^2$
B	$b-1$	$\sigma_e^2 + ac\sigma_B^2$
A×B	$(a-1)(b-1)$	$\sigma_e^2 + c\sigma_{A \times B}^2$
e	$(ab-1)(c-1)$	$\sigma_e^2$
T	$abc-1$	-

【5】主効果・交互作用の区間推定が導出できる

(1) 分散の期待値から分散の推定値を導出

分散分析から、 $e$  の分散の推定値  $E[V]$  を導出します。

$$V_e = \widehat{\sigma_e^2}$$

上の表から、分散の推定値を求めます。

(2) 主効果の点推定と区間推定

$$\text{点推定: } \hat{\mu}(B_j) = \bar{x}_{.j} = \widehat{\mu + \beta_j} = \mu + \bar{\gamma} + \beta_j + \bar{e}_{.j}$$

$$\text{分散: } \widehat{Var}(\hat{\mu}(B_j)) = V[\mu + \bar{\gamma} + \beta_j + \bar{e}_{.j}] = V[\bar{\gamma}] + V[\bar{e}_{.j}] = \frac{\widehat{\sigma_c^2}}{c} + \frac{\widehat{\sigma_e^2}}{ab}$$

$V_e$  が求まったので、自由度  $\phi$  と、点推定  $\mu$  を代入すれば推定区間が求まります。

(3) 交互作用の区間推定

$$\text{点推定: } \hat{\mu}(A_i B_j) = \bar{x}_{ij.} = \mu + \bar{\gamma} + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} + \bar{e}_{ij.}$$

$$\text{分散: } \widehat{Var}(\hat{\mu}(A_i B_j))$$

$$= V[\mu + \bar{\gamma} + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} + \bar{e}_{ij.}] = V[\bar{\gamma}] + V[\bar{e}_{ij.}] = \frac{\widehat{\sigma_c^2}}{c} + \frac{\widehat{\sigma_e^2}}{c}$$

$V_e$  が求まったので、自由度  $\phi$  と、点推定  $\mu$  を代入すれば推定区間が求まります。

一連の導出過程を解説しました。

以上、乱塊法(3 因子)の導出過程を詳細に解説しました。

【You Tube でも解説しています。ご覧ください】

[https://www.youtube.com/embed/vozI9N\\_dvNQ](https://www.youtube.com/embed/vozI9N_dvNQ)

【1】乱塊法(4 因子)のデータの構造式が書ける

(1) データの構造式

4 因子の完全配置実験のデータの構造式からスタートします。機械的に書けますね。

★四元配置実験のデータの構造式

$$x_{ijkl} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_k + \delta_l + (\alpha\beta)_{ij} + (\alpha\gamma)_{ik} + (\alpha\delta)_{il} + (\beta\gamma)_{jk} + (\beta\delta)_{jl} + (\gamma\delta)_{kl} + (\alpha\beta\gamma)_{ijk} + (\alpha\beta\delta)_{ijl} + (\alpha\gamma\delta)_{ikl} + (\beta\gamma\delta)_{jkl} + e_{ijkl}$$

次に、乱塊法に変形します。ここで、 $\gamma_k$ を反復因子としてブロック因子に定義します。因子 A,B,D は調べたい因子、C は反復因子として区別します。

反復因子 C と因子 A,B,D との交互作用に意味を持たないため、残差にプーリングします。

まとめると、次の式変形を行います。

$$x_{ijkl} = \mu + \gamma_k + \alpha_i + \beta_j + \delta_l + (\alpha\beta)_{ij} + (\alpha\delta)_{il} + (\beta\delta)_{jl} + (\alpha\beta\delta)_{ijl} + e_{ijkl}$$

$$(e_{ijkl} \equiv (\alpha\gamma)_{ik} + (\beta\gamma)_{jk} + (\gamma\delta)_{kl} + (\alpha\beta\gamma)_{ijk} + (\alpha\gamma\delta)_{ikl} + (\beta\gamma\delta)_{jkl} + e_{ijkl})$$

★乱塊法(4 因子)のデータの構造式

$$x_{ijkl} = \mu + \gamma_k + \alpha_i + \beta_j + \delta_l + (\alpha\beta)_{ij} + (\alpha\delta)_{il} + (\beta\delta)_{jl} + (\alpha\beta\delta)_{ijl} + e_{ijkl}$$

(3) 各平均値をデータの構造式で作る

- $\bar{x}_{i...} = \mu + \bar{\gamma} + \alpha_i + \bar{e}_{i...}$
- $\bar{x}_{.j.} = \mu + \bar{\gamma} + \beta_j + \bar{e}_{.j.}$
- $\bar{x}_{..k.} = \mu + \gamma_k + \bar{e}_{..k.}$
- $\bar{x}_{...l} = \mu + \bar{\gamma} + \delta_l + \bar{e}_{...l}$
- $\bar{x}_{ij..} = \mu + \bar{\gamma} + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} + \bar{e}_{ij..}$
- $\bar{x}_{i.k.} = \mu + \gamma_k + \alpha_i + \bar{e}_{i.k.}$
- $\bar{x}_{i..l} = \mu + \bar{\gamma} + \alpha_i + \delta_l + (\alpha\delta)_{il} + \bar{e}_{i..l}$
- $\bar{x}_{.jk.} = \mu + \gamma_k + \beta_j + \bar{e}_{.jk.}$
- $\bar{x}_{.j.l} = \mu + \bar{\gamma} + \beta_j + \delta_l + (\beta\delta)_{jl} + \bar{e}_{.j.l}$
- $\bar{x}_{..kl} = \mu + \gamma_k + \delta_l + \bar{e}_{..kl}$
- $\bar{x}_{ijk.} = \mu + \gamma_k + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} + \bar{e}_{ijk.}$
- $\bar{x}_{ij.l} = \mu + \bar{\gamma} + \alpha_i + \beta_j + \delta_l + (\alpha\beta)_{ij} + (\alpha\delta)_{il} + (\beta\delta)_{jl} + (\alpha\beta\gamma)_{ijk} + (\alpha\beta\delta)_{ijl} + \bar{e}_{ij.l}$
- $\bar{x}_{i.kl} = \mu + \gamma_k + \alpha_i + \delta_l + (\alpha\delta)_{il} + \bar{e}_{i.kl}$
- $\bar{x}_{.jkl} = \mu + \gamma_k + \beta_j + \delta_l + (\beta\delta)_{jl} + \bar{e}_{.jkl}$
- $\bar{x} = \mu + \bar{\gamma} + \bar{e}$

【2】分割法の平方和の分解の式が書ける

(1) データの構造式を変形

式を書くと見づらいので、表にまとめます。分散分析はデータの構造式が複雑になると表で整理するのがオススメです。

$$x_{ijkl} = \mu + \gamma_k + \alpha_i + \beta_j + \delta_l + (\alpha\beta)_{ij} + (\alpha\delta)_{il} + (\beta\delta)_{jl} + (\alpha\beta\delta)_{ijl} + e_{ijkl}$$

-	$\bar{x}_{i..}$	$\bar{x}_{.j.}$	$\bar{x}_{..k.}$	$\bar{x}_{...l}$	$\bar{x}_{ij.}$	$\bar{x}_{i.k.}$	$\bar{x}_{i..l}$	$\bar{x}_{.jk.}$	$\bar{x}_{.j.l}$	$\bar{x}_{..kl}$	$\bar{x}_{ijk.}$	$\bar{x}_{ij.l}$	$\bar{x}_{i.kl}$	$\bar{x}_{.jkl}$	$x_{ijkl}$	$\bar{\bar{x}}$
S <sub>C</sub>			1													-1
S <sub>A</sub>	1															-1
S <sub>B</sub>		1														-1
S <sub>D</sub>				1												-1
S <sub>AB</sub>	-1	-1			1											1
S <sub>AD</sub>	-1			-1			1									1
S <sub>BD</sub>		-1		-1					1							1
S <sub>ABD</sub>	1	1		1	-1		-1		-1			1				-1
S <sub>e</sub>			-1									-1			1	1

(交互作用の「×」は表のサイズにより省略して書いています。)

表から各平方和の導出式が簡単にできますね。S<sub>C</sub>、S<sub>A×B×D</sub>、S<sub>e</sub>を例に挙げます。

$$\bullet S_C = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^c \sum_{l=1}^d (\bar{x}_{..k.} - \bar{\bar{x}})^2$$

$$\bullet S_{A \times B \times D} = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^c \sum_{l=1}^d (\bar{x}_{ij.l} - \bar{x}_{i.j.} - \bar{x}_{i..l} - \bar{x}_{.j.l} + \bar{x}_{i..} + \bar{x}_{.j.} + \bar{x}_{...l} - \bar{\bar{x}})^2$$

$$\bullet S_{A \times B \times C} = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^c \sum_{l=1}^d (x_{ijkl} - \bar{x}_{ij.l} - \bar{x}_{..k.} + \bar{\bar{x}})^2$$

と書けますね。他の平方和も計算できます。

### 【3】主効果・交互作用・誤差の期待値が導出できる

#### (1) 主効果 C の分散の期待値の導出

$$E[S_C] = E[\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^c \sum_{l=1}^d (\bar{x}_{..k.} - \bar{\bar{x}})^2] = E[\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^c \sum_{l=1}^d (\gamma_k + \bar{e}_{..k.} - \bar{e})^2] = abd(c-1)\sigma_C^2 + (c-1)\sigma_e^2$$

主効果 C の自由度は(c-1)より、分散の期待値 E[V<sub>C</sub>]=abdσ<sub>C</sub><sup>2</sup> + σ<sub>e</sub><sup>2</sup>

#### (2) 交互作用 A×B×D の分散の期待値の導出

$$E[S_{A \times B \times D}] = E[\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^c \sum_{l=1}^d (\bar{x}_{ij.l} - \bar{x}_{i.j.} - \bar{x}_{i..l} - \bar{x}_{.j.l} + \bar{x}_{i..} + \bar{x}_{.j.} + \bar{x}_{...l} - \bar{\bar{x}})^2]$$

$$= E[\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^c \sum_{l=1}^d ((\alpha\beta\delta)_{ijl} + (\bar{e}_{ij.l} - \bar{e}_{i.j.} - \bar{e}_{i..l} - \bar{e}_{.j.l} + \bar{e}_{i..} + \bar{e}_{.j.} + \bar{e}_{...l} - \bar{e}))^2]$$

$$= c(a-1)(b-1)(d-1)\sigma_{A \times B \times D}^2 + (a-1)(b-1)(d-1)\sigma_e^2$$

交互作用 A×B×D の自由度は(a-1)(b-1)(d-1)より、分散の期待値 E[V<sub>A×B×D</sub>] = cσ<sub>A×B×D</sub><sup>2</sup> + σ<sub>e</sub><sup>2</sup>

#### (3) 残差の分散の期待値の導出

$$E[S_e] = E[\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^c \sum_{l=1}^d (x_{ijkl} - \bar{x}_{ij.l} - \bar{x}_{..k.} + \bar{\bar{x}})^2] = E[\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^c \sum_{l=1}^d (e_{ijkl} - \bar{e}_{ij.l} - \bar{e}_{..k.} + \bar{e})^2]$$

$$= (abd-1)(c-1)\sigma_e^2$$

残差 e の自由度は (abd-1)(c-1)より、分散の期待値 E[V<sub>e</sub>] = σ<sub>e</sub><sup>2</sup>

【4】乱塊法(4 因子)の分散分析ができる

(1) 自由度の計算

-	a	b	c	d	ab	ac	ad	bc	bd	cd	abc	abd	acd	bcd	abcd	1
C			1													-1
A	1															-1
B		1														-1
D				1												-1
A×B	-1	-1			1											1
A×D	-1			-1			1									1
B×D		-1		-1					1							1
A×B×D	1	1		1	-1		-1		-1			1				-1
Se			-1									-1			1	1

(2) 分散分析の結果

分散分析表を作ります。

-	自由度 Φ	E[V]
C	$c - 1$	$\sigma_e^2 + abd\sigma_C^2$
A	$a - 1$	$\sigma_e^2 + bcd\sigma_A^2$
B	$b - 1$	$\sigma_e^2 + acd\sigma_B^2$
D	$d - 1$	$\sigma_e^2 + abc\sigma_D^2$
A×B	$(a - 1)(b - 1)$	$\sigma_e^2 + cd\sigma_{A \times B}^2$
A×D	$(a - 1)(d - 1)$	$\sigma_e^2 + bc\sigma_{A \times D}^2$
B×D	$(b - 1)(d - 1)$	$\sigma_e^2 + ac\sigma_{B \times D}^2$
A×B×D	$(a - 1)(b - 1)(d - 1)$	$\sigma_e^2 + c\sigma_{A \times B \times D}^2$
e	$(abd - 1)(c - 1)$	$\sigma_e^2$
T	$abcd - 1$	-

【5】主効果・交互作用の区間推定が導出できる

(1) 分散の期待値から分散の推定値を導出

分散分析から、e の分散の推定値 E[V]を導出します。

$$V_e = \widehat{\sigma_e^2}$$

上の表から、分散の推定値を求めます。

(2) 主効果の点推定と区間推定

点推定： $\hat{\mu}(C_k) = \bar{x}_{..k} = \mu + \bar{\gamma}_k = \mu + \gamma_k + \bar{e}_{..k}$

分散： $\widehat{Var}(\hat{\mu}(C_k)) = V[\mu + \gamma_k + \bar{e}_{..k}] = V[\gamma_k] + V[\bar{e}_{..k}] = \widehat{\sigma_C^2} + \frac{\widehat{\sigma_e^2}}{abd}$

$V_e$  が求まったので、自由度  $\phi$  と、点推定  $\mu$  を代入すれば推定区間が求まります。

(3) 交互作用の区間推定

点推定： $\hat{\mu}(A_i B_j D_l) = \bar{x}_{i.j..l} = \mu + \bar{\gamma} + \alpha_i + \beta_j + \delta_l + \gamma_k + (\alpha\beta\delta)_{ijl} + \bar{e}_{i.j..l}$

分散： $\widehat{Var}(\hat{\mu}(A_i B_j D_l))$

$$= V[\mu + \bar{\gamma} + \alpha_i + \beta_j + \delta_l + \gamma_k + (\alpha\beta\delta)_{ijl} + \bar{e}_{i.j..l}] = V[\bar{\gamma}] + V[\bar{e}_{i.j..l}] = \frac{\widehat{\sigma_C^2}}{c} + \frac{\widehat{\sigma_e^2}}{c}$$

$V_e$  が求まったので、自由度  $\phi$  と、点推定  $\mu$  を代入すれば推定区間が求まります。

一連の導出過程を解説しました。

以上、乱塊法(4 因子)の導出過程を詳細に解説しました。

## 分散分析の比較(完全配置実験と分割法)がわかる

### 【1】 分割法を使う場合と使わない場合で比較

分割法の特徴を理解するには、分割法と他法との比較がオススメです。本記事では3パターンの実験データを比較しましょう。

- |                      |
|----------------------|
| 1.分割法を使わない場合(完全配置実験) |
| 2.分割法を使う場合(分割数少なめ)   |
| 3.分割法を使う場合(分割数多め)    |

扱うデータは同じとしますが、上の3つの方法で分散分析します。扱うデータはわかりやすくするために2水準の4因子、計  $2^4=16$  個とします。

-		B1		B2	
		D1	D2	D1	D2
A1	C1	x1	x5	x9	x13
	C2	x2	x6	x10	x14
A2	C1	x3	x7	x11	x15
	C2	x4	x8	x12	x16

### 【2】 データの構造式を比較(分割法 vs 完全配置実験)

#### (1) 完全配置実験と分割法で比較

3パターンを比較します。因子は4種類(A,B,C,D)で考えます。

- |  |
|--|
| 1.四元配置実験                                   |
| 2.因子 C,A を1次単位、因子 B,D を2次単位とする分割法          |
| 3.因子 C,A を1次単位、因子 B を2次単位、因子 D を3次単位とする分割法 |

それぞれの手法について、習得に不安がある方は、関連記事の解説をご覧ください。

四元配置実験:本冊子【四元配置実験(繰り返し有り)の分散分析・区間推定が解ける【必見】】

分割法:本冊子【分割法(3因子2段分割)の分散分析・区間推定が解ける【必見】】

#### (2) データの構造式を作る

データの構造式を作りましょう。ただし、式の項が 16 個あり、長いので、表にまとめました。

$$x_{ijkl} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_k + \delta_l + (\alpha\beta)_{ij} + (\alpha\gamma)_{ik} + (\alpha\delta)_{il} + (\beta\gamma)_{jk} + (\beta\delta)_{jl} + (\gamma\delta)_{kl} + (\alpha\beta\gamma)_{ijk} + (\alpha\beta\delta)_{ijl} + (\alpha\gamma\delta)_{ikl} + (\beta\gamma\delta)_{jkl} + e_{ijkl}$$

項	四元配置実験	分割法(2 分割)	分割法(3 分割)
x	$x_{ijkl}$	$x_{ijkl}$	$x_{ijkl}$
平均	$\mu$	$\mu$	$\mu$
C	$\gamma_k$	$\gamma_k$	$\gamma_k$
A	$\alpha_i$	$\alpha_i$	$\alpha_i$
AC	$(\alpha\gamma)_{ik}$	$e_{(1)ik}$	$e_{(1)ik}$
B	$\beta_j$	$\beta_j$	$\beta_j$
AB	$(\alpha\beta)_{ij}$	$(\alpha\beta)_{ij}$	$(\alpha\beta)_{ij}$
BC	$(\beta\gamma)_{jk}$	$(\beta\gamma)_{jk}$	$(\beta\gamma)_{jk}$
ABC	$(\alpha\beta\gamma)_{ijk}$	$(\alpha\beta\gamma)_{ijk}$	$e_{(2)ijk}$
D	$\delta_l$	$\delta_l$	$\delta_l$
AD	$(\alpha\delta)_{il}$	$(\alpha\delta)_{il}$	$(\alpha\delta)_{il}$
BD	$(\beta\delta)_{jl}$	$(\beta\delta)_{jl}$	$(\beta\delta)_{jl}$
CD	$(\gamma\delta)_{kl}$	$(\gamma\delta)_{kl}$	$(\gamma\delta)_{kl}$
ABD	$(\alpha\beta\delta)_{ijl}$	$(\alpha\beta\delta)_{ijl}$	$(\alpha\beta\delta)_{ijl}$
ACD	$(\alpha\gamma\delta)_{ikl}$	$(\alpha\gamma\delta)_{ikl}$	$(\alpha\gamma\delta)_{ikl}$
BCD	$(\beta\gamma\delta)_{jkl}$	$(\beta\gamma\delta)_{jkl}$	$(\beta\gamma\delta)_{jkl}$
ABCD	$e_{ijkl}$	$e_{(2)ijkl}$	$e_{(3)ijkl}$

実は、分割法する・しないの違いは、交互作用 (A×C、A×B×C、A×B×C×D) を残差 e に変えているだけの違いなのです。

完全配置実験と分割法は全く別物と思いがちですが、一部の効果を残差に変えているだけです。分割法の難しいハードルが一気に下がったと思います。

### 【3】分散分析を比較(分割法 vs 完全配置実験)

データの構造式を比較すると、一部の効果を残差に変えているだけの違いであるとわかりました。分散分析を比較すると次の違いがわかります。

分割法と完全配置実験では、平方和 S、自由度 φ と平均平方(不偏分散)V は変わらない。ただし、平均平方(不偏分散)の期待値 E[V]は変わる。

完全配置実験と分割法は全く別物と思いがちですが、一部の効果を残差に変えているだけなので、平方和、自由度を計算するために使うデータは同じです。ですから、分割法と完全配置実験のどちらでも平方和 S、自由度 φ と平均平方(不偏分散)V は変わりません。

つまり、完全配置実験の交互作用 A×C と分割法の e(1)の平方和、自由度、分散の値は同じです。同様に交互作用 A×B×C、A×B×C×D についても同じです。

しかし、期待値だけは異なるので、実際に比較しましょう。

x	四元配置実験	分割法(2分割)	分割法(3分割)
C			$\sigma_{e(3)}^2$
		$\sigma_{e(2)}^2$	$+d\sigma_{e(2)}^2$
	$\sigma_e^2$	$+bd\sigma_{e(1)}^2$	$+bd\sigma_{e(1)}^2$
	$+abd\sigma_C^2$	$+abd\sigma_C^2$	$+abd\sigma_C^2$
A			$\sigma_{e(3)}^2$
		$\sigma_{e(2)}^2$	$+d\sigma_{e(2)}^2$
	$\sigma_e^2$	$+bd\sigma_{e(1)}^2$	$+bd\sigma_{e(1)}^2$
	$+bcd\sigma_A^2$	$+bcd\sigma_A^2$	$+bcd\sigma_A^2$
A×C(e(1))			$\sigma_{e(3)}^2$
		$\sigma_{e(2)}^2$	$+d\sigma_{e(2)}^2$
	$\sigma_e^2$	$+bd\sigma_{e(1)}^2$	$+bd\sigma_{e(1)}^2$
	$+bd\sigma_{A×C}^2$		
B			$\sigma_{e(3)}^2$
		$\sigma_{e(2)}^2$	$+d\sigma_{e(2)}^2$
	$\sigma_e^2$		
	$+acd\sigma_B^2$	$+acd\sigma_B^2$	$+acd\sigma_B^2$
A×B			$\sigma_{e(3)}^2$
		$\sigma_{e(2)}^2$	$+d\sigma_{e(2)}^2$
	$\sigma_e^2$		
	$+cd\sigma_{A×B}^2$	$+cd\sigma_{A×B}^2$	$+cd\sigma_{A×B}^2$
B×C			$\sigma_{e(3)}^2$
		$\sigma_{e(2)}^2$	$+d\sigma_{e(2)}^2$
	$\sigma_e^2$		
	$+ad\sigma_{B×C}^2$	$+ad\sigma_{B×C}^2$	$+ad\sigma_{B×C}^2$
A×B×C(e(2))			$\sigma_{e(3)}^2$
		$\sigma_{e(2)}^2$	$+d\sigma_{e(2)}^2$
	$\sigma_e^2$		
	$+d\sigma_{A×B×C}^2$	$+d\sigma_{A×B×C}^2$	
D			$\sigma_{e(3)}^2$
		$\sigma_{e(2)}^2$	
	$\sigma_e^2$		
	$+abc\sigma_D^2$	$+abc\sigma_D^2$	$+abc\sigma_D^2$

A×D			$\sigma_{e(3)}^2$
		$\sigma_{e(2)}^2$	
	$\sigma_e^2$		
	$+bc\sigma_{A\times D}^2$	$+bc\sigma_{A\times D}^2$	$+bc\sigma_{A\times D}^2$
B×D			$\sigma_{e(3)}^2$
		$\sigma_{e(2)}^2$	
	$\sigma_e^2$		
	$+ac\sigma_{B\times D}^2$	$+ac\sigma_{B\times D}^2$	$+ac\sigma_{B\times D}^2$
C×D			$\sigma_{e(3)}^2$
		$\sigma_{e(2)}^2$	
	$\sigma_e^2$		
	$+ab\sigma_{C\times D}^2$	$+ab\sigma_{C\times D}^2$	$+ab\sigma_{C\times D}^2$
A×B×D			$\sigma_{e(3)}^2$
		$\sigma_{e(2)}^2$	
	$\sigma_e^2$		
	$+c\sigma_{A\times B\times D}^2$	$+c\sigma_{A\times B\times D}^2$	$+c\sigma_{A\times B\times D}^2$

A×C×D			$\sigma_{e(3)}^2$
		$\sigma_{e(2)}^2$	
	$\sigma_e^2$		
	$+b\sigma_{A\times C\times D}^2$	$+b\sigma_{A\times C\times D}^2$	$+b\sigma_{A\times C\times D}^2$
B×C×D			$\sigma_{e(3)}^2$
		$\sigma_{e(2)}^2$	
	$\sigma_e^2$		
	$+a\sigma_{B\times C\times D}^2$	$+a\sigma_{B\times C\times D}^2$	$+a\sigma_{B\times C\times D}^2$
e			$\sigma_{e(3)}^2$
		$\sigma_{e(2)}^2$	
	$\sigma_e^2$		

3例の比較をよく見て、E[V]の係数の入れ方を理解しましょう。

#### 【4】比較してわかる分割法の特徴

わざわざ交互作用を残差にして残差を分割するメリットは何でしょうか？  
また分割するデメリットは何でしょうか？

分割法のメリットは、因子ごとに検定で比較する残差を選ぶことができる。  
デメリットは残差項が増えるため、検定結果が有意になりにくくなる。

実際は、特別ケアする因子があるために、全体の誤差とその部分の誤差を分けて考えるときに分割法を使います。計算手法が楽とか速く検定できるとかのメリットはないです。

以上、分割法の特徴を完全配置実験と分散分析を用いて解説しました。

【You Tube でも解説しています。ご覧ください】

[https://www.youtube.com/embed/ZYrjk\\_bQDg0](https://www.youtube.com/embed/ZYrjk_bQDg0)

【1】多水準法とは何かがわかる

(1) 教科書の定義

m 水準の実験において、ある因子だけ m<sup>2</sup>水準を割り当てたい場合を多水準法と読んでいる。  
 m=2 なら 2 水準系の実験で因子 A だけが 4 水準に割り付け、  
 m=3 なら 3 水準系の実験で因子 A だけが 9 水準に割り付ける方法

(2) データの構造式から多水準法を理解する

- ① 完全配置実験のデータの構造式を作る
- ② 一部の項を変形すれば多水準法になる

QC プラネッツでは、完全配置実験のデータの構造式からスタートして、変形すればどんな手法のデータの構造式が得られる点を重視します。

【2】分割法のデータの構造式が書ける

(1) データの構造式

4 因子の完全配置実験のデータの構造式からスタートします。

★四元配置実験のデータの構造式

$$x_{ijkl} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_k + \delta_l + (\alpha\beta)_{ij} + (\alpha\gamma)_{ik} + (\alpha\delta)_{il} + (\beta\gamma)_{jk} + (\beta\delta)_{jl} + (\gamma\delta)_{kl} + (\alpha\beta\gamma)_{ijk} + (\alpha\beta\delta)_{ijl} + (\alpha\gamma\delta)_{ikl} + (\beta\gamma\delta)_{jkl} + e_{ijkl}$$

(i = j = k = l = m)

次に、因子 A の水準を m<sup>2</sup>とします。つまり A,B を A に合併させます。

No	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
完全配置	α	β	γ	δ	αβ	αγ	αδ	βγ	βδ	γδ	αβγ	αβδ	αγδ	βγδ	αβγδ
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
多水準	α	α	γ	δ	α	αγ	αδ	αγ	αδ	γδ	αγ	αδ	αγδ	αγδ	αγδ

データの構造式を多水準法に変形します。

$$x_{ikl} = \mu + \alpha_i + \gamma_k + \delta_l + (\alpha\gamma)_{ik} + (\alpha\delta)_{il} + (\gamma\delta)_{kl} + (\alpha\gamma\delta)_{ikl} + e_{ikl} \quad ((\alpha\gamma\delta)_{ikl} \text{ と } e_{ikl} \text{ が交絡})$$

(i=m<sup>2</sup>, k=l=m)

四元配置実験が三元配置実験に代わり、添字 i の水準数が m から m<sup>2</sup>に増加しました。

(2) 各平均値をデータの構造式で作る

- $\bar{x}_{i..} = \mu + \alpha_i + \bar{e}_{i..}$
- $\bar{x}_{.k.} = \mu + \gamma_k + \bar{e}_{.k.}$
- $\bar{x}_{..l} = \mu + \delta_l + \bar{e}_{..l}$
- $\bar{x}_{ik.} = \mu + \alpha_i + \gamma_k + (\alpha\gamma)_{ik} + \bar{e}_{ik.}$
- $\bar{x}_{i.l} = \mu + \alpha_i + \delta_l + (\alpha\delta)_{il} + \bar{e}_{i.l}$
- $\bar{x}_{.kl} = \mu + \gamma_k + \delta_l + (\gamma\delta)_{kl} + \bar{e}_{.kl}$
- $\bar{\bar{x}} = \mu + \bar{e}$

**【3】** 多水準法の平方和の分解の式が書ける

(1) データの構造式を变形

-	$\bar{x}_{i..}$	$\bar{x}_{.k.}$	$\bar{x}_{..l}$	$\bar{x}_{ik.}$	$\bar{x}_{i.l}$	$\bar{x}_{.kl}$	$x_{ikl}$	$\bar{\bar{x}}$
S <sub>A</sub>	1							-1
S <sub>C</sub>		1						-1
S <sub>D</sub>			1					-1
S <sub>A×C</sub>	-1	-1		1				1
S <sub>A×D</sub>	-1		-1		1			1
S <sub>C×D</sub>		-1	-1			1		1
S <sub>e</sub>	1	1	1	-1	-1	-1	1	-1

表から各平方和の導出式が簡単にできますね。S<sub>D</sub>、S<sub>A×D</sub>、S<sub>e</sub>を例に挙げます。

$$\begin{aligned} \cdot S_D &= \sum_{i=1}^a \sum_{k=1}^c \sum_{l=1}^d (\bar{x}_{..l} - \bar{\bar{x}})^2 \\ \cdot S_{A \times D} &= \sum_{i=1}^a \sum_{k=1}^c \sum_{l=1}^d (\bar{x}_{ik.} - \bar{x}_{i..} - \bar{x}_{.k.} + \bar{\bar{x}})^2 \\ \cdot S_e &= \sum_{i=1}^a \sum_{k=1}^c \sum_{l=1}^d (x_{ikl} - \bar{x}_{ik.} - \bar{x}_{i.l} - \bar{x}_{.kl} + \bar{x}_{i..} + \bar{x}_{.k.} + \bar{x}_{..l} - \bar{\bar{x}})^2 \end{aligned}$$

と書けますね。他の平方和も同様に計算できます。

**【4】** 主効果・交互作用・誤差の期待値が導出できる

(1) 主効果の分散の期待値の導出

$$E[S_D] = E[\sum_{i=1}^a \sum_{k=1}^c \sum_{l=1}^d (\bar{x}_{..l} - \bar{\bar{x}})^2] = ac(d-1)\sigma_D^2 + (d-1)\sigma_e^2$$

主効果 D の自由度は  $(d-1)$  より、分散の期待値  $E[V_D] = ac\sigma_D^2 + \sigma_e^2$

(2) 交互作用の分散の期待値の導出

$$E[S_{A \times D}] = E[\sum_{i=1}^a \sum_{k=1}^c \sum_{l=1}^d (\bar{x}_{ik.} - \bar{x}_{i..} - \bar{x}_{.k.} + \bar{\bar{x}})^2] = c(a-1)(d-1)\sigma_{A \times D}^2 + (a-1)(d-1)\sigma_e^2$$

交互作用 A×D の自由度は  $(a-1)(d-1)$  より、分散の期待値  $E[V_{A \times D}] = c\sigma_{A \times D}^2 + \sigma_e^2$

(3) 残差の分散の期待値の導出

$$E[S_e] = E[\sum_{i=1}^a \sum_{k=1}^c \sum_{l=1}^d (x_{ikl} - \bar{x}_{ik.} - \bar{x}_{i.l} - \bar{x}_{.kl} + \bar{x}_{i..} + \bar{x}_{.k.} + \bar{x}_{..l} - \bar{\bar{x}})^2]$$

$$= (a-1)(c-1)(d-1)\sigma_e^2$$

残差 e の自由度は  $(a-1)(c-1)(d-1)$  より、分散の期待値  $E[V_e] = \sigma_e^2$

**【5】** ⑤分割法の分散分析ができる

(1) 自由度の計算

-	a	c	d	ac	ad	cd	acd	1
A	1							-1
C		1						-1
D			1					-1
A×C	-1	-1		1				1
A×D	-1		-1		1			1
C×D		-1	-1			1		1
A×C×D	1	1	1	-1	-1	-1	1	-1

(2) 分散分析の結果

分散分析表を作ります。

-	自由度 $\Phi$	$E[V]$
A	$a - 1$	$\sigma_e^2 + cd\sigma_A^2$
C	$c - 1$	$\sigma_e^2 + ad\sigma_C^2$
D	$d - 1$	$\sigma_e^2 + ac\sigma_D^2$
A×C	$(a - 1)(c - 1)$	$\sigma_e^2 + d\sigma_{A\times C}^2$
A×D	$(a - 1)(d - 1)$	$\sigma_e^2 + c\sigma_{A\times D}^2$
C×D	$(c - 1)(d - 1)$	$\sigma_e^2 + a\sigma_{C\times D}^2$
A×C×D	$(a - 1)(c - 1)(d - 1)$	$\sigma_e^2$
T	$acd - 1$	-

文字だけ見ると、三元配置実験と全く同じ分散分析の結果になります。しかし、 $a \equiv a \times b$  です。  
 $a=4, c=2, d=2$  と、値が異なる点に注意しましょう

【6】 主効果・交互作用の区間推定が導出できる

(1) 分散の期待値から分散の推定値を導出

分散分析から、 $e$  の分散の推定値  $E[V]$  を導出します。

$$V_e = \widehat{\sigma_e^2}$$

上の表から、分散の推定値を求めます。

(2) 主効果の点推定と区間推定

点推定： $\hat{\mu}(D_l) = \bar{x}_{..l} = \widehat{\mu + \delta_l} = \mu + \delta_l + \bar{e}_{..l}$

分散： $\widehat{Var}(\hat{\mu}(D_l)) = V[\mu + \delta_l + \bar{e}_{..l}] = V[\bar{e}_{..l}] = \frac{\widehat{\sigma_e^2}}{d}$

$V_e$  が求まったので、自由度  $\phi$  と、点推定  $\mu$  を代入すれば推定区間が求まります。

(3) 交互作用の区間推定

点推定： $\hat{\mu}(A_i D_l) = \bar{x}_{i..l} = \mu + \alpha_i + \delta_l + (\alpha\delta)_{il} + \bar{e}_{i..l}$

分散： $\widehat{Var}(\hat{\mu}(A_i D_l)) = V[\mu + \alpha_i + \delta_l + (\alpha\delta)_{il} + \bar{e}_{i..l}] = V[\bar{e}_{i..l}] = \frac{\widehat{\sigma_e^2}}{ad}$

$V_e$  が求まったので、自由度  $\phi$  と、点推定  $\mu$  を代入すれば推定区間が求まります。  
 一連の導出過程を解説しました。

以上、多水準法の分散分析の導出過程を詳細に解説しました。

多水準法(直交表)と完全配置実験の分散分析は一致する

**【1】** そもそも直交表と完全配置実験からは同じ平方和、分散分析結果が得られる

(1) 基本はデータの構造式

例として、3 因子のデータの構造式を書きましょう。機械的に書けますね

$$x_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_k + (\alpha\beta)_{ij} + (\alpha\gamma)_{ik} + (\beta\gamma)_{jk} + e_{ikl}$$

(2) 直交表の列はデータの構造式の項

データの構造式の各項が直交表の列に該当し、その列にそれぞれの効果の平方和が計算できます。

データの構造式から完全配置実験も直交表も活用するので、分散分析結果は完全配置実験も直交表も同じ結果になります。

完全配置実験は全パターン実験する  
直交表は実験回数が減らせる魔法の表  
と理解しがちですが、同じものです。

本記事では、完全配置実験と多水準法(直交表)を使って分散分析が一致することを確認します。

**【2】** 4 水準をもつ因子を直交表 L16 と完全配置実験から分散分析を導出

(1) 4 水準をもつ因子の三元配置実験から分散分析を導出

データを用意します。

-		B1	B2
A1	C1	12	30
	C2	24	48
A2	C1	30	36
	C2	42	48
A3	C1	60	66
	C2	72	84
A4	C1	90	96
	C2	102	120

三元配置実験

$$CT = \frac{1}{16}(12+30+\dots+120)^2 = 57600, \quad S_T = (12^2+30^2+\dots+120^2) - CT = 14904,$$

$$S_A = \frac{1}{4}(114^2+156^2+282^2+408^2) - CT = 13230, \quad S_B = 576, \quad S_C = 900$$

$$S_{A \times B} = \frac{1}{2}(36^2+78^2+\dots+216^2) - S_A - S_B - CT = 126, \quad S_{A \times C} = 18, \quad S_{B \times C} = 36, \quad S_e = 18$$

分散分析表でまとめます。

-	S	φ	V	F	F0
A	13230	3	4410	735	9.28
B	576	1	576	96	10.13
C	900	1	900	150	10.13
AB	126	3	42	7	9.28
AC	18	3	6	1	9.28
BC	36	1	36	6	10.13
e	18	3	6	-	-
T	14904	15	-	-	-

(2) 直交表 L16 から分散分析を導出  
直交表に割り当てます。

割当	A	A	A	B	AB	AB	AB	C	AC	AC	AC	BC	ABC	ABC	ABC
列	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
成分	a		a		a		a		a		a		a		a
		b	b			b	b			b	b			b	b
				c	c	c	c					c	c	c	c
								d	d	d	d	d	d	d	d
1の和	270	396	522	432	474	468	462	420	486	480	474	492	474	480	486
2の和	690	564	438	528	486	492	498	540	474	480	486	468	486	480	474
平方和S	11025	1764	441	576	9	36	81	900	9	0	9	36	9	0	9

$$S_A = S[1] + S[2] + S[3] = 11025 + 1764 + 441 = 13230$$

$$S_B = S[4] = 576$$

$$S_C = S[8] = 900$$

$$S_{A \times B} = S[5] + S[6] + S[7] = 9 + 36 + 81 = 126$$

$$S_{A \times C} = S[9] + S[10] + S[11] = 9 + 0 + 9 = 18$$

$$S_{B \times C} = S[12] = 36$$

$$S_e = S[13] + S[14] + S[15] = 9 + 0 + 9 = 18$$

$$S_T = S[1] + \dots + S[16] = 14904$$

-	S	φ	V	F	F0
A	13230	3	4410	735	9.28
B	576	1	576	96	10.13
C	900	1	900	150	10.13
AB	126	3	42	7	9.28
AC	18	3	6	1	9.28
BC	36	1	36	6	10.13
e	18	3	6	-	-
T	14904	15	-	-	-

完全配置実験と直交表でそれぞれ分散分析しても同じ結果になることがわかりました。

**【3】** 9水準をもつ因子を直交表 L27 と完全配置実験から分散分析を導出

(1) 9水準をもつ因子の二元配置実験から分散分析を導出

データを用意します。

-	B1	B2	B3
A1	8	13	9
A2	-5	18	26
A3	4	21	26
A4	19	15	20
A5	11	25	24
A6	15	23	28
A7	23	28	24
A8	9	32	40
A9	15	32	37

二元配置実験

$$CT = \frac{1}{27}(8+13+\dots+37)^2 = 10800, S_T = (3^2+13^2+\dots+37^2) \cdot CT = 2730,$$

$$S_A = \frac{1}{3}(30^2+39^2+\dots+84^2) \cdot CT = 912, S_B = 1134, S_e = 684$$

分散分析表でまとめます。

-	S	$\phi$	V	F
A	912	8	114	2.67
B	1134	2	567	13.26
e	684	16	42.75	-
T	2730	26	-	-

(2) 直交表 L27 から分散分析を導出  
直交表に割り当てます。

列	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]	[7]	[8]	[9]	[10]	[11]	[12]	[13]
割当	A	B	AB	AB	C	AC	AC	BC	ABC	ABC	BC	ABC	ABC
1の和	120	99	171	171	159	177	174	216	189	180	216	171	189
2の和	180	207	198	171	180	177	180	162	171	189	144	180	171
3の和	240	234	171	198	201	186	186	162	180	171	180	189	180
平方和S	800	1134	54	54	98	6	8	216	18	18	288	18	18

$$S_A = S[1] + S[5] + S[6] + S[7] = 800 + 98 + 6 + 8 = 912$$

$$S_B = S[2] = 1134$$

$$S_e = S[3] + S[4] + S[8] + \dots + S[13] = 54 + \dots + 18 = 684$$

$$S_T = S[1] + \dots + S[13] = 2730$$

多水準法において、3 因子 A,C を 9 因子 A に統合して直交表に割り付けました。

分散分析表でまとめます。

-	S	$\phi$	V	F
A	912	8	114	2.67
B	1134	2	567	13.26
e	684	16	42.75	-
T	2730	26	-	-

完全配置実験と直交表でそれぞれ分散分析しても同じ結果になることがわかりました。

以上、多水準法(直交表)と完全配置実験の分散分析は一致する内容を詳細に解説しました。

【●You tube で 本記事の読み方を解説しています。】

<https://www.youtube.com/embed/tjjzceCmIog>

【1】擬水準法とは何かがわかる

(1) よく使う場面

a水準の実験において、ある因子 A だけ  $a - m$  ( $0 < m < a$ ) 水準を割り当てたい場合を擬水準法と読んでいる。  
 $a=3$  なら、 $m$  は自然数より  $m=1$   
 $a=4$  なら、 $m$  は自然数より  $m=1,2$   
 $a=2$  なら 3 水準系の実験で因子 A だけが 2 水準に割り付ける場合が多いです。

【2】擬水準法のデータの構造式が書ける

(1) データの構造式

①データの構造式から擬水準法を理解する

水準が余る因子は水準が余らないように因子を一旦置き換える  
 一部の項を変形すれば擬水準法になる

②三元配置実験のデータの構造式

$$x_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_k + (\alpha\beta)_{ij} + (\alpha\gamma)_{ik} + (\beta\gamma)_{jk} + e_{ikl} \quad (i = a, j = b, k = c)$$

③擬水準法のデータの構造式

(余る場合)の擬水準法は、因子 A (水準数  $a - m$ ) を一旦因子 P(水準数  $a$ )に置き換えて、データの構造式を作ります。

$$\alpha_i \rightarrow p_{i'}$$

$$(i = a, i' = a + m)$$

と一時的に変えて、データの構造式を書きます。

$$x_{i'jk} = \mu + p_{i'} + \beta_j + \gamma_k + (p\beta)_{i'j} + (p\gamma)_{i'k} + (\beta\gamma)_{jk} + e_{i'kl} \quad (i' = a + m, j = b, k = c)$$

(2) 擬水準法をデータの構造式から分散分析する上の注意点

分散分析は主効果 P,C,D,  
 交互作用 P×C,P×D,P×C×D(=P についての残差 e と交絡)を調べるので、主効果 A についての結果にならない。主効果 A については個別に平方和を求める必要がある。

擬似的に因子 P に直した場合と、元の擬水準法を下表に比較します。異なる点は色枠しています。

A 因子を P 因子に変換して直交表 L16 を扱う			擬水準法(元データ)で直交表 L27 を扱う		
効果	自由度	平方和	効果	自由度	平方和
P	$a + m - 1$	$S_P$	A	$a - 1$	$S_A$
B	$b - 1$	$S_B$	B	$b - 1$	$S_B$
C	$c - 1$	$S_C$	C	$c - 1$	$S_C$
P×B	$(a + m - 1)(b - 1)$	$S_{P \times B}$	A×B	$(a - 1)(b - 1)$	$S_{A \times B}$
P×C	$(a + m - 1)(c - 1)$	$S_{P \times C}$	A×C	$(a - 1)(c - 1)$	$S_{A \times C}$
B×C	$(b - 1)(c - 1)$	$S_{B \times C}$	B×C	$(b - 1)(c - 1)$	$S_{B \times C}$
e(=P×B×C)	$(a + m - 1)(c - 1)(c - 1)$	$S_e$	e(=A×B×C)	$(a - 1)(b - 1)(c - 1) + mbc$	$S_e$
T	$(a + m)bc - 1$	$S_T$	T	$(a + m)bc - 1$	$S_T$

ここで、1 点注意があります。

擬水準の残差  $e$  の自由度は本来、交互作用  $A \times C \times D$  と交絡しているため、  
 $\phi_e = (a + m - 1)(c - 1)(d - 1)$  ですが、直交表  $L_{27}$  を使うため、全体  $T$  の自由度  
 $\phi_T = (a + m)bc - 1$  に合わせるために、  
 $\phi_e = (a - 1)(b - 1)(c - 1) + mbc$  ( $a = 2, c = 2, d = 2, m = 1$ ) としています。  
 つまり、直交表から擬水準法を使う場合、残差  $e$  の分散の値に注意が必要です。

1. 残差  $e$  の平方和を直交表から求めると、本来の値より高くなる
2. 残差  $e$  の自由度を直交表から求めると、本来の値より高くなる
3. 残差  $e$  の分散を直交表から求めると、「高い目の平方和/高めの自由度」から適正な値に落ち着く？

擬水準法の直交表を使った分散分析の注意点ですね。直交表を無理矢理使っている印象があります。

(3)各平均値をデータの構造式で作る

①母数因子と変量因子の違い

本冊子【【簡単】母数因子と変量因子の違いがすぐわかる】にて、母数因子と変量因子を解説しました。

②母数因子と変量因子

母数因数： $\mu, \beta, \gamma, p\beta, p\gamma, \beta\gamma$

変量因子： $e$

③平均値

母数因数の平均は 0。

変量因子の平均は 0 ではない。

平均値を式にする場合、添字のない文字項はすべて 0 にしますが、変量因子の場合は平均値をいれます。分割法や乱塊法では変量因子が増えるので要注意ですが、擬水準法ではあまり変量因子は使いません。

④平均値の式の代表例

データの構造式

$$x_{ijk} = \mu + p_i + \beta_j + \gamma_k + (p\beta)_{ij} + (p\gamma)_{ik} + (\beta\gamma)_{jk} + e_{ikl} \quad (i' = a + m, j = b, k = c)$$

$$\overline{x'_{i..}} = \mu + p_i + \overline{e'_{i..}}$$

$$\overline{x_{.j.}} = \mu + \beta_j + \overline{e_{.j.}}$$

$$\overline{x_{.k.}} = \mu + \gamma_k + \overline{e_{.k.}}$$

$$\overline{x'_{ij.}} = \mu + p_i + \beta_j + (p\beta)_{ij} + \overline{e'_{ij.}}$$

$$\overline{x'_{ik.}} = \mu + p_i + \gamma_k + (p\gamma)_{ik} + \overline{e'_{ik.}}$$

$$\overline{x_{.jk}} = \mu + \beta_j + \gamma_k + (\beta\gamma)_{jk} + \overline{e_{.jk}}$$

$$\overline{\bar{x}} = \mu + \overline{\bar{e}}$$

**【3】** 分割法の平方和の分解の式が書ける

(1) データの構造式を变形

式を書くで見づらいので、表にまとめます。

-	$x_{ijk}$	$\bar{x}_{i..}$	$\bar{x}_{.j.}$	$\bar{x}_{..k}$	$\bar{x}'_{ij.}$	$\bar{x}'_{i.k}$	$\bar{x}_{.jk}$	$\bar{x}$
S <sub>P</sub>		1						-1
S <sub>B</sub>			1					-1
S <sub>C</sub>				1				-1
S <sub>P×B</sub>		-1	-1		1			1
S <sub>P×C</sub>		-1		-1		1		1
S <sub>B×C</sub>			-1	-1			1	1
S <sub>e(=P×B×C)</sub>	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1
S <sub>T(計)</sub>	1							-1

表から各平方和の導出式が簡単にできますね。S<sub>P</sub>、S<sub>P×C</sub>、S<sub>C×D</sub>、S<sub>e</sub>を例に挙げます。

$$S_P = \sum_{i=1}^{a+m} \sum_{k=1}^c \sum_{l=1}^d (\bar{x}_{i..} - \bar{x})^2$$

$$S_{P \times B} = \sum_{i=1}^{a+m} \sum_{k=1}^c \sum_{l=1}^d (\bar{x}_{ij.} - \bar{x}_{i..} - \bar{x}_{.j.} + \bar{x})^2$$

$$S_{B \times C} = \sum_{i=1}^{a+m} \sum_{k=1}^c \sum_{l=1}^d (\bar{x}_{.jk} - \bar{x}_{.j.} - \bar{x}_{..k} + \bar{x})^2$$

$$S_e = \sum_{i=1}^{a+m} \sum_{k=1}^c \sum_{l=1}^d (x_{ijk} - \bar{x}_{ij.} - \bar{x}_{.jk} - \bar{x}_{i..k} + \bar{x}_{i..} + \bar{x}_{.j.} + \bar{x}_{..k} - \bar{x})^2$$

ここで、因子 A と P の違いに注意が必要です。

因子 P の各水準において、主効果、交互作用は同じ個数になるが、  
因子 A は各水準において、主効果、交互作用は個数が異なる。

因子 P の場合				因子 A の場合			
主効果	個数	交互作用	個数	主効果	個数	交互作用	個数
P <sub>1</sub>	9	P <sub>1</sub> X <sub>1</sub>	3	A <sub>1</sub>	18	A <sub>1</sub> X <sub>1</sub>	6
P <sub>2</sub>	9	P <sub>1</sub> X <sub>2</sub>	3	A <sub>2</sub>	9	A <sub>1</sub> X <sub>2</sub>	6
P <sub>3</sub>	9	P <sub>1</sub> X <sub>3</sub>	3	-	-	A <sub>1</sub> X <sub>3</sub>	6
-	-	P <sub>2</sub> X <sub>1</sub>	3	-	-	A <sub>2</sub> X <sub>1</sub>	3
-	-	P <sub>2</sub> X <sub>2</sub>	3	-	-	A <sub>2</sub> X <sub>2</sub>	3
-	-	P <sub>2</sub> X <sub>3</sub>	3	-	-	A <sub>2</sub> X <sub>3</sub>	3
-	-	P <sub>3</sub> X <sub>1</sub>	3	-	-	-	-
-	-	P <sub>3</sub> X <sub>2</sub>	3	-	-	-	-
-	-	P <sub>3</sub> X <sub>3</sub>	3	-	-	-	-

X は他の因子(B,C を表す)

因子 P の場合は、どの場合も個数が同じなので、

平方和  $S = \sum_{i=1}^{a+m} \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^c$  と i', j, k について独立に  $\Sigma$  が取れます。

一方、因子 A の場合は、因子 A の水準 i によって個数が異なります。そのため、

平方和  $S = \sum_{i=1}^{a+m} \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^c$  ではなく、

平方和  $S = \sum_{i=1}^{a+m} N_i$  と  $\sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^c$  に変える必要があります。擬水準法は難しいですね。

$$S_A = \sum_{i'=1}^{a+m} N_{A_i} (\bar{x}_{i'..} - \bar{x})^2$$

$$S_{A \times B} = \sum_{i'=1}^{a+m} N_{AB_{ij}} (\bar{x}_{i'j.} - \bar{x}_{i'..} - \bar{x}_{.j.} + \bar{x})^2$$

$$S_{B \times C} = \sum_{i'=1}^{a+m} \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^c (\bar{x}_{ijk} - \bar{x}_{i'j.} - \bar{x}_{.j.} - \bar{x}_{i..k} + \bar{x}_{i'..} + \bar{x}_{.j.} + \bar{x}_{..k} - \bar{x})^2$$

$$S_e = \sum_{i'=1}^{a+m} \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^c (x_{ijk} - \bar{x}_{i'j.} - \bar{x}_{.j.} - \bar{x}_{i..k} + \bar{x}_{i'..} + \bar{x}_{.j.} + \bar{x}_{..k} - \bar{x})^2 + (\text{他の因子からの残差分})$$

と書けますね。

## (2) 擬水準法の残差の期待値の導出の注意点

(i)機械的に各因子の水準分  $\Sigma$  をとる分 + (ii)他の因子に含まれる残差の合計の(ii)が追加されます。

(ii)の追加分は

$S_P$  と  $S_A$  の  $\sigma_e^2$  の差分

$S_{P \times B}$  と  $S_{A \times B}$  の  $\sigma_e^2$  の差分

$S_{P \times C}$  と  $S_{A \times C}$  の  $\sigma_e^2$  の差分

$S_{e(P)}$  と  $S_{e(A)}$  の  $\sigma_e^2$  の差分

の和です。

水準数は、 $A \rightarrow 2, B \rightarrow 3, C \rightarrow 3$  と  $2 \times 3 \times 3 = 18$  個のデータを直交表 L27(27 個) に割当てるので、因子の期待値導出で残差が余分に余ります。それを(ii)として合計します。

## 【4】 擬水準法の主効果・交互作用・誤差の期待値が導出できる

### (1) 因子 P の場合

#### ① 主効果の場合

$$E[S_P] = E[\sum_{i'=1}^{a+m} \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^c (\bar{x}_{i'..} - \bar{x})^2] = E[\sum_{i'=1}^{a+m} \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^c (p_i' + (\bar{e}_{i'..} - \bar{e}))^2]$$

$$= E[\sum_{i'=1}^{a+m} \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^c (p_i')^2] + E[\sum_{i'=1}^{a+m} \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^c (\bar{e}_{i'..} - \bar{e})^2] = bc(a+m-1)\sigma_p^2 + (a+m-1)\sigma_e^2$$

主効果 P の自由度は  $(a+m-1)$  より、分散の期待値  $E[V_P]$  が求まります。

$$E[V_P] = bc\sigma_p^2 + \sigma_e^2$$

なお、分散の期待値を以下とします。

$$\sigma_p^2 = E\left[\frac{\sum_{i'=1}^{a+m} \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^c (p_i')^2}{a+m-1}\right]$$

$$\frac{\sigma_e^2}{bc} = E\left[\frac{\sum_{i'=1}^{a+m} \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^c (\bar{e}_{i'..} - \bar{e})^2}{a+m-1}\right]$$

#### ② 交互作用の場合

・  $P \times B$  の場合

$$E[S_{P \times B}] = E[\sum_{i'=1}^{a+m} \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^c (\bar{x}_{i'j.} - \bar{x}_{i'..} - \bar{x}_{.j.} + \bar{x})^2] = E[\sum_{i'=1}^{a+m} \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^c ((p\beta)_{ij} + (\bar{e}_{i'j.} - \bar{e}_{i'..} - \bar{e}_{.j.} + \bar{e}))^2]$$

$$= E[\sum_{i'=1}^{a+m} \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^c (p\beta)_{ij}^2] + E[\sum_{i'=1}^{a+m} \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^c (\bar{e}_{i'j.} - \bar{e}_{i'..} - \bar{e}_{.j.} + \bar{e})^2]$$

$$= (a+m-1)(b-1)c\sigma_{P \times B}^2 + (a+m-1)(b-1)\sigma_e^2$$

交互作用  $P \times B$  の自由度は  $(a+m-1)(b-1)$  より、分散の期待値  $E[V_{P \times B}]$  が求まります。

$$E[V_{P \times B}] = c\sigma_{P \times B}^2 + \sigma_e^2$$

・ B×C の場合

$$E[S_{B \times C}] = E[\sum_{i=1}^{a+m} \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^c (\bar{x}_{.jk} - \bar{x}_{.j} - \bar{x}_{.k} + \bar{x})^2] = E[\sum_{i=1}^{a+m} \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^c ((\beta\gamma)_{jk} + (\bar{e}_{.jk} - \bar{e}_{.j} - \bar{e}_{.k} + \bar{e}))^2]$$

$$= E[\sum_{i=1}^{a+m} \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^c (\beta\gamma)_{jk}^2] + E[\sum_{i=1}^{a+m} \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^c (\bar{e}_{.jk} - \bar{e}_{.j} - \bar{e}_{.k} + \bar{e})^2]$$

$$= (a+m)(b-1)(c-1)\sigma_{B \times C}^2 + (b-1)(c-1)\sigma_e^2$$

交互作用 B×C の自由度は  $(b-1)(c-1)$  より、分散の期待値  $E[V_{B \times C}]$  が求まります。

$$E[V_{B \times C}] = (a+m)\sigma_{B \times C}^2 + \sigma_e^2$$

③ 残差の場合

$$E[S_e] = E[\sum_{i=1}^{a+m} \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^c (x_{ijk} - \bar{x}_{i.} - \bar{x}_{.jk} - \bar{x}_{i.k} + \bar{x}_{i..} + \bar{x}_{.j} + \bar{x}_{.k} - \bar{x})^2]$$

$$= E[\sum_{i=1}^{a+m} \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^c (e_{ijk} - \bar{e}_{i.} - \bar{e}_{.jk} - \bar{e}_{i.k} + \bar{e}_{i..} + \bar{e}_{.j} + \bar{e}_{.k} - \bar{e})^2]$$

$$= (a+m-1)(b-1)(c-1)\sigma_e^2$$

残差 e の自由度は  $(a+m-1)(b-1)(c-1)$  より、分散の期待値  $E[V_e]$  が求まります。

$$E[V_e] = \sigma_e^2$$

(2) 因子 A の場合

① 主効果の場合

$$E[S_A] = E[\sum_{i=1}^{a+m} N_{A_i} (\bar{x}_{i.} - \bar{x})^2] = E[\sum_{i=1}^{a+m} N_{A_i} (\alpha_i + (\bar{e}_{i.} - \bar{e}))^2]$$

$$= E[\sum_{i=1}^{a+m} N_{A_i} (\alpha_i)^2] + E[\sum_{i=1}^{a+m} N_{A_i} (\bar{e}_{i.} - \bar{e})^2] = E[\sum_{i=1}^{a+m} N_{A_i} (\alpha_i)^2] + (a+m-1)\sigma_e^2$$

として、第 1 項は  $\sigma_A^2$  としませぬ。

主効果 A の自由度は  $(a+m-1)$  より、分散の期待値  $E[V_A]$  が求まります。

$$E[V_A] = E[\frac{\sum_{i=1}^{a+m} N_{A_i} (\alpha_i)^2}{a+m-1}] + \sigma_e^2$$

② 交互作用の場合

・ A×B の場合

$$E[S_{A \times B}] = E[\sum_{i=1}^{a+m} N_{AB_{ij}} (\bar{x}_{ij.} - \bar{x}_{i.} - \bar{x}_{.j} + \bar{x})^2]$$

$$= E[\sum_{i=1}^{a+m} N_{AB_{ij}} ((\alpha\beta)_{ij} + (\bar{e}_{ij.} - \bar{e}_{i.} - \bar{e}_{.j} + \bar{e}))^2]$$

$$= E[\sum_{i=1}^{a+m} N_{AB_{ij}} (\alpha\beta)_{ij}^2] + (a+m-1)(b-1)\sigma_e^2$$

交互作用 A×B の自由度は  $(a+m-1)(b-1)$  より、分散の期待値  $E[V_{A \times B}]$  が求まります。

$$E[V_{A \times B}] = E[\frac{\sum_{i=1}^{a+m} N_{AB_{ij}} (\alpha\beta)_{ij}^2}{(a+m-1)(b-1)}] + \sigma_e^2$$

・ B×C の場合

$$E[S_{B \times C}] = E[\sum_{i=1}^{a+m} \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^c (\bar{x}_{.jk} - \bar{x}_{.j} - \bar{x}_{.k} + \bar{x})^2] = E[\sum_{i=1}^{a+m} \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^c ((\beta\gamma)_{jk} + (\bar{e}_{.jk} - \bar{e}_{.j} - \bar{e}_{.k} + \bar{e}))^2]$$

$$= E[\sum_{i=1}^{a+m} \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^c (\beta\gamma)_{jk}^2] + E[\sum_{i=1}^{a+m} \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^c (\bar{e}_{.jk} - \bar{e}_{.j} - \bar{e}_{.k} + \bar{e})^2]$$

$$= a(b-1)(c-1)\sigma_{B \times C}^2 + (b-1)(c-1)\sigma_e^2$$

交互作用 B×C の自由度は  $(b-1)(c-1)$  より、分散の期待値  $E[V_{B \times C}]$  が求まります。

$$E[V_{B \times C}] = a\sigma_{B \times C}^2 + \sigma_e^2$$

③残差の場合

$$E[S_e] = E\left[\sum_{i=1}^{a+m} \sum_{k=1}^c \sum_{l=1}^d (x_{ijk} - \bar{x}_{i\cdot} - \bar{x}_{\cdot jk} - \bar{x}_{\cdot l k} + \bar{x}_{i\cdot} + \bar{x}_{\cdot j} + \bar{x}_{\cdot l k} - \bar{x})^2\right]$$

$$= E\left[\sum_{i=1}^{a+m} \sum_{k=1}^c \sum_{l=1}^d (e_{ijk} - \bar{e}_{i\cdot} - \bar{e}_{\cdot jk} - \bar{e}_{\cdot l k} + \bar{e}_{i\cdot} + \bar{e}_{\cdot j} + \bar{e}_{\cdot l k} - \bar{e})^2\right] + (\text{ii}) \text{他の因子に含まれる残差の合計}$$

$$= (a-1)(b-1)(c-1)\sigma_e^2 + (\text{ii}) \text{他の因子に含まれる残差の合計}$$

(ii)他の因子に含まれる残差の合計はを求めます。

主効果、交互作用、残差において、因子 P で求めた残差の期待値と因子 A で求めた残差の期待値を比較して差分をとります。

○は P,A が入る	(1) P 側	(2) A 側	(1)-(2)の差分
○	$(a+m-1)\sigma_e^2$	$(a-1)\sigma_e^2$	$(m)\sigma_e^2$
○×B	$(a+m-1)(b-1)\sigma_e^2$	$(a-1)(b-1)\sigma_e^2$	$(m)(b-1)\sigma_e^2$
○×C	$(a+m-1)(c-1)\sigma_e^2$	$(a-1)(c-1)\sigma_e^2$	$(m)(c-1)\sigma_e^2$
e(○)	$(a+m-1)(b-1)(c-1)\sigma_e^2$	$(a-1)(b-1)(c-1)\sigma_e^2$	$(m)(b-1)(c-1)\sigma_e^2$
		合計	$(m)(bc)\sigma_e^2$

まとめると、

$$E[S_e] = (a-1)(b-1)(c-1)\sigma_e^2 + mbc\sigma_e^2$$

残差 e の自由度は  $(a-1)(b-1)(c-1)\sigma_e^2 + mbc$  より、分散の期待値  $E[V_e]$  が求まります。

$$E[V_e] = \sigma_e^2$$

計算が長いわりに、答えはあっさりしていますね。

【5】分散分析ができる

因子 A(擬水準に直して直交表 L16 を扱う)			因子 A(擬水準法(元データ)で直交表 L27 を扱う)		
効果	自由度	E[V]	効果	自由度	E[V]
P	$a+m-1$	$bc\sigma_P^2 + \sigma_e^2$	A	$a-1$	* 1
B	$b-1$	$(a+m)c\sigma_B^2 + \sigma_e^2$	B	$b-1$	$ac\sigma_B^2 + \sigma_e^2$
C	$c-1$	$(a+m)b\sigma_C^2 + \sigma_e^2$	C	$c-1$	$ab\sigma_C^2 + \sigma_e^2$
P×B	$(a+m-1)(b-1)$	$c\sigma_{P\times B}^2 + \sigma_e^2$	A×B	$(a-1)(b-1)$	* 2
P×C	$(a+m-1)(c-1)$	$b\sigma_{P\times C}^2 + \sigma_e^2$	A×C	$(a-1)(c-1)$	* 3
B×C	$(b-1)(c-1)$	$(a+m)\sigma_{B\times C}^2 + \sigma_e^2$	B×C	$(b-1)(c-1)$	$(a+m)\sigma_{B\times C}^2 + \sigma_e^2$
e	$(a+m-1)(b-1)(c-1)$	$\sigma_e^2$	e	$(a-1)(b-1)(c-1) + mbc$	$\sigma_e^2$
T	$(a+m)bc-1$	-	T	$(a+m)bc-1$	-

ここで、

(\*1)は、

$$E[V_A] = E\left[\frac{\sum_{i=1}^a N_{A_i}(\alpha_i)^2}{a-1}\right] + \sigma_e^2$$

直交表 L27 で具体的に書くと、

$$E[V_A] = \frac{18\alpha_1^2 + 9\alpha_2^2}{1} + \sigma_e^2$$

(\*2)は、

$$E[V_{A \times B}] = E\left[\frac{\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b N_{ABij} (\alpha\beta)_{ij}^2}{(a-1)(b-1)}\right] + \sigma_e^2$$

直交表 L27 で具体的に書くと、

$$E[V_{A \times B}] = \frac{6(\alpha\beta)_{11}^2 + 6(\alpha\beta)_{12}^2 + 6(\alpha\beta)_{13}^2 + 3(\alpha\beta)_{21}^2 + 3(\alpha\beta)_{22}^2 + 3(\alpha\beta)_{23}^2}{2} + \sigma_e^2$$

(\*3)は、

$$E[V_{A \times C}] = E\left[\frac{\sum_{i=1}^a \sum_{k=1}^c N_{ACik} (\alpha\gamma)_{ik}^2}{(a-1)(c-1)}\right] + \sigma_e^2$$

直交表 L27 で具体的に書くと、

$$E[V_{A \times C}] = \frac{6(\alpha\gamma)_{11}^2 + 6(\alpha\gamma)_{12}^2 + 6(\alpha\gamma)_{13}^2 + 3(\alpha\gamma)_{21}^2 + 3(\alpha\gamma)_{22}^2 + 3(\alpha\gamma)_{23}^2}{2} + \sigma_e^2$$

以上、擬水準法の分散分析と分散の期待値の導出を解説しました。

【●You tube で 本記事の読み方を解説しています。】

<https://www.youtube.com/embed/N5RDn0121Q8>

【1】擬水準法とは何かがわかる

(1)よく使う場面

a 水準の実験において、ある因子 A だけ  $\alpha + m(\alpha < (\alpha + m) < \alpha^2)$  水準を割り当てたい場合を擬水準法と読んでいる。

$\alpha = 2$  なら、m は自然数より  $m = 1$

$\alpha = 3$  なら、m は自然数より  $m = 1, 2, 3, 4, 5$

$\alpha = 2$  なら 2 水準系の実験で因子 A だけが 3 水準に割り付ける場合が多いです。

【2】擬水準法のデータの構造式が書ける

(1) データの構造式

①データの構造式から擬水準法を理解する

多水準法のデータの構造式を作る

一部の項を変形すれば擬水準法になる

直交表を使って平方和を導出して分散分析をします。擬水準法は一部の効果の水準数が直交表に適合していないため、一旦因子数を変えて多水準法に直します。(もちろん、直交表を使わずに個別の効果の平方和を算出しても OK です。)実際、擬水準法は直交表を使って分散分析する教科書が多いです。

多水準法のデータの構造式は、本冊子の【多水準法の分散分析・区間推定が解ける【必見】】にて、解説しています。

②多水準法のデータの構造式

$$x_{ikl} = \mu + \alpha_i + \gamma_k + \delta_l + (\alpha\gamma)_{ik} + (\alpha\delta)_{il} + (\gamma\delta)_{kl} + e_{ikl} \quad (i = \alpha^2, k = c, l = d)$$

③擬水準法のデータの構造式

(不足する場合)の擬水準法は、多水準法の  $i = \alpha^2$  が  $i = \alpha + m(\alpha < (\alpha + m) < \alpha^2)$

多水準法と比べ、 $i = \alpha + m(\alpha < (\alpha + m) < \alpha^2)$ なので、 $i' = \alpha^2$ な因子を仮に定義してデータの構造式を書きます。

$$\alpha_i \rightarrow p_{i'}$$

( $i = \alpha + m(\alpha < (\alpha + m) < \alpha^2)$ ),  $i' = \alpha^2$ )

と一時的に変えて、多水準法としてデータの構造式を書きます。

$$x_{i'kl} = \mu + p_{i'} + \gamma_k + \delta_l + (p\gamma)_{i'k} + (p\delta)_{i'l} + (\gamma\delta)_{kl} + e_{i'kl}$$

(2) 擬水準法をデータの構造式から分散分析する上の注意点

分散分析は主効果 P, C, D,

交互作用  $P \times C, P \times D, P \times C \times D$  (=P についての残差 e と交絡)を調べるので、主効果 A についての結果にならない。主効果 A については個別に平方和を求める必要がある。

擬似的に多水準法に直した場合と、元の擬水準法を下表に比較します。異なる点は色枠しています。

多水準法に変換して直交表 L16 を扱う			擬水準法(元データ)で直交表 L16 を扱う		
効果	自由度	平方和	効果	自由度	平方和
P	$a^2 - 1$	$S_P$	A	$a + m - 1$	$S_A$
C	$c - 1$	$S_C$	C	$c - 1$	$S_C$
D	$d - 1$	$S_D$	D	$d - 1$	$S_D$
P×C	$(a^2 - 1)(c - 1)$	$S_{P×C}$	A×C	$(a + m - 1)(c - 1)$	$S_{A×C}$
P×D	$(a^2 - 1)(d - 1)$	$S_{P×D}$	A×D	$(a + m - 1)(d - 1)$	$S_{A×D}$
C×D	$(c - 1)(d - 1)$	$S_{C×D}$	C×D	$(c - 1)(d - 1)$	$S_{C×D}$
e(=P×C×D)	$(a^2 - 1)(c - 1)(d - 1)$	$S_e$	e(=A×C×D)	$(a + m - 1)(c - 1)(d - 1) + (a^2 + a - m)cd$	$S_e$
T	$a^2cd - 1$	$S_T$	T	$a^2cd - 1$	$S_T$

ここで、1点注意があります。

擬水準の残差 e の自由度は本来、交互作用 A×C×D と交絡しているため、

$$\phi_e = (a + m - 1)(c - 1)(d - 1)$$

ですが、直交表 L16 を使うため、全体 T の自由度

$$\phi_T = a^2cd - 1$$

に合わせるために、 $\phi_e = (a + m - 1)(c - 1)(d - 1) + (a^2 + a - m)cd$ としています。ややこしいですけど。

$$(a=2, c=2, d=2, m=1)$$

つまり、直交表から擬水準法を使う場合、残差 e の分散の値に注意が必要です。

1. 残差 e の平方和を直交表から求めると、本来の値より高くなる
2. 残差 e の自由度を直交表から求めると、本来の値より高くなる
3. 残差 e の分散を直交表から求めると、「高い目の平方和/高めの自由度」から適正な値に落ち着く？

擬水準法の直交表を使った分散分析の注意点ですね。直交表を無理矢理使っている印象があります。

(3)各平均値をデータの構造式で作る

①母数因子と変量因子の違い

本冊子【【簡単】母数因子と変量因子の違いがすぐわかる】にて、母数因子と変量因子を解説しました。

②母数因子と変量因子

母数因数：p、 $\gamma$ 、 $\delta$ 、 $p\gamma$ 、 $p\delta$ 、 $\gamma\delta$

変量因子：e

③平均値

母数因数の平均は 0。

変量因子の平均は 0 ではない。

平均値を式にする場合、添字のない文字項はすべて 0 にしますが、変量因子の場合は平均値をいれます。分割法や乱塊法では変量因子が増えるので要注意ですが、擬水準法ではあまり変量因子は使いません。

④平均値の式の代表例

データの構造式

$$x_{ijkl} = \mu + p_{i'} + \gamma_k + \delta_l + (p\gamma)_{i'k} + (p\delta)_{i'l} + (\gamma\delta)_{kl} + e_{ijkl} \quad (i = 1, \dots, m + \alpha(m2), i' = 1, \dots, m^2)$$

$$\overline{x'_{i'}} = \mu + p_{i'} + \overline{e'_{i'}}$$

$$\overline{x_{\cdot k}} = \mu + \gamma_k + \overline{e_{\cdot k}}$$

$$\overline{x_{\cdot l}} = \mu + \delta_l + \overline{e_{\cdot l}}$$

$$\overline{x'_{i'k}} = \mu + p_{i'} + \gamma_k + (p\gamma)_{i'k} + \overline{e'_{i'k}}$$

$$\overline{x'_{i'l}} = \mu + p_{i'} + \delta_l + (p\delta)_{i'l} + \overline{e'_{i'l}}$$

$$\overline{x_{\cdot kl}} = \mu + \gamma_k + \delta_l + (\gamma\delta)_{kl} + \overline{e_{\cdot kl}}$$

$$\bar{x} = \mu + \bar{e}$$

【3】分割法の平方和の分解の式が書ける

(1) データの構造式を変形

式を書くと見づらいので、表にまとめます。

-	$x_{ijkl}$	$\overline{x'_{i'}}$	$\overline{x_{\cdot k}}$	$\overline{x_{\cdot l}}$	$\overline{x'_{i'k}}$	$\overline{x'_{i'l}}$	$\overline{x_{\cdot kl}}$	$\bar{x}$
S <sub>P</sub>		1						-1
S <sub>C</sub>			1					-1
S <sub>D</sub>				1				-1
S <sub>P×C</sub>		-1	-1		1			1
S <sub>P×D</sub>		-1		-1		1		1
S <sub>C×D</sub>			-1	-1			1	1
S <sub>e(=P×C×D)</sub>	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1
S <sub>T(計)</sub>	1							-1

表から各平方和の導出式が簡単にできますね。S<sub>P</sub>、S<sub>P×C</sub>、S<sub>C×D</sub>、S<sub>e</sub>を例に挙げます。

$$S_P = \sum_{i'=1}^{a^2} \sum_{k=1}^c \sum_{l=1}^d (\overline{x'_{i'}} - \bar{x})^2$$

$$S_{P \times C} = \sum_{i'=1}^{a^2} \sum_{k=1}^c \sum_{l=1}^d (\overline{x'_{i'k}} - \overline{x'_{i'}} - \overline{x_{\cdot k}} + \bar{x})^2$$

$$S_{C \times D} = \sum_{i'=1}^{a^2} \sum_{k=1}^c \sum_{l=1}^d (\overline{x_{\cdot kl}} - \overline{x_{\cdot k}} - \overline{x_{\cdot l}} + \bar{x})^2$$

$$S_e = \sum_{i'=1}^{a^2} \sum_{k=1}^c \sum_{l=1}^d (x_{ijkl} - \overline{x'_{i'k}} - \overline{x_{\cdot kl}} - \overline{x'_{i'l}} + \overline{x'_{i'}} + \overline{x_{\cdot k}} + \overline{x_{\cdot l}} - \bar{x})^2$$

ここで、因子AとPの違いに注意が必要です。

因子Pの各水準において、主効果、交互作用は同じ個数になるが、  
因子Aは各水準において、主効果、交互作用は個数が異なる。

因子Pの場合				因子Aの場合			
主効果	個数	交互作用	個数	主効果	個数	交互作用	個数
P <sub>1</sub>	4	P <sub>1</sub> X <sub>1</sub>	2	A <sub>1</sub>	8	A <sub>1</sub> X <sub>1</sub>	4
P <sub>2</sub>	4	P <sub>1</sub> X <sub>2</sub>	2	A <sub>2</sub>	4	A <sub>1</sub> X <sub>2</sub>	4
P <sub>3</sub>	4	P <sub>2</sub> X <sub>1</sub>	2	A <sub>3</sub>	4	A <sub>2</sub> X <sub>1</sub>	2
P <sub>4</sub>	4	P <sub>2</sub> X <sub>2</sub>	2	P <sub>4</sub>	4	A <sub>2</sub> X <sub>2</sub>	2
-	-	P <sub>3</sub> X <sub>1</sub>	2	-	-	A <sub>3</sub> X <sub>1</sub>	2
-	-	P <sub>3</sub> X <sub>2</sub>	2	-	-	A <sub>3</sub> X <sub>2</sub>	2
-	-	P <sub>4</sub> X <sub>1</sub>	2	-	-	-	-
-	-	P <sub>4</sub> X <sub>2</sub>	2	-	-	-	-

Xは他の因子(C,Dを表す)

因子 P の場合は、どの場合も個数が同じなので、

平方和  $S = \sum_{i=1}^{a^2} \sum_{k=1}^c \sum_{l=1}^d$  と  $i', k, l$  について独立に  $\Sigma$  が取れます。

一方、因子 A の場合は、因子 A の水準  $i$  によって個数が異なります。そのため、

平方和  $S = \sum_{i=1}^{a+m} \sum_{k=1}^c \sum_{l=1}^d$  ではなく、

平方和  $S = \sum_{i=1}^{a+m} N_i$  と  $\sum_{k=1}^c \sum_{l=1}^d$  に変える必要があります。擬水準法は難しいですね。

$$S_A = \sum_{i=1}^{a+m} N_{A_i} (\bar{x}_{i..} - \bar{x})^2$$

$$S_{A \times C} = \sum_{i=1}^{a+m} N_{AC_{ik}} (\bar{x}_{i.k.} - \bar{x}_{i'..} - \bar{x}_{.k.} + \bar{x})^2$$

$$S_{C \times D} = \sum_{i=1}^{a+m} \sum_{k=1}^c \sum_{l=1}^d (\bar{x}_{.kl} - \bar{x}_{.k.} - \bar{x}_{..l} + \bar{x})^2$$

$$S_e = \sum_{i=1}^{a+m} \sum_{k=1}^c \sum_{l=1}^d (x_{ijkl} - \bar{x}_{i.k.} - \bar{x}_{.kl} - \bar{x}_{i'..} + \bar{x}_{.k.} + \bar{x}_{..l} - \bar{x})^2 + (\text{他の因子からの残差分})$$

と書けますね。

## (2) 擬水準法の残差の期待値の導出の注意点

(i)機械的に各因子の水準分  $\Sigma$  をとる分 + (ii)他の因子に含まれる残差の合計  
の(ii)が追加されます。

(ii)の追加分は

$S_P$  と  $S_A$  の  $\sigma_e^2$  の差分

$S_{P \times C}$  と  $S_{A \times C}$  の  $\sigma_e^2$  の差分

$S_{P \times D}$  と  $S_{A \times D}$  の  $\sigma_e^2$  の差分

$S_{e(P)}$  と  $S_{e(A)}$  の  $\sigma_e^2$  の差分

の和です。

水準数は、 $A \rightarrow 3, B \rightarrow 2, C \rightarrow 2$  と  $3 \times 2 \times 2 = 12$  個のデータを直交表 L16(16 個) に割当てるので、因子の期待値導出で残差が余分に余ります。それを(ii)として合計します。

### 【4】擬水準法の主効果・交互作用・誤差の期待値が導出できる

(1) 因子 P の場合

①主効果の場合

$$E[S_P] = E[\sum_{i=1}^{a^2} \sum_{k=1}^c \sum_{l=1}^d (\bar{x}_{i..} - \bar{x})^2] = E[\sum_{i=1}^{a^2} \sum_{k=1}^c \sum_{l=1}^d (p_i' + (\bar{e}_{i..} - \bar{e}))^2]$$

$$= E[\sum_{i=1}^{a^2} \sum_{k=1}^c \sum_{l=1}^d (p_i')^2] + E[\sum_{i=1}^{a^2} \sum_{k=1}^c \sum_{l=1}^d (\bar{e}_{i..} - \bar{e})^2] = cd(a^2 - 1)\sigma_p^2 + (a^2 - 1)\sigma_e^2$$

主効果 P の自由度は  $(a^2 - 1)$  より、分散の期待値  $E[V_P]$  が求まります。

$$E[V_P] = cd\sigma_p^2 + \sigma_e^2$$

なお、分散の期待値を以下とします。

$$\sigma_p^2 = E\left[\frac{\sum_{i=1}^{a^2} \sum_{k=1}^c \sum_{l=1}^d (p_i')^2}{a^2 - 1}\right]$$

$$\sigma_e^2 = E\left[\frac{\sum_{i=1}^{a^2} \sum_{k=1}^c \sum_{l=1}^d (\bar{e}_{i..} - \bar{e})^2}{a^2 - 1}\right]$$

②交互作用の場合

・ P×C の場合

$$E[S_{P \times C}] = E[\sum_{i=1}^{a^2} \sum_{k=1}^c \sum_{l=1}^d (\bar{x}_{i\cdot k} - \bar{x}_{i\cdot} - \bar{x}_{\cdot k} + \bar{x})^2] = E[\sum_{i=1}^{a^2} \sum_{k=1}^c \sum_{l=1}^d ((p\gamma)_{ik} + (\bar{e}_{i\cdot k} - \bar{e}_{i\cdot} - \bar{e}_{\cdot k} + \bar{e}))^2]$$

$$= E[\sum_{i=1}^{a^2} \sum_{k=1}^c \sum_{l=1}^d (p\gamma)_{ik}^2] + E[\sum_{i=1}^{a^2} \sum_{k=1}^c \sum_{l=1}^d (\bar{e}_{i\cdot k} - \bar{e}_{i\cdot} - \bar{e}_{\cdot k} + \bar{e})^2]$$

$$= a^2(c-1)(d-1)\sigma_{P \times C}^2 + (c-1)(d-1)\sigma_e^2$$

交互作用 P×C の自由度は(c-1)(d-1)より、分散の期待値 E[V<sub>P×C</sub>]が求まります。

$$E[V_{P \times C}] = a^2\sigma_{P \times C}^2 + \sigma_e^2$$

・ C×D の場合

$$E[S_{C \times D}] = E[\sum_{i=1}^{a^2} \sum_{k=1}^c \sum_{l=1}^d (\bar{x}_{kl} - \bar{x}_{\cdot k} - \bar{x}_{\cdot l} + \bar{x})^2] = E[\sum_{i=1}^{a^2} \sum_{k=1}^c \sum_{l=1}^d ((\gamma\delta)_{kl} + (\bar{e}_{kl} - \bar{e}_{\cdot k} - \bar{e}_{\cdot l} + \bar{e}))^2]$$

$$= E[\sum_{i=1}^{a^2} \sum_{k=1}^c \sum_{l=1}^d (\gamma\delta)_{kl}^2] + E[\sum_{i=1}^{a^2} \sum_{k=1}^c \sum_{l=1}^d (\bar{e}_{kl} - \bar{e}_{\cdot k} - \bar{e}_{\cdot l} + \bar{e})^2]$$

$$= a^2(c-1)(d-1)\sigma_{C \times D}^2 + (c-1)(d-1)\sigma_e^2$$

交互作用 C×D の自由度は(c-1)(d-1)より、分散の期待値 E[V<sub>C×D</sub>]が求まります。

$$E[V_{C \times D}] = a^2\sigma_{C \times D}^2 + \sigma_e^2$$

③残差の場合

$$E[S_e] = E[\sum_{i=1}^{a^2} \sum_{k=1}^c \sum_{l=1}^d (x_{ijkl} - \bar{x}_{i\cdot k} - \bar{x}_{\cdot kl} - \bar{x}_{i\cdot l} + \bar{x}_{i\cdot} + \bar{x}_{\cdot k} + \bar{x}_{\cdot l} - \bar{x})^2]$$

$$= E[\sum_{i=1}^{a^2} \sum_{k=1}^c \sum_{l=1}^d (e_{ijkl} - \bar{e}_{i\cdot k} - \bar{e}_{\cdot kl} - \bar{e}_{i\cdot l} + \bar{e}_{i\cdot} + \bar{e}_{\cdot k} + \bar{e}_{\cdot l} - \bar{e})^2]$$

$$= (a^2 - 1)(c-1)(d-1)\sigma_e^2$$

残差 e の自由度は(a<sup>2</sup>-1)(c-1)(d-1)より、分散の期待値 E[V<sub>e</sub>]が求まります。

$$E[V_e] = \sigma_e^2$$

(2) 因子 A の場合

①主効果の場合

$$E[S_A] = E[\sum_{i=1}^{a+m} N_{A_i} (\bar{x}_{i\cdot} - \bar{x})^2] = E[\sum_{i=1}^{a+m} N_{A_i} (\alpha_i + (\bar{e}_{i\cdot} - \bar{e}))^2]$$

$$= E[\sum_{i=1}^{a+m} N_{A_i} (\alpha_i)^2] + E[\sum_{i=1}^{a+m} N_{A_i} (\bar{e}_{i\cdot} - \bar{e})^2] = E[\sum_{i=1}^{a+m} N_{A_i} (\alpha_i)^2] + (a+m-1)\sigma_e^2$$

として、第1項はσ<sub>A</sub><sup>2</sup>としません。

主効果 A の自由度は(a+m-1)より、分散の期待値 E[V<sub>A</sub>]が求まります。

$$E[V_A] = E\left[\frac{\sum_{i=1}^{a+m} N_{A_i} (\alpha_i)^2}{a+m-1}\right] + \sigma_e^2$$

②交互作用の場合

・ A×C の場合

$$E[S_{A \times C}] = E[\sum_{i=1}^{a+m} N_{AC_{ik}} (\bar{x}_{ik} - \bar{x}_{i\cdot} - \bar{x}_{\cdot k} + \bar{x})^2]$$

$$= E[\sum_{i=1}^{a+m} N_{AC_{ik}} ((\alpha\gamma)_{ik} + (\bar{e}_{ik} - \bar{e}_{i\cdot} - \bar{e}_{\cdot k} + \bar{e}))^2]$$

$$= E[\sum_{i=1}^{a+m} N_{AC_{ik}} (\alpha\gamma)_{ik}^2] + (a+m-1)(c-1)\sigma_e^2$$

交互作用 A×C の自由度は(a+m-1)(c-1)より、分散の期待値 E[V<sub>A×C</sub>]が求まります。

$$E[V_{A \times C}] = E\left[\frac{\sum_{i=1}^{a+m} \sum_{k=1}^c N_{AC_{ik}} (\alpha\gamma)_{ik}^2}{(a+m-1)(c-1)}\right] + (a+m-1)(c-1)\sigma_e^2$$

・ C×D の場合

$$E[S_{C \times D}] = E[\sum_{i=1}^{a+m} \sum_{k=1}^c \sum_{l=1}^d (\bar{x}_{.kl} - \bar{x}_{.k.} - \bar{x}_{.l.} + \bar{x})^2] = E[\sum_{i=1}^{a+m} \sum_{k=1}^c \sum_{l=1}^d ((\gamma\delta)_{kl} + (\bar{e}_{.kl} - \bar{e}_{.k.} - \bar{e}_{.l.} + \bar{e}))^2]$$

$$= E[\sum_{i=1}^{a+m} \sum_{k=1}^c \sum_{l=1}^d (\gamma\delta)_{kl}^2] + E[\sum_{i=1}^{a+m} \sum_{k=1}^c \sum_{l=1}^d (\bar{e}_{.kl} - \bar{e}_{.k.} - \bar{e}_{.l.} + \bar{e})^2]$$

$$= (c-1)(d-1)(a+m)\sigma_{C \times D}^2 + (c-1)(d-1)\sigma_e^2$$

交互作用 C×D の自由度は (c-1)(d-1) より、分散の期待値 E[V<sub>C×D</sub>] が求まります。

$$E[V_{C \times D}] = (a+m)\sigma_{C \times D}^2 + \sigma_e^2$$

③ 残差の場合

$$E[S_e] = E[\sum_{i=1}^{a+m} \sum_{k=1}^c \sum_{l=1}^d (x_{ikl} - \bar{x}_{ik.} - \bar{x}_{.kl} - \bar{x}_{i.l} + \bar{x}_{i..} + \bar{x}_{.k.} + \bar{x}_{.l.} - \bar{x})^2]$$

$$= E[\sum_{i=1}^{a+m} \sum_{k=1}^c \sum_{l=1}^d (e_{ikl} - \bar{e}_{ik.} - \bar{e}_{.kl} - \bar{e}_{i.l} + \bar{e}_{i..} + \bar{e}_{.k.} + \bar{e}_{.l.} - \bar{e})^2] + \text{(ii) 他の因子に含まれる残差の合計}$$

$$= (a+m-1)(c-1)(d-1)\sigma_e^2 + \text{(ii) 他の因子に含まれる残差の合計}$$

(ii) 他の因子に含まれる残差の合計を求めます。

主効果、交互作用、残差において、因子 P で求めた残差の期待値と因子 A で求めた残差の期待値を比較して差分をとります。

○は P,A が入る	(1) P 側	(2) A 側	(1)-(2)の差分
○	$(a^2-1)\sigma_e^2$	$(a+m-1)\sigma_e^2$	$(a^2-a-m)\sigma_e^2$
○×C	$(a^2-1)(c-1)\sigma_e^2$	$(a+m-1)(c-1)\sigma_e^2$	$(a^2-a-m)(c-1)\sigma_e^2$
○×D	$(a^2-1)(d-1)\sigma_e^2$	$(a+m-1)(d-1)\sigma_e^2$	$(a^2-a-m)(d-1)\sigma_e^2$
e(○)	$(a^2-1)(c-1)(d-1)\sigma_e^2$	$(a+m-1)(c-1)(d-1)\sigma_e^2$	$(a^2-a-m)(c-1)(d-1)\sigma_e^2$
		合計	$(a^2-a-m)(cd)\sigma_e^2$

まとめると、

$$E[S_e] = (a+m-1)(c-1)(d-1)\sigma_e^2 + (a^2-a-m)(cd)\sigma_e^2$$

残差 e の自由度は  $(a+m-1)(c-1)(d-1) + (a^2-a-m)(cd)$  より、分散の期待値 E[V<sub>e</sub>] が求まります。

$$E[V_e] = \sigma_e^2$$

計算が長いわりに、答えはあっさりしていますね。

### 【5】 分散分析ができる

因子 P(多水準に直して直交表 L16 を扱う)			因子 A(擬水準に直して直交表 L16 を扱う)		
効果	自由度	E[V]	効果	自由度	E[V]
P	$a^2-1$	$cd\sigma_P^2 + \sigma_e^2$	A	$a+m-1$	* 1
C	$c-1$	$a^2d\sigma_C^2 + \sigma_e^2$	C	$c-1$	$(a+m)d\sigma_C^2 + \sigma_e^2$
D	$d-1$	$a^2c\sigma_D^2 + \sigma_e^2$	D	$d-1$	$(a+m)c\sigma_D^2 + \sigma_e^2$
P×C	$(a^2-1)(c-1)$	$d\sigma_{P \times C}^2 + \sigma_e^2$	A×C	$(a+m-1)(c-1)$	* 2
P×D	$(a^2-1)(d-1)$	$c\sigma_{P \times D}^2 + \sigma_e^2$	A×D	$(a+m-1)(d-1)$	* 3
C×D	$(c-1)(d-1)$	$a^2\sigma_{C \times D}^2 + \sigma_e^2$	C×D	$(c-1)(d-1)$	$(a+m)\sigma_{C \times D}^2 + \sigma_e^2$
e	$(a^2-1)(c-1)(d-1)$	$\sigma_e^2$	e	$(a^2-1)cd - (a+m-1)(c+d-1)$	$\sigma_e^2$
T	$a^2cd-1$		T	$a^2cd-1$	

ここで、

(\*1)は、

$$E[V_A] = E\left[\frac{\sum_{i=1}^{a+m} N_{Ai}(\alpha_i)^2}{a+m-1}\right] + \sigma_e^2$$

直交表 L16 で具体的に書くと、

$$E[V_A] = \frac{8\alpha_1^2 + 4\alpha_2^2 + 4\alpha_3^2}{2} + \sigma_e^2$$

(\*2)は、

$$E[V_{A \times C}] = E\left[\frac{\sum_{i=1}^{a+m} \sum_{k=1}^c N_{AC_{ik}} (\alpha\gamma)_{ik}^2}{(a+m-1)(c-1)}\right] + \sigma_e^2$$

直交表 L16 で具体的に書くと、

$$E[V_{A \times C}] = \frac{4(\alpha\gamma)_{11}^2 + 4(\alpha\gamma)_{12}^2 + 2(\alpha\gamma)_{21}^2 + 2(\alpha\gamma)_{22}^2 + 2(\alpha\gamma)_{31}^2 + 2(\alpha\gamma)_{32}^2}{2} + \sigma_e^2$$

(\*3)は、

$$E[V_{A \times D}] = E\left[\frac{\sum_{i=1}^{a+m} \sum_{l=1}^d N_{AD_{il}} (\alpha\delta)_{il}^2}{(a+m-1)(d-1)}\right] + \sigma_e^2$$

直交表 L16 で具体的に書くと、

$$E[V_{A \times D}] = \frac{4(\alpha\delta)_{11}^2 + 4(\alpha\delta)_{12}^2 + 2(\alpha\delta)_{21}^2 + 2(\alpha\delta)_{22}^2 + 2(\alpha\delta)_{31}^2 + 2(\alpha\delta)_{32}^2}{2} + \sigma_e^2$$

以上、擬水準法の分散分析と分散の期待値の導出を解説しました。

## 擬水準法の分散分析の注意点

### 【1】完全配置実験として分散分析する

(1) データを用意する

2 水準法の擬水準法として、因子 A(3 水準),因子 B(2 水準),因子 C(2 因子)のデータで考えてみましょう。

3 因子から  $3 \times 2 \times 2 = 12$  個のデータです。12 個の 3 因子の三元配置実験として、分散分析します。

—	—	B1	B2
A1	C1	-18	42
	C2	24	24
A2	C1	18	33
	C2	18	63
A3	C1	30	42
	C2	18	66

(2) 分散分析の結果をまとめます。

完全配置	S	$\phi$	V	F
A	936	2	468	0.647
B	2700	1	2700	3.734
C	363	1	363	0.502
AB	0	2	0	0
AC	42	2	21	0.029
BC	3	1	3	0.004
e	1446	2	723	—
T	5490	11	-	-

### 【2】擬水準法は一旦多水準に直して分散分析する(2 水準系)

3 因子から  $3 \times 2 \times 2 = 12$  個のデータを  $4 \times 2 \times 2 = 16$  個として多水準法として直交表を使って分散分析をしましょう。擬水準法の分散分析の導出方法です。

因子 A ですが、水準は 3 までですが、A1=A4 として 4 水準に割り当てます。

A4 は全体のばらつきが変に大きくなるよう注意しましょう。

よく A1,A2,A3 のどれかのデータや平均を A4 に割り当てます。

### 【3】擬水準法(直交表)と完全配置実験の分散分析の比較

(1) 分散分析の解析

実際に分散分析をしましょう。

割当	A	A	A	B	AB	AB	AB	C	AC	AC	AC	BC	e(ABC)	e(ABC)	e(ABC)
列	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
成分	a		a		a		a		a		a		a		a
		b	b			b	b			b	b			b	b
				c	c	c	c					c	c	c	c
データ								d	d	d	d	d	d	d	d
1の和	204	228	144	96	216	216	216	171	207	225	213	189	213	219	123
2の和	228	204	288	336	216	216	216	261	225	207	219	243	219	213	309
平方和	36	36	1296	3600	0	0	0	506.3	20.25	20.25	2.25	182.3	2.25	2.25	2162

直交表 L16 で割り付けた結果を下表にまとめます。

平方和は、

$$S_A = S[1] + S[2] + S[3] = 36 + 36 + 1296 = 1368$$

$$S_B = S[4] = 3600$$

$$S_C = S[8] = 506.25$$

$$S_{A \times B} = S[5] + S[6] + S[7] = 0 + 0 + 0 = 0$$

$$S_{A \times C} = S[9] + S[10] + S[11] = 20.25 + 20.25 + 2.25 = 42.75$$

$$S_{B \times C} = S[12] = 182.25$$

$$S_e = S[13] + S[14] + S[15] = 2.25 + 2.25 + 2162 = 2166.75$$

$$S_T = S[1] + \dots + S[15] = 7866$$

分散分析表にまとめます。

完全配置	S	φ	V	F
A	1368	3	456	0.6314
B	3600	1	3600	4.9844
C	506.25	1	506.25	0.7009
AB	0	3	0	0
AC	42.75	3	14.25	0.0197
BC	182.25	1	182.25	0.2523
e	2166.8	3	722.25	-
T	7866	15	-	-

なお、因子 A(4 水準), 因子 B(2 水準), 因子 C(2 水準) の計 16 データの三元配置実験も同じ分散分析になります。是非確認してみてください。

-	-	B1	B2
A1	C1	-18	42
	C2	24	24
A2	C1	18	33
	C2	18	63
A3	C1	30	42
	C2	18	66
A4	C1	-18	42
	C2	24	24

黄色枠が A1=A4 として同じデータを入れています。

#### 【4】擬水準法の分散分析の注意点

直交表を使わずに、12 個のデータを三元配置実験として分散分析した結果と擬水準法として直交表 L16 を使って、16 個のデータから分散分析した結果を比較します。

-	完全配置			擬水準法		
	S	φ	V	S	φ	V
A	936	2	468	1368	3	456
B	2700	1	2700	3600	1	3600
C	363	1	363	506.25	1	506.25
AB	0	2	0	0	3	0
AC	42	2	21	42.75	3	14.25
BC	3	1	3	182.25	1	182.25
e	1446	2	723	2166.8	3	722.25
T	5490	11	-	7866	15	-

上表の左右では平方和 S、自由度 φ、平均平方(不偏分散)V の値が違います。擬水準法で分散分析した結果と、そのまま三元配置実験した結果は少し異なる点に注意して下さい。以上、擬水準法の分散分析の注意点について解説しました。

【You Tube でも解説しています。ご覧ください】

[https://www.youtube.com/embed/dCRC\\_iO3dZY](https://www.youtube.com/embed/dCRC_iO3dZY)

【1】枝分かれ実験(並列型)とは何かがわかる

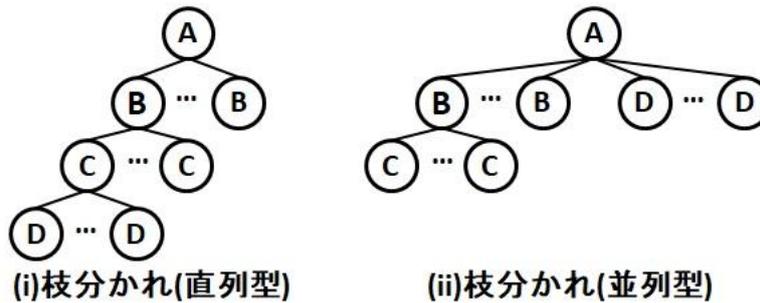
(1) 枝分かれ図で理解する

枝分かれ方法は、直列と並列が考えつきますね。教科書ではよく直列型が紹介されます。本記事は、並列型について解説します。本記事しか書いていない限定モノです。

直列系は以下の関連記事で解説しています。

【関連記事】枝分かれ実験(直列型)の分散分析・区間推定が解ける【必見】  
<https://qcplanets.com/method/doe/anova-branch1/>

直列と並列の違いは下図のとおりです。



(2) データの構造式から枝分かれ実験を理解する

枝分かれ図をそのままデータの構造式に書く

【2】枝分かれ実験(並列型)のデータの構造式が書ける

(1) データの構造式

枝分かれ図をそのままデータの構造式に書きます。

因子 B は因子 A から枝分かれ →  $\beta_{ij}$  とする。  
 因子 C は因子 B から枝分かれ →  $\gamma_{ijk}$  とする。  
 因子 D は因子 A から枝分かれ →  $\delta_{il}$  とする。

まとめると、データの構造式ができます。

$$x_{ijklm} = \mu + \alpha_i + \beta_{ij} + \gamma_{ijk} + \delta_{il} + e_{ijklm}$$

直列型の場合と比較すると、 $\delta_{ijkl}$  (直列型) と  $\delta_{il}$  (並列型) に違いがあります。

(2) 各平均値をデータの構造式で作る

- $\bar{x}_{l\dots} = \mu + \alpha_i + \bar{\beta}_{\cdot l} + \bar{\gamma}_{\cdot l} + \bar{\delta}_{\cdot l} + \bar{e}_{\cdot l\dots}$
- $\bar{x}_{ij\dots} = \mu + \alpha_i + \beta_{ij} + \bar{\gamma}_{ij} + \bar{\delta}_{\cdot l} + \bar{e}_{ij\dots}$
- $\bar{x}_{ijk\dots} = \mu + \alpha_i + \beta_{ij} + \gamma_{ijk} + \bar{\delta}_{\cdot l} + \bar{e}_{ijk\dots}$
- $\bar{x}_{i\dots l} = \mu + \alpha_i + \bar{\beta}_{\cdot l} + \bar{\gamma}_{\cdot l} + \delta_{il} + \bar{e}_{i\dots l}$
- $\bar{\bar{x}} = \mu + \bar{\alpha} + \bar{\beta} + \bar{\gamma} + \bar{\delta} + \bar{e}$

**【3】 枝分かれ実験(並列型)のデータの平方和の分解の式が書ける**

(1) データの構造式を変形

-	$\overline{x_{i\dots}}$	$\overline{x_{ij\dots}}$	$\overline{x_{ijk\dots}}$	$\overline{x_{i\dots l}}$	$x_{ijklm}$	$\overline{\bar{x}}$
S <sub>A</sub>	1					-1
S <sub>B</sub>	-1	1				
S <sub>C</sub>		-1	1			
S <sub>D</sub>	-1			1		
S <sub>e</sub>	1		-1	-1	1	

表から各平方和の導出式が簡単にできますね。S<sub>B</sub>、S<sub>D</sub>、S<sub>e</sub>を例に挙げます。

$$\cdot S_B = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^c \sum_{l=1}^d \sum_{m=1}^e (\overline{x_{ij\dots}} - \overline{x_{i\dots}})^2$$

$$\cdot S_D = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^c \sum_{l=1}^d \sum_{m=1}^e (\overline{x_{i\dots l}} - \overline{x_{i\dots}})^2$$

$$\cdot S_e = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^c \sum_{l=1}^d \sum_{m=1}^e (x_{ijklm} - \overline{x_{ijk\dots}} - \overline{x_{i\dots l}} + \overline{x_{i\dots}})^2$$

と書けますね。他の平方和も計算できます。

**【4】 主効果・交互作用・誤差の期待値が導出できる**

(1) 主効果 S<sub>B</sub> の分散の期待値の導出

$$E[S_B] = E[\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^c \sum_{l=1}^d \sum_{m=1}^e (\overline{x_{ij\dots}} - \overline{x_{i\dots}})^2]$$

$$= E[\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^c \sum_{l=1}^d \sum_{m=1}^e \left( (\beta_{ij} - \overline{\beta_{i\dots}}) + (\overline{y_{ij\dots}} - \overline{y_{i\dots}}) + (\overline{e_{ij\dots}} - \overline{e_{i\dots}}) \right)^2]$$

$$= a(b-1)cde\sigma_B^2 + a(b-1)de\sigma_C^2 + a(b-1)\sigma_e^2$$

主効果 B の自由度は  $a(b-1)$  より、分散の期待値  $E[V_B] = de\sigma_B^2 + de\sigma_C^2 + \sigma_e^2$

(2) 主効果 S<sub>D</sub> の分散の期待値の導出

$$E[S_D] = E[\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^c \sum_{l=1}^d \sum_{m=1}^e (\overline{x_{i\dots l}} - \overline{x_{i\dots}})^2] = E[\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^c \sum_{l=1}^d \sum_{m=1}^e \left( (\delta_{il} - \overline{\delta_{i\dots}}) + (\overline{e_{i\dots l}} - \overline{e_{i\dots}}) \right)^2]$$

$$= abc(d-1)e\sigma_D^2 + a(d-1)\sigma_e^2$$

交互作用 D の自由度は  $a(d-1)$  より、分散の期待値  $E[V_D] = bce\sigma_D^2 + \sigma_e^2$

(3) 残差の分散の期待値の導出

$$E[S_e] = E[\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^c \sum_{l=1}^d \sum_{m=1}^e (x_{ijklm} - \overline{x_{ijk\dots}} - \overline{x_{i\dots l}} + \overline{x_{i\dots}})^2]$$

$$= E[\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^c \sum_{l=1}^d \sum_{m=1}^e (e_{ijklm} - \overline{e_{ijk\dots}} - \overline{e_{i\dots l}} + \overline{e_{i\dots}})^2] = a(bcde - b - d + 1)\sigma_e^2$$

残差 e の自由度は  $a(bcde - b - d + 1)$  より、分散の期待値  $E[V_e] = \sigma_e^2$

と書けますね。他の平方和も同様に計算できます。

**【5】 枝分かれ実験(並列型)の分散分析ができる**

(1) 自由度の計算

	a	ab	abc	ad	abcde	1
A	1					-1
B	-1	1				
C		-1	1			
D	-1			1		
e	1		-1	-1	1	

(2) 分散分析の結果

分散分析表を作ります。

-	自由度Φ	E[V]
A	$a - 1$	$\sigma_e^2 + bce\sigma_D^2 + de\sigma_C^2 + cde\sigma_B^2 + bcde\sigma_A^2$
B	$a(b - 1)$	$\sigma_e^2 + de\sigma_C^2 + cde\sigma_B^2$
C	$ab(c - 1)$	$\sigma_e^2 + de\sigma_C^2$
D	$a(d - 1)$	$\sigma_e^2 + bce\sigma_D^2$
e	$a(bcde - bc - d + 1)$	$\sigma_e^2$
T	$abcde - 1$	-

**【6】 分割法の主効果・交互作用の区間推定が導出できる**

(1) 分散の期待値から分散の推定値を導出

分散分析から、 $e_{(1)}$ と $e_{(2)}$ の分散の推定値  $E[V]$ を導出します。

-	V
A	$V_A = \widehat{\sigma}_e^2 + bce\widehat{\sigma}_D^2 + de\widehat{\sigma}_C^2 + cde\widehat{\sigma}_B^2 + bcde\widehat{\sigma}_A^2$
B	$V_B = \widehat{\sigma}_e^2 + de\widehat{\sigma}_C^2 + cde\widehat{\sigma}_B^2$
C	$V_C = \widehat{\sigma}_e^2 + de\widehat{\sigma}_C^2$
D	$V_D = \widehat{\sigma}_e^2 + bce\widehat{\sigma}_D^2$
e	$V_e = \widehat{\sigma}_e^2$

上の表から、分散の推定値を求めます。

$$\widehat{\sigma}_A^2 = \frac{1}{bcde}(V_A - V_B)$$

$$\widehat{\sigma}_B^2 = \frac{1}{cde}(V_B - V_C)$$

$$\widehat{\sigma}_C^2 = \frac{1}{c}(V_C - V_e)$$

$$\widehat{\sigma}_D^2 = \frac{1}{bce}(V_D - V_e)$$

$$\widehat{\sigma}_e^2 = V_e$$

(2) 主効果 B の点推定と区間推定

$$\text{点推定: } \hat{\mu}(B_{ij}) = \overline{x_{ij\dots}} = \mu + \widehat{\beta_{ij}} = \mu + \beta_{ij} + \overline{\gamma_{ij\dots}} + \overline{e_{ij\dots}}$$

$$\text{分散: } \widehat{\text{Var}}(\hat{\mu}(B_{ij})) = V[\mu + \beta_{ij} + \overline{\gamma_{ij\dots}} + \overline{e_{ij\dots}}] = V[\overline{\gamma_{ij\dots}}] + V[\overline{e_{ij\dots}}] = \frac{1}{c} V_c + \frac{1}{cde} V_e$$

$V_e$  が求まったので、自由度  $\phi$  と、点推定  $\mu$  を代入すれば推定区間が求まります。

(3) 主効果 D の点推定と区間推定

$$\text{点推定: } \hat{\mu}(D_l) = \overline{x_{\dots l}} = \mu + \widehat{\delta_{il}} = \mu + \delta_{il} + \overline{e_{\dots l}}$$

$$\text{分散: } \widehat{\text{Var}}(\hat{\mu}(D_l)) = V[\mu + \delta_{il} + \overline{e_{\dots l}}] = V[\overline{e_{\dots l}}] = \frac{1}{bce} V_e$$

$V_e$  が求まったので、自由度  $\phi$  と、点推定  $\mu$  を代入すれば推定区間が求まります。

以上、2 方分割法の分散分析の導出過程を詳細に解説しました。

2 方分割法の分散分析や期待値の導出ができる

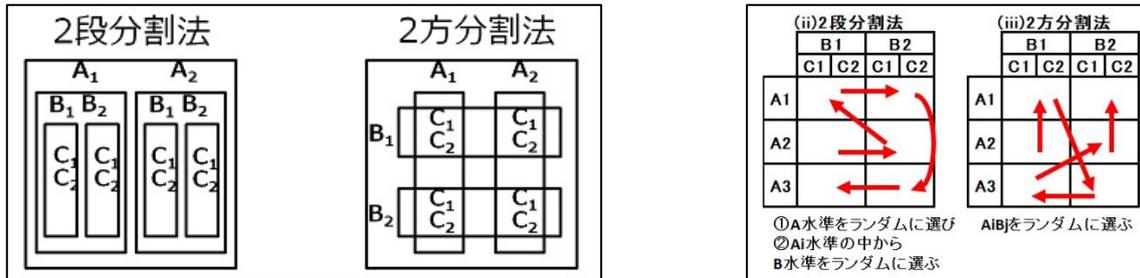
【You Tube でも解説しています。ご覧ください】

<https://www.youtube.com/embed/VXgrgyqzd1U>

【1】2 方分割法とは何かがわかる

(1) 実験順序の違いで理解する

2 段分割法と 2 方分割法を比較して、2 方分割法を下左図から理解しましょう。



上左図から、見た目は違うとわかりますが、さらに実験順序の違いを上右図から比較します。

(ii) 先に  $A_i$  をランダムに選ぶ。選んだ  $A_i$  の中で  $B_j$  をランダムに選ぶ

(iii)  $A_i B_j$  単位でランダムに選ぶ

(2) データの構造式から 2 方分割法を理解する

- ① 完全配置実験のデータの構造式を作る
- ② 一部の項を変形すれば 2 方分割法になる

【2】2 方分割法のデータの構造式が書ける

(1) データの構造式

まず、完全配置実験のデータの構造式を機械的に書きます。

★四元配置実験のデータの構造式

$$x_{ijkl} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_k + \delta_l + (\alpha\beta)_{ij} + (\alpha\gamma)_{ik} + (\alpha\delta)_{il} + (\beta\gamma)_{jk} + (\beta\delta)_{jl} + (\gamma\delta)_{kl} + (\alpha\beta\gamma)_{ijk} + (\alpha\beta\delta)_{ijl} + (\alpha\gamma\delta)_{ikl} + (\beta\gamma\delta)_{jkl} + e_{ijkl}$$

完全配置実験のデータの構造式の各項から、2 段分割法、2 方分割法へ変形していきます。

	完全配置	2段分割		2方分割	
1	$\alpha_i$	$\alpha_i$	1	$\alpha_i$	1A
2	$\beta_j$	$\beta_j$	2	$\beta_j$	1B
3	$\gamma_k$	$\gamma_k$	3	$\gamma_k$	3
4	$\delta_l$	$\delta_l(\text{反復})$	1	$\delta_l(\text{反復})$	1A
5	$(\alpha\beta)_{ij}$	$(\alpha\beta)_{ij}$	2	$(\alpha\beta)_{ij}$	2
6	$(\alpha\gamma)_{ik}$	$(\alpha\gamma)_{ik}$	3	$(\alpha\gamma)_{ik}$	3
7	$(\alpha\delta)_{il}$	$e_{(1)il}$	1	$e_{(1A)il}$	1A
8	$(\beta\gamma)_{jk}$	$(\beta\gamma)_{jk}$	3	$(\beta\gamma)_{jk}$	3
9	$(\beta\delta)_{jl}$	$e_{(2)jl}$	2	$e_{(1B)jl}$	1B
10	$(\gamma\delta)_{kl}$	$e_{(3)jkl}$	3	$e_{(3)jkl}$	3
11	$(\alpha\beta\gamma)_{ijk}$	$(\alpha\beta\gamma)_{ijk}$	3	$(\alpha\beta\gamma)_{ijk}$	3
12	$(\alpha\beta\delta)_{ijl}$	$e_{(2)ijl}$	2	$e_{(2)ijl}$	2
13	$(\alpha\gamma\delta)_{ikl}$	$e_{(3)ijkl}$	3	$e_{(3)ijkl}$	3
14	$(\beta\gamma\delta)_{jkl}$	$e_{(3)ijkl}$	3	$e_{(3)ijkl}$	3
15	$e_{ijkl}$	$e_{(3)ijkl}$	3	$e_{(3)ijkl}$	3

まず、2 段分割法では、 $\delta$  を反復(変量因子)、因子 A を 1 次単位、因子 B を 2 次単位として 3 分割します。上表のように各項が変化します。 $\delta$  を変量因子としたため、 $\delta$  を含む交互作用はすべて残差  $e$  にプーリングしています。

次に、2 方分割法では 2 段分割法から因子 A は 1A 単位、因子 B を 1B 単位として分け、交互作用 A×B を 2 段分割法と同じく 2 次単位、3 次単位に含む項は 2 段分割法と 2 方分割法ともに同じになります。

2 方分割法のデータの構造式を丸暗記せず、元の完全配置実験からどのように式が変化したかを理解します。

(2) 2 方分割法のデータの構造式

$$x_{ijkl} = \mu + \delta_l + \alpha_i + e_{(1A)il} + \beta_j + e_{(1B)jl} + (\alpha\beta)_{ij} + e_{(2)ijl} + \gamma_k + (\alpha\gamma)_{ik} + (\beta\gamma)_{jk} + (\alpha\beta\gamma)_{ijk} + e_{(3)ijkl}$$

(3) 各平均値をデータの構造式で作る

- $\bar{x}_{l\dots} = \mu + \delta_l + \alpha_i + \overline{e_{(1A)il}} + \overline{e_{(2)ijl}} + \overline{e_{(3)ijkl}}$
- $\bar{x}_{\cdot j \cdot} = \mu + \delta_l + \beta_j + \overline{e_{(1B)jl}} + \overline{e_{(2)ijl}} + \overline{e_{(3)ijkl}}$
- $\bar{x}_{\cdot \cdot k} = \mu + \delta_l + \gamma_k + \overline{e_{(3)ijkl}}$
- $\bar{x}_{\cdot \cdot l} = \mu + \delta_l + \overline{e_{(1A)il}} + \overline{e_{(1B)jl}} + \overline{e_{(2)ijl}} + \overline{e_{(3)ijkl}}$
- $\bar{x}_{i j \cdot} = \mu + \delta_l + \alpha_i + \overline{e_{(1A)il}} + \beta_j + \overline{e_{(1B)jl}} + (\alpha\beta)_{ij} + \overline{e_{(2)ijl}} + \overline{e_{(3)ijkl}}$
- $\bar{x}_{i \cdot k} = \mu + \delta_l + \alpha_i + \overline{e_{(1A)il}} + \overline{e_{(2)ijl}} + \gamma_k + (\alpha\gamma)_{ik} + \overline{e_{(3)ijkl}}$
- $\bar{x}_{i \cdot l} = \mu + \delta_l + \alpha_i + \overline{e_{(1A)il}} + \overline{e_{(1B)jl}} + \overline{e_{(2)ijl}} + \overline{e_{(3)ijkl}}$
- $\bar{x}_{\cdot j k} = \mu + \delta_l + \beta_j + \overline{e_{(1B)jl}} + \overline{e_{(2)ijl}} + \gamma_k + (\beta\gamma)_{jk} + \overline{e_{(3)ijkl}}$
- $\bar{x}_{\cdot j l} = \mu + \delta_l + \overline{e_{(1A)il}} + \beta_j + \overline{e_{(1B)jl}} + \overline{e_{(2)ijl}} + \overline{e_{(3)ijkl}}$
- $\bar{x}_{\cdot \cdot kl} = \mu + \delta_l + \overline{e_{(1A)il}} + \overline{e_{(1B)jl}} + \overline{e_{(2)ijl}} + \gamma_k + \overline{e_{(3)ijkl}}$
- $\bar{x}_{i j k} = \mu + \delta_l + \alpha_i + \overline{e_{(1A)il}} + \beta_j + \overline{e_{(1B)jl}} + (\alpha\beta)_{ij} + \overline{e_{(2)ijl}} + \gamma_k + (\alpha\gamma)_{ik} + (\beta\gamma)_{jk} + (\alpha\beta\gamma)_{ijk} + \overline{e_{(3)ijkl}}$
- $\bar{x}_{i j l} = \mu + \delta_l + \alpha_i + \overline{e_{(1A)il}} + \beta_j + \overline{e_{(1B)jl}} + (\alpha\beta)_{ij} + \overline{e_{(2)ijl}} + \overline{e_{(3)ijkl}}$
- $\bar{x}_{i \cdot kl} = \mu + \delta_l + \alpha_i + \overline{e_{(1A)il}} + \overline{e_{(1B)jl}} + \overline{e_{(2)ijl}} + \gamma_k + (\alpha\gamma)_{ik} + \overline{e_{(3)ijkl}}$
- $\bar{x}_{\cdot j kl} = \mu + \delta_l + \overline{e_{(1A)il}} + \beta_j + \overline{e_{(1B)jl}} + \overline{e_{(2)ijl}} + \gamma_k + (\beta\gamma)_{jk} + \overline{e_{(3)ijkl}}$
- $\bar{\bar{x}} = \mu + \delta_l + \bar{e}$

【3】 2 方分割法の平方和の分解の式が書ける

(1) データの構造式を変形

$$x_{ijkl} = \mu + \delta_l + \alpha_i + e_{(1A)il} + \beta_j + e_{(1B)jl} + (\alpha\beta)_{ij} + e_{(2)ijl} + \gamma_k + (\alpha\gamma)_{ik} + (\beta\gamma)_{jk} + (\alpha\beta\gamma)_{ijk} + e_{(3)ijkl}$$

-	$\bar{x}_{l\dots}$	$\bar{x}_{\cdot j \cdot}$	$\bar{x}_{\cdot \cdot k}$	$\bar{x}_{\cdot \cdot l}$	$\bar{x}_{i j \cdot}$	$\bar{x}_{i \cdot k}$	$\bar{x}_{i \cdot l}$	$\bar{x}_{\cdot j k}$	$\bar{x}_{\cdot j l}$	$\bar{x}_{\cdot \cdot kl}$	$\bar{x}_{i j k}$	$\bar{x}_{i j l}$	$\bar{x}_{i \cdot kl}$	$\bar{x}_{\cdot j kl}$	$x_{ijkl}$	$\bar{\bar{x}}$
S <sub>D</sub>				1												-1
S <sub>A</sub>	1															-1
S <sub>e(1A)</sub>	-1			-1			1									1
S <sub>B</sub>		1														-1
S <sub>e(1B)</sub>		-1		-1					1							1
S <sub>AB</sub>	-1	-1			1											1
S <sub>e(2)</sub>	1	1		1	-1		-1		-1			1				-1
S <sub>C</sub>			1													-1
S <sub>AC</sub>	-1		-1			1										1
S <sub>BC</sub>		-1	-1					1								1
S <sub>ABC</sub>	1	1	1		-1	-1		-1				1				-1
S <sub>e(3)</sub>					1							-1	-1		1	

表から各平方和の導出式が簡単にできますね。S<sub>A</sub>、S<sub>A×C</sub>、S<sub>e(2)</sub>を例に挙げます。

$$\cdot S_A = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^c \sum_{l=1}^d (\bar{x}_{i\cdots} - \bar{x})^2$$

$$\cdot S_{A \times C} = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^c \sum_{l=1}^d (\bar{x}_{i\cdots k} - \bar{x}_{i\cdots} - \bar{x}_{\cdots k} + \bar{x})^2$$

$$\cdot S_{e(2)} = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^c \sum_{l=1}^d (\bar{x}_{ij\cdots l} - \bar{x}_{ij\cdots} - \bar{x}_{i\cdots l} - \bar{x}_{\cdots j\cdots l} + \bar{x}_{i\cdots} + \bar{x}_{\cdots j\cdots} + \bar{x}_{\cdots\cdots l} - \bar{x})^2$$

と書けますね。他の平方和も計算できます。

**[4] 主効果・交互作用・誤差の期待値が導出できる**

(1) 主効果の分散の期待値の導出

$$E[S_A] = E[\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^c \sum_{l=1}^d (\bar{x}_{i\cdots} - \bar{x})^2] =$$

$$E[\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^c \sum_{l=1}^d (\alpha_i + \bar{e}_{(1A)i\cdots} + \bar{e}_{(2)i\cdots} + \bar{e}_{(3)i\cdots} - \bar{e})^2] = bcd(a-1)\sigma_A^2 + (a-1)(bc\sigma_{e(1A)}^2 + c\sigma_{e(2)}^2 + \sigma_{e(3)}^2)$$

主効果 A の自由度は  $(a-1)$  より、分散の期待値  $E[V_A] = bcd\sigma_A^2 + (bc\sigma_{e(1A)}^2 + c\sigma_{e(2)}^2 + \sigma_{e(3)}^2)$

(2) 交互作用の分散の期待値の導出

$$E[S_{A \times C}] = E[\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^c \sum_{l=1}^d (\bar{x}_{i\cdots k} - \bar{x}_{i\cdots} - \bar{x}_{\cdots k} + \bar{x})^2]$$

$$= E[\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^c \sum_{l=1}^d ((\alpha\gamma)_{ik} + (\bar{e}_{(3)i\cdots k} - \bar{e}_{(3)i\cdots} - \bar{e}_{(3)\cdots k} + \bar{e}))^2]$$

$$= bd(a-1)(c-1)\sigma_{A \times C}^2 + (a-1)(c-1)\sigma_{e(3)}^2$$

交互作用  $A \times C$  の自由度は  $(a-1)(c-1)$  より、分散の期待値  $E[V_{A \times C}] = bd\sigma_{A \times C}^2 + \sigma_{e(3)}^2$

(3) 残差の分散の期待値の導出

$$E[S_{e(2)}] = E[\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^c \sum_{l=1}^d (\bar{x}_{ij\cdots l} - \bar{x}_{ij\cdots} - \bar{x}_{i\cdots l} - \bar{x}_{\cdots j\cdots l} + \bar{x}_{i\cdots} + \bar{x}_{\cdots j\cdots} + \bar{x}_{\cdots\cdots l} - \bar{x})^2]$$

$$E[\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^c \sum_{l=1}^d (*)^2] = (a-1)(b-1)(d-1)(\sigma_{e(3)}^2 + c\sigma_{e(2)}^2)$$

$$(*) = (\bar{e}_{(2)ij\cdots l} - \bar{e}_{(2)ij\cdots} - \bar{e}_{(2)i\cdots l} - \bar{e}_{(2)\cdots j\cdots l} + \bar{e}_{(2)i\cdots} + \bar{e}_{(2)\cdots j\cdots} + \bar{e}_{(2)\cdots\cdots l} - \bar{x}) \\ + (\bar{e}_{(3)ij\cdots l} - \bar{e}_{(3)ij\cdots} - \bar{e}_{(3)i\cdots l} - \bar{e}_{(3)\cdots j\cdots l} + \bar{e}_{(3)i\cdots} + \bar{e}_{(3)\cdots j\cdots} + \bar{e}_{(3)\cdots\cdots l})$$

残差 e の自由度は  $(a-1)(b-1)(d-1)$  より、分散の期待値  $E[V_{e(2)}] = \sigma_{e(3)}^2 + c\sigma_{e(2)}^2$

と書けますね。他の平方和も同様に計算できます。

【5】2方分割法の分散分析ができる

(1) 自由度の計算

完全	2方分割	a	b	c	d	ab	ac	ad	bc	bd	cd	abc	abd	acd	bcd	abcd	1
D	D				1												-1
A	A	1															-1
A×D	e(1A)	-1			-1			1									1
B	B		1														-1
B×D	e(1B)		-1		-1					1							1
A×B	A×B	-1	-1			1											1
A×B×D	e(2)	1	1		1	-1		-1		-1			1				-1
C	C			1													-1
A×C	A×C	-1		-1			1										1
B×C	B×C		-1	-1					1								1
A×B×C	A×B×C	1	1	1		-1	-1		-1			1					-1
C×D	e(3)			-1	-1						1						1
A×C×D	e(3)	1		1	1		-1	-1			-1		1				-1
B×C×D	e(3)		1	1	1				-1	-1	-1				1		-1
A×B×C×D	e(3)	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1

(2) 分散分析の結果

分散分析表を作ります。

-	自由度Φ	E[V]
D	$d - 1$	$\sigma_{e(3)}^2 + c\sigma_{e(2)}^2 + ac\sigma_{e(1B)}^2 + bc\sigma_{e(1A)}^2 + abc\sigma_D^2$
A	$a - 1$	$\sigma_{e(3)}^2 + c\sigma_{e(2)}^2 + ac\sigma_{e(1B)}^2 + bc\sigma_{e(1A)}^2 + bcd\sigma_A^2$
e(1A)	$(a - 1)(d - 1)$	$\sigma_{e(3)}^2 + c\sigma_{e(2)}^2 + ac\sigma_{e(1B)}^2 + bc\sigma_{e(1A)}^2$
B	$b - 1$	$\sigma_{e(3)}^2 + c\sigma_{e(2)}^2 + ac\sigma_{e(1B)}^2 + acd\sigma_B^2$
e(1B)	$(b - 1)(d - 1)$	$\sigma_{e(3)}^2 + c\sigma_{e(2)}^2 + ac\sigma_{e(1B)}^2$
A×B	$(a - 1)(b - 1)$	$\sigma_{e(3)}^2 + c\sigma_{e(2)}^2 + bd\sigma_{A\times C}^2$
e(2)	$(a - 1)(b - 1)(d - 1)$	$\sigma_{e(3)}^2 + c\sigma_{e(2)}^2$
C	$c - 1$	$\sigma_{e(3)}^2 + abd\sigma_C^2$
A×C	$(a - 1)(c - 1)$	$\sigma_{e(3)}^2 + bd\sigma_{A\times C}^2$
B×C	$(b - 1)(c - 1)$	$\sigma_{e(3)}^2 + ad\sigma_{B\times C}^2$
A×B×C	$(a - 1)(b - 1)(c - 1)$	$\sigma_{e(3)}^2 + d\sigma_{A\times B\times C}^2$
e(3)	$ab(c - 1)(d - 1)$	$\sigma_{e(3)}^2$
T	$abcd - 1$	-

**【6】** 分割法の主効果・交互作用の区間推定が導出できる

(1) 分散の期待値から分散の推定値を導出

分散分析から、 $e_{(1)}$ と  $e_{(2)}$ の分散の推定値  $E[V]$ を導出します。

-	V
D	$V_D = \widehat{\sigma_{e(3)}^2} + c\widehat{\sigma_{e(2)}^2} + ac\widehat{\sigma_{e(1B)}^2} + bc\widehat{\sigma_{e(1A)}^2} + abc\widehat{\sigma_D^2}$
$e_{(1A)}$	$V_{e(1A)} = \widehat{\sigma_{e(3)}^2} + c\widehat{\sigma_{e(2)}^2} + ac\widehat{\sigma_{e(1B)}^2} + bc\widehat{\sigma_{e(1A)}^2}$
$e_{(1B)}$	$V_{e(1B)} = \widehat{\sigma_{e(3)}^2} + c\widehat{\sigma_{e(2)}^2} + ac\widehat{\sigma_{e(1B)}^2}$
$e_{(2)}$	$V_{e(2)} = \widehat{\sigma_{e(3)}^2} + c\widehat{\sigma_{e(2)}^2}$
$e_{(3)}$	$V_{e(3)} = \widehat{\sigma_{e(3)}^2}$

上の表から、分散の推定値を求めます。

$$\widehat{\sigma_{e(1A)}^2} = \frac{1}{bc}(V_{e(1A)} - V_{e(1B)})$$

$$\widehat{\sigma_{e(1B)}^2} = \frac{1}{ac}(V_{e(1B)} - V_{e(2)})$$

$$\widehat{\sigma_{e(2)}^2} = \frac{1}{c}(V_{e(2)} - V_{e(3)})$$

$$\widehat{\sigma_{e(3)}^2} = V_{e(3)}$$

(2) 主効果の点推定と区間推定

点推定： $\hat{\mu}(A_i) = \bar{x}_{i\dots} = \mu + \bar{\alpha}_i = \mu + \bar{\delta} + \alpha_i + \overline{e_{(1A)}_{i\dots}} + \overline{e_{(2)}_{i\dots}} + \overline{e_{(3)}_{i\dots}}$

分散： $\widehat{Var}(\hat{\mu}(A_i)) = V[\mu + \bar{\delta} + \alpha_i + \overline{e_{(1A)}_{i\dots}} + \overline{e_{(2)}_{i\dots}} + \overline{e_{(3)}_{i\dots}}] = V[\bar{\delta}] + V[\overline{e_{(1A)}_{i\dots}}] + V[\overline{e_{(2)}_{i\dots}}] + V[\overline{e_{(3)}_{i\dots}}]$

$V_e$ が求まったので、自由度  $\phi$  と、点推定  $\mu$  を代入すれば推定区間が求まります。

(3) 交互作用の区間推定

点推定： $\hat{\mu}(A_i C_k) = \bar{x}_{i\dots k} = \mu + \bar{\delta} + \alpha_i + \overline{e_{(1A)}_{i\dots}} + \overline{e_{(2)}_{i\dots}} + \gamma_k + (\alpha\gamma)_{ik} + \overline{e_{(3)}_{i\dots k}}$

分散： $\widehat{Var}(\hat{\mu}(A_i C_k))$

$$= V[\mu + \bar{\delta} + \alpha_i + \overline{e_{(1A)}_{i\dots}} + \overline{e_{(2)}_{i\dots}} + \gamma_k + (\alpha\gamma)_{ik} + \overline{e_{(3)}_{i\dots k}}]$$

$$= V[\bar{\delta}] + V[\overline{e_{(1A)}_{i\dots}}] + V[\overline{e_{(2)}_{i\dots}}] + V[\overline{e_{(3)}_{i\dots k}}]$$

$V_e$ が求まったので、自由度  $\phi$  と、点推定  $\mu$  を代入すれば推定区間が求まります。

一連の導出過程を解説しました。

以上、2方分割法の分散分析の導出過程を詳細に解説しました。

【You Tube でも解説しています。ご覧ください】

<https://www.youtube.com/embed/qySUM9MH2so>

【1】直交表 L16 と四元配置実験のデータの構造式は同じ

(1) 直交表は完全配置実験を表にしたもの

直交表は実験回数が減らせる魔法の表ではなく、完全配置実験を列に割り当てた表です。  
実験回数が減らせるのは交絡してもよいと決めたからです。

【関連記事】【簡単】実験計画法の交絡(別名)とはキャラがかぶっていること

<https://qcplanets.com/method/doe/confounding/>

(2) データの構造式を書く

直交表 L16 は 4 因子から構成される水準 2 の完全配置実験と同じ、四元配置実験のデータの構造式を作ります。

★四元配置実験のデータの構造式

$$x_{ijkl} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_k + \delta_l + (\alpha\beta)_{ij} + (\alpha\gamma)_{ik} + (\alpha\delta)_{il} + (\beta\gamma)_{jk} + (\beta\delta)_{jl} + (\gamma\delta)_{kl} + (\alpha\beta\gamma)_{ijk} + (\alpha\beta\delta)_{ijl} + (\alpha\gamma\delta)_{ikl} + (\beta\gamma\delta)_{jkl} + e_{ijkl}$$

注意点が 2 つあります。

① 直交表 L16 については、 $\mu$  は直交表に割り付けません。

②  $e_{ijkl}$  は  $(\alpha\beta\gamma\delta)_{ijkl}$  と交絡しています。

(3) 各平均値をデータの構造式で作る

- $\bar{x}_{i\dots} = \mu + \alpha_i + \bar{e}_{i\dots}$
- $\bar{x}_{\dots j} = \mu + \beta_j + \bar{e}_{\dots j}$
- $\bar{x}_{\dots k} = \mu + \gamma_k + \bar{e}_{\dots k}$
- $\bar{x}_{\dots l} = \mu + \delta_l + \bar{e}_{\dots l}$
- $\bar{x}_{ij\dots} = \mu + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} + \bar{e}_{ij\dots}$
- $\bar{x}_{i\dots k} = \mu + \alpha_i + \gamma_k + (\alpha\gamma)_{ik} + \bar{e}_{i\dots k}$
- $\bar{x}_{i\dots l} = \mu + \alpha_i + \delta_l + (\alpha\delta)_{il} + \bar{e}_{i\dots l}$
- $\bar{x}_{\dots jk} = \mu + \beta_j + \gamma_k + (\beta\gamma)_{jk} + \bar{e}_{\dots jk}$
- $\bar{x}_{\dots jl} = \mu + \beta_j + \delta_l + (\beta\delta)_{jl} + \bar{e}_{\dots jl}$
- $\bar{x}_{\dots kl} = \mu + \gamma_k + \delta_l + (\gamma\delta)_{kl} + \bar{e}_{\dots kl}$
- $\bar{x}_{ijk\dots} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_k + (\alpha\beta)_{ij} + (\alpha\gamma)_{ik} + (\beta\gamma)_{jk} + (\alpha\beta\gamma)_{ijk} + \bar{e}_{ijk\dots}$
- $\bar{x}_{ij\dots l} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \delta_l + (\alpha\beta)_{ij} + (\alpha\delta)_{il} + (\beta\delta)_{jl} + (\alpha\beta\delta)_{ijl} + \bar{e}_{ij\dots l}$
- $\bar{x}_{i\dots kl} = \mu + \alpha_i + \gamma_k + \delta_l + (\alpha\gamma)_{ik} + (\alpha\delta)_{il} + (\gamma\delta)_{kl} + (\alpha\gamma\delta)_{ikl} + \bar{e}_{i\dots kl}$
- $\bar{x}_{\dots jkl} = \mu + \beta_j + \gamma_k + \delta_l + (\beta\gamma)_{jk} + (\beta\delta)_{jl} + (\gamma\delta)_{kl} + (\beta\gamma\delta)_{jkl} + \bar{e}_{\dots jkl}$
- $\bar{x} = \mu + \bar{e}$

【2】分割法の平方和の分解の式が書ける

(1) データの構造式を变形

式を書くと見づらいので、表にまとめます。分散分析はデータの構造式が複雑になると表で整理するのがオススメです。

-	$\bar{x}_{i..}$	$\bar{x}_{.j.}$	$\bar{x}_{..k.}$	$\bar{x}_{...l}$	$\bar{x}_{i.j.}$	$\bar{x}_{i.k.}$	$\bar{x}_{i..l}$	$\bar{x}_{.jk.}$	$\bar{x}_{.j.l}$	$\bar{x}_{..kl}$	$\bar{x}_{ijk.}$	$\bar{x}_{ij.l}$	$\bar{x}_{i.kl}$	$\bar{x}_{.jkl}$	$x_{ijkl}$	$\bar{x}$
S <sub>A</sub>	1															-1
S <sub>B</sub>		1														-1
S <sub>C</sub>			1													-1
S <sub>D</sub>				1												-1
S <sub>AB</sub>	-1	-1			1											1
S <sub>AC</sub>	-1		-1			1										1
S <sub>AD</sub>	-1			-1			1									1
S <sub>BC</sub>		-1	-1					1								1
S <sub>BD</sub>		-1		-1					1							1
S <sub>CD</sub>			-1	-1						1						1
S <sub>ABC</sub>	1	1	1		-1	-1		-1			1					-1
S <sub>ABD</sub>	1	1		1	-1		-1		-1			1				-1
S <sub>ACD</sub>	1		1	1		-1	-1			-1			1			-1
S <sub>BCD</sub>		1	1	1				-1	-1	-1				1		-1
S <sub>ABCD</sub>	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1

(交互作用の「×」は表のサイズにより省略して書いています。)

表から各平方和の導出式が簡単にできますね。S<sub>A</sub>、S<sub>A×C</sub>、S<sub>A×B×C</sub>を例に挙げます。

$$\bullet S_A = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^c \sum_{l=1}^d (\bar{x}_{i..} - \bar{x})^2$$

$$\bullet S_{A \times C} = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^c \sum_{l=1}^d (\bar{x}_{i.k.} - \bar{x}_{i..} - \bar{x}_{..k.} + \bar{x})^2$$

$$\bullet S_{A \times B \times C} = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^c \sum_{l=1}^d (\bar{x}_{ijk.} - \bar{x}_{ij.l} - \bar{x}_{i.k.} - \bar{x}_{.jk.} + \bar{x}_{i..} + \bar{x}_{.j.} + \bar{x}_{..k.} - \bar{x})^2$$

と書けますね。他の平方和も計算できます。

#### 【4】主効果・交互作用・誤差の期待値が導出できる

##### (1) 主効果の分散の期待値の導出

$$E[S_A] = E[\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^c \sum_{l=1}^d (\bar{x}_{i..} - \bar{x})^2] = bcd(a-1)\sigma_A^2 + (a-1)\sigma_e^2$$

主効果 A の自由度は(a-1)より、分散の期待値 E[V<sub>A</sub>] = bcdσ<sub>A</sub><sup>2</sup> + σ<sub>e</sub><sup>2</sup>

##### (2) 交互作用の分散の期待値の導出

$$E[S_{A \times C}] = E[\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^c \sum_{l=1}^d (\bar{x}_{i.k.} - \bar{x}_{i..} - \bar{x}_{..k.} + \bar{x})^2] = bd(a-1)(c-1)\sigma_{A \times C}^2 + (a-1)(c-1)\sigma_e^2$$

交互作用 A×C の自由度は(a-1)(c-1)より、分散の期待値 E[V<sub>A×C</sub>] = bdσ<sub>A×C</sub><sup>2</sup> + σ<sub>e</sub><sup>2</sup>

##### (3) 残差の分散の期待値の導出

$$E[S_{A \times B \times C}] = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^c \sum_{l=1}^d (\bar{x}_{ijk.} - \bar{x}_{ij.l} - \bar{x}_{i.k.} - \bar{x}_{.jk.} + \bar{x}_{i..} + \bar{x}_{.j.} + \bar{x}_{..k.} - \bar{x})^2$$

$$= (a-1)(b-1)(c-1)(d-1)\sigma_e^2$$

残差 e の自由度は(a-1)(b-1)(c-1)(d-1)より、分散の期待値 E[V<sub>e</sub>] = σ<sub>e</sub><sup>2</sup>

**【5】直交表 L<sub>16</sub> の分散分析ができる**

(1) 自由度の計算

表から各平方和の導出式が簡単にできますね。

-	a	b	c	d	ab	ac	ad	bc	bd	cd	abc	abd	acd	bcd	abcd	1
A	1															-1
B		1														-1
C			1													-1
D				1												-1
A×B	-1	-1			1											1
A×C	-1		-1			1										1
A×D	-1			-1			1									1
B×C		-1	-1					1								1
B×D		-1		-1					1							1
C×D			-1	-1						1						1
A×B×C	1	1	1		-1	-1		-1			1					-1
A×B×D	1	1		1	-1		-1		-1			1				-1
A×C×D	1		1	1		-1	-1			-1			1			-1
B×C×D		1	1	1				-1	-1	-1				1		-1
A×B×C×D	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1

(2) 分散分析の結果

分散分析表を作ります。

-	自由度Φ	E[V]
A	$a - 1$	$\sigma_e^2 + bcd\sigma_A^2$
B	$b - 1$	$\sigma_e^2 + acd\sigma_B^2$
C	$c - 1$	$\sigma_e^2 + abd\sigma_C^2$
D	$d - 1$	$\sigma_e^2 + abc\sigma_D^2$
A×B	$(a - 1)(b - 1)$	$\sigma_e^2 + cd\sigma_{A \times B}^2$
A×C	$(a - 1)(c - 1)$	$\sigma_e^2 + bd\sigma_{A \times C}^2$
A×D	$(a - 1)(d - 1)$	$\sigma_e^2 + bc\sigma_{A \times D}^2$
B×C	$(b - 1)(c - 1)$	$\sigma_e^2 + ad\sigma_{B \times C}^2$
B×D	$(b - 1)(d - 1)$	$\sigma_e^2 + ac\sigma_{B \times D}^2$
C×D	$(c - 1)(d - 1)$	$\sigma_e^2 + ab\sigma_{C \times D}^2$
A×B×C	$(a - 1)(b - 1)(c - 1)$	$\sigma_e^2 + d\sigma_{A \times B \times C}^2$
A×B×D	$(a - 1)(b - 1)(d - 1)$	$\sigma_e^2 + c\sigma_{A \times B \times D}^2$
A×C×D	$(a - 1)(c - 1)(d - 1)$	$\sigma_e^2 + b\sigma_{A \times C \times D}^2$
B×C×D	$(b - 1)(c - 1)(d - 1)$	$\sigma_e^2 + a\sigma_{B \times C \times D}^2$
A×B×C×D	$(a - 1)(b - 1)(c - 1)(d - 1)$	$\sigma_e^2$
T	$abcd - 1$	-

ここで、直交表 L<sub>16</sub> の場合、 $a=b=c=d=2$  を代入します。結果、すべての効果の自由度は 1 になります。  
 $a=b=c=d=2$  以外の値の場合でも上の分散分析は成り立ちます。

直交表 L<sub>81</sub>, L<sub>256</sub>, L<sub>3125</sub>, … が該当します。使うのは、直交表 L<sub>16</sub> か L<sub>81</sub> くらいでしょうか。

直交表の分散の期待値や自由度は暗記せずに、完全配置実験と同じ方法で導出できます。  
 直交表と総当りの完全配置実験は全く同じであるとデータの構造式、分散分析を実際に計算するとよくわかりますね。

【6】 主効果・交互作用の区間推定が導出できる

(1) 分散の期待値から分散の推定値を導出

分散分析から、eの分散の推定値  $E[V]$  を導出します。

$$V_e = \widehat{\sigma_e^2}$$

上の表から、分散の推定値を求めます。

(2) 主効果の点推定と区間推定

点推定： $\hat{\mu}(A_i) = \overline{x_{i...}} = \widehat{\mu + \alpha_i} = \mu + \alpha + \overline{e_{i...}}$

分散： $\widehat{Var}(\hat{\mu}(A_i)) = V[\mu + \alpha + \overline{e_{i...}}] = V[\overline{e_{i...}}] = \frac{\widehat{\sigma_e^2}}{a}$

$V_e$  が求まったので、自由度  $\phi$  と、点推定  $\mu$  を代入すれば推定区間が求まります。

(3) 交互作用の区間推定

点推定： $\hat{\mu}(A_i C_k) = \overline{x_{i.k.}} = \mu + \alpha_i + \gamma_k + (\alpha\gamma)_{ik} + \overline{e_{i.k.}}$

分散： $\widehat{Var}(\hat{\mu}(A_i C_k))$

$$= V[\mu + \alpha_i + \gamma_k + (\alpha\gamma)_{ik} + \overline{e_{i.k.}}] = V[\overline{e_{i.k.}}] = \frac{\widehat{\sigma_e^2}}{ac}$$

$V_e$  が求まったので、自由度  $\phi$  と、点推定  $\mu$  を代入すれば推定区間が求まります。  
一連の導出過程を解説しました。

以上、直交表 L16 の分散分析の導出過程を詳細に解説しました。

直交表の列をランダムに割当てても分散分析は変わらない

**【1】直交表の列の成分をシャッフルしても OK**

(1) 直交表の列成分に合わせて割当てるのが基本

直交表  $L_8(2^7)$  の各成分は、基本的に下表のようになっており、成分に合わせて因子(主効果、交互作用、残差)を割り当てます。

L8	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]	[7]	データ	順番
1	1	1	1	1	1	1	1	10	①
2	1	1	1	2	2	2	2	15	②
3	1	2	2	1	1	2	2	14	③
4	1	2	2	2	2	1	1	23	④
5	2	1	2	1	2	1	2	17	⑤
6	2	1	2	2	1	2	1	12	⑥
7	2	2	1	1	2	2	1	13	⑦
8	2	2	1	2	1	1	2	16	⑧
成分	a		a		a		a	-	-
		b	b			b	b	-	-
				c	c	c	c	-	-
割当て	A	B	A×B	C	A×C	B×C	e	-	-
1の総和	62	54	54	54	52	66	58	-	-
2の総和	58	66	66	66	68	54	62	計	-
平方和	2	18	18	18	32	18	2	108	-

平方和=[(1の総和)-(2の総和)]<sup>2</sup>/(データ数=8)より算出

(2) 直交表の列成分をシャッフルする

元の列の割当てをシャッフルします。

【シャッフル前】

L8	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]	[7]
割当て	A	B	A×B	C	A×C	B×C	e

【シャッフル後】

L8	[5]	[3]	[4]	[6]	[7]	[2]	[1]
割当て	A×C	A×B	C	B×C	e	B	A

シャッフル後の直交表を作って分散分析します。

L8	[5]	[3]	[4]	[6]	[7]	[2]	[1]	データ	順番
1	1	1	1	1	1	1	1	10	①
2	2	1	2	2	2	1	1	15	②
3	1	2	1	2	2	2	1	14	③
4	2	2	2	1	1	2	1	23	④
5	2	2	1	1	2	1	2	17	⑤
6	1	2	2	2	1	1	2	12	⑥
7	2	1	1	2	1	2	2	13	⑦
8	1	1	2	1	2	2	2	16	⑧
成分	a	a			a		a	-	-
		b		b	b	b		-	-
			c	c	c	c		-	-
割当て	A×C	A×B	C	B×C	e	B	A	-	-
1の総和	52	54	54	66	58	54	62	-	-
2の総和	68	66	66	54	62	66	58	計	-
平方和	32	18	18	18	2	18	2	108	-

シャッフルしても直交表のデータの順番は変わりません。  
 列をシャッフルしただけなので、各効果の平方和も変わりません。  
 よってシャッフル前後で分散分析の結果は変化しません。

列番 1 は成分 a ですが、成分 a はどの列に配置しても OK です。教科書は a を 1 列に配置した方がわかりやすいから 1 列目に配置しているだけです。

**【2】直交表の列の成分と異なる効果を割当てても OK**

①は列ごとシャッフルしただけなので、平方和、分散分析の結果は変わるはずが無いとすぐわかります。でも、本当かどうか確かめてみました。

次に、直交表の列の成分はそのまま、あえて異なる因子を配置したら分散分析の結果は変わるのかを確認します。結論は、変わりませんですが、なぜかを実際やってみましょう。

直交表 L8 の第 5,6,7 列にあえて、因子 B,A,C の主効果を配置します。第 1~4 列は何が入るかわかりますか？

L8	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]	[7]
成分	a		a		a		a
		b	b			b	b
				c	c	c	c
割当て	A	B	A×B	C	A×C	B×C	e
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
割当て	??	??	??	??	B	A	C

- ・ 交互作用 A×B→(bc)×(ac)=(abc<sup>2</sup>)=(ab)より第 3 列
- ・ 交互作用 A×C→(bc)×(abc)=(ab<sup>2</sup>c<sup>2</sup>)=(a)より第 1 列
- ・ 交互作用 B×C→(ac)×(abc)=(a<sup>2</sup>bc<sup>2</sup>)=(b)より第 2 列
- ・ 残差 e(交互作用 A×B×C)→(bc)×(ac)×(abc)=(a<sup>2</sup>b<sup>2</sup>c<sup>3</sup>)=(c)より第 4 列

に割当てられます。成分は積で表現したり、和の余りで表現することがあります。詳しくは、関連記事をご覧ください。

**【関連記事】【簡単】2水準の直交表のつくり方【必見】**  
<https://qcplanets.com/method/doe/orthogonal-array1/>

割当て列をまとめます。

L8	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]	[7]
成分	a		a		a		a
		b	b			b	b
				c	c	c	c
割当て	A	B	A×B	C	A×C	B×C	e
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
割当て	A×C	B×C	A×B	e	B	A	C

各データを直交表に入れて、平方和を算出します。

L8	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]	[7]	データ	順番
1	1	1	1	1	1	1	1	10	①
2	1	1	1	2	2	2	2	16	⑧
3	1	2	2	1	1	2	2	12	⑥
4	1	2	2	2	2	1	1	14	③
5	2	1	2	1	2	1	2	23	④
6	2	1	2	2	1	2	1	17	⑤
7	2	2	1	1	2	2	1	13	⑦
8	2	2	1	2	1	1	2	15	②
成分	a		a		a		a	-	-
		b	b			b	b	-	-
				c	c	c	c	-	-
割当て	A×C	B×C	A×B	e	B	A	C	-	-
1の総和	52	66	54	58	54	62	54	-	-
2の総和	68	54	66	62	66	58	66	計	-
平方和	32	18	18	2	18	2	18	108	-

上の表の黄色枠を見ましょう。列も変わったが 各行のデータ値も列の各成分に合わせて順番が変わったことがわかります。その結果、各効果の平方和は変化していません。

直交表の列の成分と異なる効果を割当てても、各効果の平方和も変わりません。よって分散分析の結果も変化しません。

以上、直交表の列をランダムに割当てても分散分析は変わらない理由を解説しました。

注意！多くの因子を直交表に割り当てると分散の期待値が導出できない

**【1】直交表はデータの構造式から作るもの**

(1) データの構造式の各項から直交表の各列が作られる

例えば、2水準系で4因子からなる場合、データの構造式は下の式になります。

$$x_{ijkl} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_k + \delta_l + (\alpha\beta)_{ij} + (\alpha\gamma)_{ik} + (\alpha\delta)_{il} + (\beta\gamma)_{jk} + (\beta\delta)_{jl} + (\gamma\delta)_{kl} + (\alpha\beta\gamma)_{ijk} + (\alpha\beta\delta)_{ijl} + (\alpha\gamma\delta)_{ikl} + (\beta\gamma\delta)_{jkl} + e_{ijkl}$$

$\mu$ を除けば、15個の項から構成されます。4因子の2水準系に合う直交表は  $L_{16}(2^{15})$  ですね。直交表の各列とデータの構造式の各項を比較すると、全く同じとわかります。

列番	データの構造式	直交表成分			
1	$\alpha$	a			
2	$\beta$		b		
3	$\gamma$			c	
4	$\delta$				d
5	$\alpha\beta$	a	b		
6	$\alpha\gamma$	a		c	
7	$\alpha\delta$	a			d
8	$\beta\gamma$		b	c	
9	$\beta\delta$		b		d
10	$\gamma\delta$			c	d
11	$\alpha\beta\gamma$	a	b	c	
12	$\alpha\beta\delta$	a	b		d
13	$\alpha\gamma\delta$	a		c	d
14	$\beta\gamma\delta$		b	c	d
15	$\alpha\beta\gamma\delta$	a	b	c	d

(2) 分散の期待値はデータの構造式から求める

2水準系4因子のデータの構造式からは、15種類の効果の分散の期待値が計算できます。例えば、

$$\cdot S_A = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^c \sum_{l=1}^d (\bar{x}_{i...} - \bar{x})^2$$

$$\cdot S_{A \times B} = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^c \sum_{l=1}^d (\bar{x}_{ij..} - \bar{x}_{i...} - \bar{x}_{.j..} + \bar{x})^2$$

など式を立てて計算できます。

(3) データの構造式に無い変数の分散の期待値は計算できない

2水準系4因子のデータの構造式は、4因子以外の効果については、分散の期待値は計算できません。

$x_{ijkl} = x(a, b, c, d)$  に a, b, c, d 以外の効果(f, g)は無いため、 $S_F, S_G$  は計算できません。構成に含まれていないから計算ができないのは当然ですね。しかし、直交表ではそれができるように割り当てられるのです。

**【2】多因子割付は交絡が前提**

直交表  $L_{16}$  に 6 因子を割り当てる場合を考えます。

効果	列番	直交表成分			
A	1	a			
B	2		b		
C	3			c	
D	4				d
A×B	5	a	b		
A×C	6	a		c	
A×D	7	a			d
B×C	8		b	c	
F	9		b		d
G	10			c	d
e	11	a	b	c	
A×F	12	a	b		d
A×G	13	a		c	d
e	14		b	c	d
e	15	a	b	c	d

黄色枠が、F,G と 4 因子以上の効果を含む場合です。直交表としては違和感のない割当てです。しかし、もともと 2 水準 4 因子の 16 回の実験を構成する表です。

つまり、F,G についてはもともと他の効果と交絡が前提で配置しています。

F→交互作用 B×D に交絡(9 列)

G→交互作用 C×D に交絡(10 列)

A×F→交互作用 A×B×D に交絡(12 列)

A×G→交互作用 A×C×D に交絡(13 列)

F の平方和を求めても、それは交互作用 B×D の平方和に過ぎません。では、多因子を割り当てた場合、分散の期待値はどのように計算するのでしょうか？

### 【3】他の因子にならって分散の期待値を書く

データの構造式に含まれない変数を直交表に交絡前提で割当てるので、計算から分散の期待値  $E[V]$  は計算できません。

しかし、それでも多くの教科書は分散分析表に期待値  $E[V]$  を下表のように、当たり前のごとく書いています。

-	$\phi$	$E[V]$	備考
A	1	$8\sigma_A^2 + \sigma_e^2$	8=bcd
B	1	$8\sigma_B^2 + \sigma_e^2$	8=acd
...	...	...	...
F	1	$8\sigma_F^2 + \sigma_e^2$	8=???
G	1	$8\sigma_G^2 + \sigma_e^2$	8=???
A×B	1	$4\sigma_{A×B}^2 + \sigma_e^2$	4=cd
A×C	1	$4\sigma_{A×C}^2 + \sigma_e^2$	4=bd
...	...	...	...
A×F	1	$4\sigma_{A×F}^2 + \sigma_e^2$	4=??
A×G	1	$4\sigma_{A×G}^2 + \sigma_e^2$	4=??
e	3	$\sigma_e^2$	-
T	15	-	-

因子 A の  $E[V]$  の係数 8 は  $bcd=2 \times 2 \times 2=8$  でわかりますが、因子 F,G の係数 8 はどう求めたかわかりません。交互作用 A×B の  $E[V]$  の係数 4 は  $cd=2 \times 2=4$  でわかりますが、交互作用 A×F,A×G の係数 4 はどう求めたかわかりません。

因子 A,B,C に合わせて、因子 F,G の  $E[V]$  を求めただけです。

$8\sigma_A^2 + \sigma_e^2 \rightarrow 8\sigma_F^2 + \sigma_e^2$   
 $4\sigma_{A×B}^2 + \sigma_e^2 \rightarrow 4\sigma_{A×F}^2 + \sigma_e^2$   
 と係数を置けば良いです。

以上、多くの因子を直交表に割り当てると分散の期待値が導出できない内容を詳細に解説しました。



(2) 3水準の場合

行列 M を設定し、行列 M' を下図のように定義します。

$$M' = \begin{pmatrix} 1 & M & M \\ \dots & & \\ 1 & & \\ 2 & M & M+1 \\ \dots & & \\ 2 & & \\ 3 & M & M+2 \\ \dots & & \\ 3 & & \end{pmatrix} \quad M = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

例として、直交表 L<sub>9</sub>(3<sup>4</sup>) を L<sub>27</sub>(3<sup>13</sup>) に拡張します。

<b>L<sub>9</sub></b>	⇒	<b>L<sub>27</sub></b>																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																	
<table border="1" style="width: 100px; height: 100px;"> <tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr> <tr><td>1</td><td>2</td><td>2</td><td>2</td></tr> <tr><td>1</td><td>3</td><td>3</td><td>3</td></tr> <tr><td>2</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr> <tr><td>2</td><td>2</td><td>3</td><td>1</td></tr> <tr><td>2</td><td>3</td><td>1</td><td>2</td></tr> <tr><td>3</td><td>1</td><td>3</td><td>2</td></tr> <tr><td>3</td><td>2</td><td>1</td><td>3</td></tr> <tr><td>3</td><td>3</td><td>2</td><td>1</td></tr> <tr><td>a</td><td>b</td><td>ab</td><td>a2b</td></tr> </table>	1	1	1	1	1	2	2	2	1	3	3	3	2	1	2	3	2	2	3	1	2	3	1	2	3	1	3	2	3	2	1	3	3	3	2	1	a	b	ab	a2b		<table border="1" style="width: 300px; height: 300px;"> <tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr> <tr><td>1</td><td>1</td><td>2</td><td>2</td><td>2</td><td>2</td><td>1</td><td>2</td><td>2</td><td>2</td><td>1</td><td>2</td><td>2</td></tr> <tr><td>1</td><td>1</td><td>3</td><td>3</td><td>3</td><td>3</td><td>1</td><td>3</td><td>3</td><td>3</td><td>1</td><td>3</td><td>3</td></tr> <tr><td>1</td><td>2</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>3</td><td>2</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>2</td><td>1</td><td>2</td></tr> <tr><td>1</td><td>2</td><td>2</td><td>3</td><td>1</td><td>1</td><td>2</td><td>2</td><td>3</td><td>1</td><td>2</td><td>2</td><td>3</td></tr> <tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>1</td><td>2</td><td>2</td><td>3</td><td>1</td><td>2</td><td>2</td><td>3</td><td>1</td><td>2</td></tr> <tr><td>1</td><td>3</td><td>1</td><td>3</td><td>2</td><td>3</td><td>1</td><td>3</td><td>2</td><td>3</td><td>1</td><td>3</td><td>2</td></tr> <tr><td>1</td><td>3</td><td>2</td><td>1</td><td>3</td><td>3</td><td>2</td><td>1</td><td>3</td><td>3</td><td>2</td><td>1</td><td>3</td></tr> <tr><td>1</td><td>3</td><td>3</td><td>2</td><td>1</td><td>3</td><td>3</td><td>2</td><td>1</td><td>3</td><td>3</td><td>2</td><td>1</td></tr> <tr><td>2</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>2</td><td>2</td><td>2</td><td>2</td><td>3</td><td>3</td><td>3</td><td>3</td></tr> <tr><td>2</td><td>1</td><td>2</td><td>2</td><td>2</td><td>2</td><td>3</td><td>3</td><td>3</td><td>3</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr> <tr><td>2</td><td>1</td><td>3</td><td>3</td><td>3</td><td>2</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>3</td><td>2</td><td>2</td><td>2</td></tr> <tr><td>2</td><td>2</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>3</td><td>2</td><td>3</td><td>1</td><td>1</td><td>3</td><td>1</td><td>2</td></tr> <tr><td>2</td><td>2</td><td>2</td><td>3</td><td>1</td><td>3</td><td>3</td><td>1</td><td>2</td><td>1</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr> <tr><td>2</td><td>2</td><td>3</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>1</td></tr> <tr><td>2</td><td>3</td><td>1</td><td>3</td><td>2</td><td>1</td><td>2</td><td>1</td><td>3</td><td>2</td><td>3</td><td>2</td><td>1</td></tr> <tr><td>2</td><td>3</td><td>2</td><td>1</td><td>3</td><td>1</td><td>3</td><td>2</td><td>1</td><td>2</td><td>1</td><td>3</td><td>2</td></tr> <tr><td>2</td><td>3</td><td>3</td><td>2</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>3</td><td>2</td><td>2</td><td>2</td><td>1</td><td>3</td></tr> <tr><td>3</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>3</td><td>3</td><td>3</td><td>3</td><td>2</td><td>2</td><td>2</td><td>2</td></tr> <tr><td>3</td><td>1</td><td>2</td><td>2</td><td>2</td><td>3</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>3</td><td>3</td></tr> <tr><td>3</td><td>1</td><td>3</td><td>3</td><td>3</td><td>3</td><td>2</td><td>2</td><td>2</td><td>2</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr> <tr><td>3</td><td>2</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>1</td><td>3</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>2</td><td>3</td><td>1</td></tr> <tr><td>3</td><td>2</td><td>2</td><td>3</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>3</td><td>3</td><td>1</td><td>2</td></tr> <tr><td>3</td><td>2</td><td>3</td><td>1</td><td>2</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>1</td><td>3</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr> <tr><td>3</td><td>3</td><td>1</td><td>3</td><td>2</td><td>2</td><td>3</td><td>2</td><td>1</td><td>1</td><td>2</td><td>1</td><td>3</td></tr> <tr><td>3</td><td>3</td><td>2</td><td>1</td><td>3</td><td>2</td><td>1</td><td>3</td><td>2</td><td>1</td><td>3</td><td>2</td><td>1</td></tr> <tr><td>3</td><td>3</td><td>3</td><td>2</td><td>1</td><td>2</td><td>2</td><td>1</td><td>3</td><td>1</td><td>1</td><td>3</td><td>2</td></tr> <tr><td>a</td><td>b</td><td>c</td><td>b</td><td>b</td><td>a</td><td>a</td><td>a</td><td>a</td><td>a</td><td>a</td><td>a</td><td>a</td></tr> <tr><td></td><td></td><td>c</td><td>c</td><td>2c</td><td>b</td><td>b</td><td>b</td><td>2b</td><td>2b</td><td>2c</td><td>2c</td><td>2c</td></tr> </table>	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	1	2	2	2	1	2	2	1	1	3	3	3	3	1	3	3	3	1	3	3	1	2	1	2	3	3	2	1	2	3	2	1	2	1	2	2	3	1	1	2	2	3	1	2	2	3	1	2	3	1	2	2	3	1	2	2	3	1	2	1	3	1	3	2	3	1	3	2	3	1	3	2	1	3	2	1	3	3	2	1	3	3	2	1	3	1	3	3	2	1	3	3	2	1	3	3	2	1	2	1	1	1	1	2	2	2	2	3	3	3	3	2	1	2	2	2	2	3	3	3	3	1	1	1	2	1	3	3	3	2	1	1	1	3	2	2	2	2	2	1	2	3	3	2	3	1	1	3	1	2	2	2	2	3	1	3	3	1	2	1	1	2	3	2	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	3	2	1	2	1	3	2	3	2	1	2	3	2	1	3	1	3	2	1	2	1	3	2	2	3	3	2	1	1	1	3	2	2	2	1	3	3	1	1	1	1	3	3	3	3	2	2	2	2	3	1	2	2	2	3	1	1	1	2	3	3	3	3	1	3	3	3	3	2	2	2	2	1	1	1	3	2	1	2	3	1	3	1	2	3	2	3	1	3	2	2	3	1	1	1	2	3	3	3	1	2	3	2	3	1	2	1	2	3	1	3	1	2	3	3	3	1	3	2	2	3	2	1	1	2	1	3	3	3	2	1	3	2	1	3	2	1	3	2	1	3	3	3	2	1	2	2	1	3	1	1	3	2	a	b	c	b	b	a	a	a	a	a	a	a	a			c	c	2c	b	b	b	2b	2b	2c	2c	2c
1	1	1	1																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
1	2	2	2																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
1	3	3	3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
2	1	2	3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
2	2	3	1																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
2	3	1	2																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
3	1	3	2																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
3	2	1	3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
3	3	2	1																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
a	b	ab	a2b																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																							
1	1	2	2	2	2	1	2	2	2	1	2	2																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																							
1	1	3	3	3	3	1	3	3	3	1	3	3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																							
1	2	1	2	3	3	2	1	2	3	2	1	2																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																							
1	2	2	3	1	1	2	2	3	1	2	2	3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																							
1	2	3	1	2	2	3	1	2	2	3	1	2																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																							
1	3	1	3	2	3	1	3	2	3	1	3	2																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																							
1	3	2	1	3	3	2	1	3	3	2	1	3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																							
1	3	3	2	1	3	3	2	1	3	3	2	1																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																							
2	1	1	1	1	2	2	2	2	3	3	3	3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																							
2	1	2	2	2	2	3	3	3	3	1	1	1																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																							
2	1	3	3	3	2	1	1	1	3	2	2	2																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																							
2	2	1	2	3	3	2	3	1	1	3	1	2																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																							
2	2	2	3	1	3	3	1	2	1	1	2	3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																							
2	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																							
2	3	1	3	2	1	2	1	3	2	3	2	1																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																							
2	3	2	1	3	1	3	2	1	2	1	3	2																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																							
2	3	3	2	1	1	1	3	2	2	2	1	3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																							
3	1	1	1	1	3	3	3	3	2	2	2	2																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																							
3	1	2	2	2	3	1	1	1	2	3	3	3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																							
3	1	3	3	3	3	2	2	2	2	1	1	1																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																							
3	2	1	2	3	1	3	1	2	3	2	3	1																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																							
3	2	2	3	1	1	1	2	3	3	3	1	2																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																							
3	2	3	1	2	1	2	3	1	3	1	2	3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																							
3	3	1	3	2	2	3	2	1	1	2	1	3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																							
3	3	2	1	3	2	1	3	2	1	3	2	1																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																							
3	3	3	2	1	2	2	1	3	1	1	3	2																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																							
a	b	c	b	b	a	a	a	a	a	a	a	a																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																							
		c	c	2c	b	b	b	2b	2b	2c	2c	2c																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																							

同様に L<sub>81</sub>, L<sub>243</sub>, ... と拡張できます。

(3) 4水準の場合

行列 M を設定し、行列 M' を下図のように定義します。

$$M' = \begin{pmatrix} 1 & M & M & M & M \\ \dots & & & & \\ 1 & & & & \\ 2 & M & M+1 & M+2 & M+3 \\ \dots & & & & \\ 2 & & & & \\ 3 & M & M+2 & M+3 & M+1 \\ \dots & & & & \\ 3 & & & & \\ 4 & M & M+3 & M+1 & M+2 \\ \dots & & & & \\ 4 & & & & \end{pmatrix} \quad M = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$



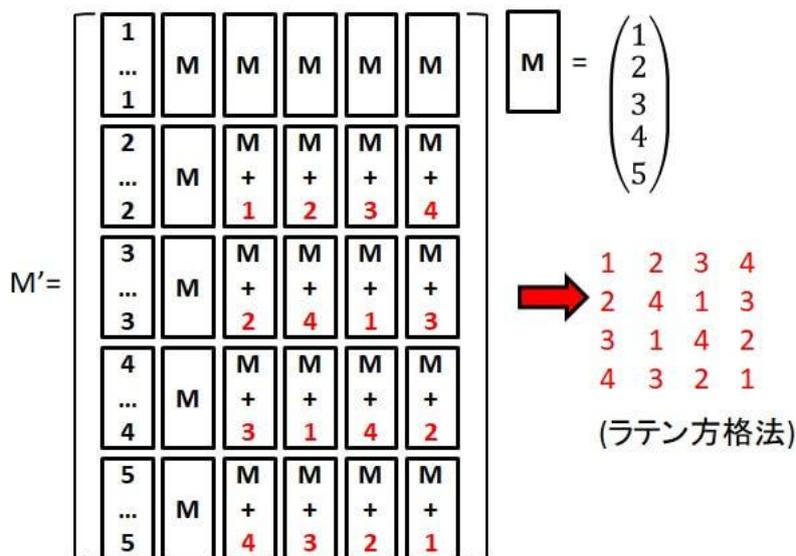
1	2	3
2	3	1
3	1	2

(ラテン方格法)

上図の赤字を見ると、加算した数字が<b>ラテン方格法に従っている</b>ことがわかります。

(4) 5 水準の場合

行列 M を設定し、行列 M' を下図のように定義します。



上図の赤字を見ると、加算した数字がラテン方格法に従っていることがわかります。その他、多水準についても同様に拡張できます。便利な方法ですね。

【3】 直交表を拡張する時の注意点

(問)上の方法で、直交表  $L_{16}(4^5)$  を作れ。また、直交性が無いパターンになることを確認せよ。

どうということ？ と思いますね。

本冊子の「【本記事限定】直交表の交互作用がある列は素数の水準系だけ【必見】」のように、水準数が素数でない場合は、うまく配列ができません。

直交表  $L_{16}(4^5)$  を行列 M' の定義で作ったあと、各列どおしの直交性を持たせるために、数字の入れ替えをしています。そのため、交互作用の列がありません。

また、6 水準の場合、直交表を拡張する際の、<b>ラテン方格のための行列が存在しないため、拡張できません。一方、水準数が素数の場合は問題なく、本記事の拡張方法がすべて使えます。

水準数 4,6,8,9 等を使う場合は十分注意してください。実務上、水準数は 2,3 か、たまに 5 を使う程度でしょう。

以上、直交表の拡張方法を解説し、水準の数についての注意点を説明しました。

交互作用を調べると直交表は複数ある

【1】【本記事限定】直交表 L27 の交互作用を拡張すると 27 列できる

【関連記事】【本記事限定】3 水準以上の直交表には交互作用列が複数ある理由【必見】  
<https://qcplanets.com/method/doe/orthogonal-array2/>  
 に書いたとおり、3 水準の交互作用は複数の直交表の列が必要です。

$$S_A = S_a$$

$$S_{A \times B} = S_{a \times b} + S_{a \times 2b}$$

$$S_{A \times B} = S_{a \times b} + S_{2a \times b}$$

上の式をよく見ると、交互作用 A×B は(ab,a2b)と(ab,2ab)の 2 種類あることがわかりますね。これを拡張してみると、交互作用 A×B は ab,a2b,2ab,2a2b の 4 パターンの組み合わせで表記できないか?に気がつきませんか?

さらに、主効果 A は a と 1 種類ですが、3 水準系は水準数を 3 で割った余りを割当てるので a も 2a もあって良いと思いませんか?

★ 直交表を拡張しよう

直交表 L27 は全部で 27 列ある

直交表の列		オレンジ枠が存在する列					
効果	列	成分					
なし(平均μ)	1						
主効果	6	a	b	c			
		2a	2b	2c			
2因子交互作用	12	ab	a2b	ac	a2c	bc	b2c
		2a2b	2ab	2a2c	2ac	2b2c	2bc
3因子交互作用	8	abc	a2b2c	a2bc	ab2c		
		2a2b2c	2abc	2ab2c	2a2bc		
計	27						

のように、書き出します。もともと、3 因子 A,B,C の水準は 3 つあるので、3 の 3 乗で 27 列が直交表に配列されるべきです。一般化すると、m 因子の n 水準系の直交表は本来  $n^m$  列あるべきです。しかし、実際は配列数が少なく、L27 では 27 列ではなく 13 列ですね。なぜでしょうか?

【2】【本記事限定】直交表 L27 は 13 列しかできない理由

その理由は、「直交性がない組み合わせがあるから」

直交性については、

【関連記事】【本記事限定】実験計画法では実験回数を減らすために直交性が必須  
<https://qcplanets.com/method/doe/orthogonal/>

に書いたとおり、他の因子の効果を見せなくすることです。

直交表 L27 は 27 列書き出せますが、平均 μ の((a,b,c)=(0,0,0)) 列は無視して 26 列とします。26 列どうし直交性を確認すると、下図のように直交性がない 13 組が出てきます。

直交表の列		同じ色どうしは直交性がない組み合わせ						直交表
効果	列	成分						
なし(平均μ)	含まない							
主効果	3	a	b	c				パターン1
		2a	2b	2c				パターン2
2因子交互作用	6	ab	a2b	ac	a2c	bc	b2c	パターン1
		2a2b	2ab	2a2c	2ac	2b2c	2bc	パターン2
3因子交互作用	4	abc	a2b2c	a2bc	ab2c			パターン1
		2a2b2c	2abc	2ab2c	2a2bc			パターン2
計	13							

例えば、主効果については、a と 2a は直交性がありません。直交表に a と 2a は同時に配列できません。交互作用も同様に、ab と 2a2b は直交性がありません。直交表に ab と 2a2b は同時に配列できません。まとめると、直交表 L27 の 26 列のうち、同時に配列できないパターンを分離する必要があり、結局 13 列しか配列ができません。直交表 L27 は 13 列になるわけです。

**【3】【本記事限定】直交表は複数種類がある理由**

直交性がない組み合わせを取り除くと配列数が減るが、直交表の種類が複数あることに気が付く。

もう1度、前頁図を見ましょう。直交表のパターン1,パターン2 ってありますね。実は、直交表 L27 は2種類あることがわかりますね。パターン1でもパターン2でも実験してよいのです。直交性がないのは縦の方向ですが、横の方向は直交性があるため直交表に配列できます。

もっと言うと、パターン1の一部とパターン2の一部を組み合わせることも可能です。つまり、直交表 L27 は多数種類があることがわかります。もちろん、他の直交表もそれぞれ多数の種類があります。教科書では1パターンしか出てきませんが、実際は多数に種類があります。

(1)直交表 L27 を複数書いてみよう  
2種類紹介します。

<パターン1>

<パターン2>

列	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	データ
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	22
2	1	1	2	1	1	2	3	2	3	2	3	2	3	13
3	1	1	3	1	1	3	2	3	2	3	2	3	2	22
4	1	2	1	2	3	1	1	2	2	2	3	3	2	7
5	1	2	2	2	3	2	3	3	1	3	2	1	1	18
6	1	2	3	2	3	3	2	1	3	1	1	2	3	20
7	1	3	1	3	2	1	1	3	3	3	2	2	3	18
8	1	3	2	3	2	2	3	1	2	1	1	3	2	11
9	1	3	3	3	2	3	2	2	1	2	3	1	1	8
10	2	1	1	2	2	2	2	1	1	2	2	2	2	26
11	2	1	2	2	2	3	1	2	3	3	1	3	1	22
12	2	1	3	2	2	1	3	3	2	1	3	1	3	5
13	2	2	1	3	1	2	2	2	2	3	1	1	3	22
14	2	2	2	3	1	3	1	3	1	1	3	2	2	15
15	2	2	3	3	1	1	3	1	3	2	2	3	1	24
16	2	3	1	1	3	2	2	3	3	1	3	3	1	18
17	2	3	2	1	3	3	1	1	2	2	2	1	3	17
18	2	3	3	1	3	1	3	2	1	3	1	2	2	15
19	3	1	1	3	3	3	3	1	1	3	3	3	3	7
20	3	1	2	3	3	1	2	2	3	1	2	1	2	6
21	3	1	3	3	3	2	1	3	2	2	1	2	1	9
22	3	2	1	1	2	3	3	2	2	1	2	2	1	16
23	3	2	2	1	2	1	2	3	1	2	1	3	3	25
24	3	2	3	1	2	2	1	1	3	3	3	1	2	21
25	3	3	1	2	1	3	3	3	3	2	1	1	2	15
26	3	3	2	2	1	1	2	1	2	3	3	2	1	23
27	3	3	3	2	1	2	1	2	1	1	2	3	3	26
成分	a			a	a	a				a	a	a	a	
		b		b	2b				b	b	b	2b	2b	b
			c			c	2c	c	2c	c	2c	c	2c	c
	1	139	132	151	169	182	145	157	171	162	139	161	134	160
2	164	168	150	162	152	164	170	135	132	144	173	155	138	
3	148	151	150	120	117	142	124	145	157	168	117	162	153	
計	451	451	451	451	451	451	451	451	451	451	451	451	451	
S	36	72	0.1	156	235	32	125	77	57	53	193	47	28	1112

列	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	データ
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	22
2	1	1	3	1	1	3	2	3	2	3	2	3	2	13
3	1	1	2	1	1	2	3	2	3	2	3	2	3	22
4	1	3	1	3	2	1	1	3	3	3	2	2	3	7
5	1	3	3	3	2	3	2	2	1	2	3	1	1	18
6	1	3	2	3	2	2	3	1	2	1	1	1	3	20
7	1	2	1	2	3	1	1	2	2	2	3	3	2	18
8	1	2	3	2	3	3	2	1	3	1	1	2	3	11
9	1	2	2	2	3	2	3	3	1	3	2	1	1	8
10	3	1	1	3	3	3	3	3	1	1	3	3	3	26
11	3	1	3	3	3	2	1	3	2	2	1	2	1	22
12	3	1	2	3	3	1	2	2	3	1	2	1	2	5
13	3	3	1	2	1	3	3	3	3	2	1	1	2	22
14	3	3	3	2	1	2	1	2	1	1	2	3	3	15
15	3	3	2	2	1	1	2	1	2	3	3	2	1	24
16	3	2	1	1	2	3	3	2	2	1	2	2	1	18
17	3	2	3	1	2	2	1	1	3	3	3	1	2	17
18	3	2	2	1	2	1	2	3	1	2	1	3	3	15
19	2	1	1	2	2	2	2	2	1	1	2	2	2	7
20	2	1	3	2	2	1	3	3	2	1	3	1	3	6
21	2	1	2	2	2	3	1	2	3	3	1	3	1	9
22	2	3	1	1	3	2	2	3	3	1	3	3	1	16
23	2	3	3	1	3	1	3	2	1	3	1	2	2	25
24	2	3	2	1	3	3	1	1	2	2	2	1	3	21
25	2	2	1	3	1	2	2	2	3	1	1	3	1	15
26	2	2	3	3	1	1	3	1	3	2	2	3	1	23
27	2	2	2	3	1	3	1	3	1	1	3	2	2	26
成分	2a			2a	2a	2a	2a				2a	2a	2a	2a
		2b		2b	b				2b	2b	2b	b	b	2b
			2c			2c	c	2c	c	2c	c	2c	c	2c
	1	139	132	151	169	182	145	157	171	162	139	161	134	160
2	164	168	150	162	152	164	170	135	132	144	173	155	138	
3	148	151	150	120	117	142	124	145	157	168	117	162	153	
計	451	451	451	451	451	451	451	451	451	451	451	451	451	
S	36	72	0.1	156	235	32	125	77	57	53	193	47	28	1112

パターン1,2 どちらも各列の平方和が同じ。つまり見た目は違う直交表でも中身は同じ！

★パターン1： a,b,c,ab,a2b,ac,a2c,bc,b2c,abc,a2b2c,a2bc,ab2c  
と

★パターン2： 2a,2b,2c,2a2b,2ab,2a2c,2ac,2b2c,2bc,2a2b2c,2abc,2ab2c,2a2bc

は成分が全く違いますが、各実験 No の水準数においては相対的に同じものなので、各列の平方和がパターン1も2も同じ結果になりました。

直交表は成分によって複数のパターンが作れるが、平方和の計算をすると1パターンに集約できることがわかりました。

以上、3水準の直交表 L27 を調べると、複数の種類の直交表があることがわかりました。実は、もっと多数、無数の種類があります。ただし、平方和の計算や分散分析をすると結果が同じになる種類があることもわかりました。

## 直交表の種類は無数にある

### 【1】【本記事限定】直交表は無数にある

#### (1) いろいろな直交表

教科書にある直交表は、どのタイプも1種類しかありません。しかも、アダマール行列など数学を使って表を作っていくため、1種類しかないような印象を受けます。しかし、本当なのでしょうか？

直交性をもつ配列パターンをエクセルで調べると、無数のパターンがあることがわかりました。

本冊子の「【本記事限定】交互作用を調べると直交表 L27 は複数ある【必見】」で解説したように、交互作用のパターンが複数あることから、直交表の複数に気がつきました。本記事では、全配列パターンを調べると何種類の直交表があるのかを解説します。

種類をまとめると以下になりました。L<sub>4</sub>(2<sup>3</sup>)は8種類、L<sub>8</sub>(2<sup>7</sup>)は501種類、と指数関数的に種類が増えているのがわかります。なお、L18以降は計算機の制約のため調査できていませんが、機会があれば挑戦します。

L<sub>4</sub> : 8

L<sub>8</sub> : 501

L<sub>9</sub> : 2444

L<sub>12</sub> : 10000 以上

…と一気に無数に発散します。

### 【2】【本記事限定】直交表の配列は直交性の可否できる

直交性については以下の関連記事でも解説しましたが、本記事でも実際やってみましょう。

【関連記事】【本記事限定】実験計画法では実験回数を減らすために直交性が必須

<https://qcplanets.com/method/doe/orthogonal/>

#### (1)直交性とは他の因子が見えなくすること

直交表とは、内積=0では不十分で、他の因子が見えなくすること

データの構造式で、主効果や交互作用の合計は0

直交表の各列を作るときに、直交性を保持するイメージを下図に書きます。

...	i列	...	j列	...	k列	...
	1		1		1	
	1		2			
	...		...			
	1		n			
	2		1		2	
	2		2			
	...		...			
	2		n			
	...		...			
	n		1		n	
	n		2			
	...		...			
	n		n			

図は直交表の一部を示し、列i、列j、列kの関係を説明しています。列iは列jの1水準に対して、全ての水準がある。列kは列jの1水準に対して、全ての水準がある。

まず、実験回数 n 回と水準数 m に対して、列のパターンは  $m^n$  種類があります。直交表 L<sub>27</sub> なら  $3^{27}=7,625,597,484,987$  列あります。もう数えられないレベルですが、そのうち、直交性がありそうなパターン列に絞ります。1000列くらいまで絞ればエクセルで計算ができます。

どの2組みの列も1つの列の1つ水準に対して、他の列の全ての水準が含むように割り当てます。さすが、手計算は厳しいのでエクセルで計算します。次の2つ面白いことがわかりました。

(i)直交表のパターンが無数にある

(ii)割当て可能な最大列は決まっている

エクセルで計算して、「直交表は1パターンしかないのか？直交表 L<sub>27</sub> 3<sup>13</sup> というが、本当はもっと列があるのではないかと」狙って、全パターンを解析すると、直交表のパターンがたくさんあることと、列数は1つに決まることがわかります。

**【3】【本記事限定】 直交表のいろいろな例**

具体的な直交表を使って複数のパターンを調べましょう。その方がわかりやすいです。直交表  $L_4 2^3$  を使って調べましょう。次の2つの方法で調べていきます。

- (i) 列の全パターンのうち、水準数が同回ある列に絞る
- (ii) 直交性がある列の組み合わせを調べる

(1) 直交表  $L_4 2^3$  は6列候補がある

直交表  $L_4 2^3$  の列を16列から6列に絞る

実験回数が4回、2水準ですから、単純に2の4乗の16列あります。さらに、どの列も水準1が2回、水準2が2回あるので、「1,1,2,2」の並び方が全部で何通りあるかを計算しましょう。高校数学ですね。

$$\frac{4!}{2!2!}=6$$

6列を書き出しましょう。

[1]列	[2]列	[3]列	[4]列	[5]列	[6]列
1	1	1	2	2	2
1	2	2	1	1	2
2	1	2	1	2	1
2	2	1	2	1	1

(2) 直交表  $L_4 2^3$  の6列の直交性を調べる

2組みの列を取り出し、1列の各水準が他の列の全水準を含んでいるかを調べます。重複を防ぐために、

- [1]列 : [2]列~[6]列
- [2]列 : [3]列~[6]列
- ...
- [5]列 : [6]列

とそれぞれ2組みの列の直交性を調べます。

次に直交性を持つ列を集めていきます。

- [1]列と[2]列は明らかに直交性があります。
- [1]列と[2]列と[3]列も直交性があります。
- [1]列と[2]列と[3]列と[4]列は、[3]列と[4]列は直交性がありません。

と全パターンを調べていきます。その結果、8種類見つけることができました。

1	2	3	4
No	A	B	C
1	1	1	1
2	1	2	2
3	2	1	2
4	2	2	1

2	3	4
A	B	C
1	1	2
1	2	1
2	1	1
2	2	2

3	4	
A	B	C
1	1	2
1	2	1
2	2	2
2	1	1

4	5	6	7	8	
A	B	C	A	B	C
1	2	2	2	2	2
1	1	1	1	1	1
2	2	1	2	2	2
2	1	2	1	1	1

2つの方法で直交表の列の候補を調べていきます。

- (i) 列の全パターンのうち、水準数が同回ある列に絞る
- (ii) 直交性がある列の組み合わせを調べる

以上、直交表の列の作り方を解説し、無数あることを紹介しました。自分でも試しに作ってみましょう。新たな発見があります。

## 直交表の交互作用がある列は素数の水準系だけ

### 【1】【本記事限定】直交表の交互作用がある列は素数の水準系しかない理由

素数ではない水準系では、交互作用の列どうしが直交性を持たないから

直交性の各列どおしの直交性の調べ方は、本冊子の「【本記事限定】直交表の種類は無数にある【必見】」に解説した通り、互いの列の各水準に相手の全水準が割当てられていることです。

直交表の水準の数について、直交性を求める表記に変えて、まずは内積=0 を計算し、さらに、互いの列の各水準に相手の全水準が割当てられているかを確認します。

直交表は水準数と実験回数を1つに決めた際、複数のパターンがあります。特に交互作用の列が複数パターン分けできます。

#### ●3水準の場合

a,	b,	a+b,	a+2b
a,	b,	a+b,	2a+b

#### ●4水準の場合

a,	b,	a+b,	a+2b,	a+3b
a,	b,	a+b,	2a+b,	3a+b
a,	b,	a+2b,	2a+2b,	3a+2b
a,	b,	2a+b,	2a+2b,	2a+3b

#### ●5水準の場合

a,	b,	a+b,	a+2b,	a+3b,	a+4b
a,	b,	a+b,	2a+b,	3a+b,	4a+b
a,	b,	a+2b,	2a+2b,	3a+2b,	4a+2b
a,	b,	2a+b,	2a+2b,	2a+3b,	2a+4b

…と交互作用の列を書き出すことができます。

### 【2】直交表の水準の数が素数の場合

交互作用の列どおしは直交性をもつので、直交表に使うことができます。

#### ●3水準の場合

a,	b,	a+b,	a+2b
a,	b,	a+b,	2a+b

#### ●5水準の場合

a,	b,	a+b,	a+2b,	a+3b,	a+4b
a,	b,	a+b,	2a+b,	3a+b,	4a+b
a,	b,	a+2b,	2a+2b,	3a+2b,	4a+2b
a,	b,	2a+b,	2a+2b,	2a+3b,	2a+4b

**【3】直交表の水準の数が素数でない場合**

互いの交互作用の列で、直交性をもたないものがあります。

●4水準の場合

① a, b, a+b, a+2b, a+3b

② a, b, a+b, 2a+b, 3a+b

と書きましたが、①は a と a+2b, a+b と a+3b が互いに直交しません。②は b と 2a+b, a+b と 3a+b が互いに直交しません。

★直交表  $L_{16}(4^5)$ について

直交表  $L_{16}(4^5)$ があります。この 5 列はどうやって作ったのか？ 交互作用の列が活かさないため、2 列は 2 因子の a, b で、残り 4 列は機械的に直交するパターンを持ってきています。つまり、交互作用列は割り付けることができません。素数ではない水準系を使うとき、交互作用は割り当てられない点に注意してください。

水準は素数、2,3,5,7,11 がよく、4,6,8,9 は注意して直交表を使ってください。  
計算の手間からいえば、水準数は多くても 5 くらいまででしょう。

以上、交互作用の列を含む直交表を作るには、水準の数は素数が良いことを解説しました。

【1】データの構造式から分散分析を理解する

(1) 直交表を繰返し使う場合のデータの構造式

どんな実験計画法も、データの構造式から本質を理解しましょう。

あとで、3 因子の直交表 L<sub>27</sub>を使った事例を解説します。3 因子のデータの構造式を考えます。直交表を1回だけ使う場合と、繰返し使う場合でデータの構造式が少し変わります。

●直交表を1回だけ使う場合

$$x_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_k + (\alpha\beta)_{ij} + (\alpha\gamma)_{ik} + (\beta\gamma)_{jk} + \varepsilon_{ijk}$$

●直交表を繰返し使う場合

$$x_{ijkl} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_k + (\alpha\beta)_{ij} + (\alpha\gamma)_{ik} + (\beta\gamma)_{jk} + \varepsilon_{(1)ijk} + \varepsilon_{(2)ijkl}$$

と繰返しの分の残差 $\varepsilon_{(2)ijkl}$ が追加され、添字がijk から ijkl に増えます。

(2) 残差の分散の期待値を計算

各平均の式をまとめます。残差が2種類あるので分割法に似た式になります。

本冊子【分割法(2因子1段分割)の分散分析・区間推定が解ける【必見】】

- $\bar{x}_{i...} = \mu + \alpha_i + \overline{\varepsilon_{(1)i...}} + \overline{\varepsilon_{(2)i...}}$
- $\bar{x}_{.j..} = \mu + \beta_j + \overline{\varepsilon_{(1).j.}} + \overline{\varepsilon_{(2).j..}}$
- $\bar{x}_{..k.} = \mu + \gamma_k + \overline{\varepsilon_{(1)..k.}} + \overline{\varepsilon_{(2)..k.}}$
- $\bar{x}_{ij..} = \mu + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} + \overline{\varepsilon_{(1)ij.}} + \overline{\varepsilon_{(2)ij..}}$
- $\bar{x}_{i.k.} = \mu + \alpha_i + \gamma_k + (\alpha\gamma)_{ik} + \overline{\varepsilon_{(1)i.k.}} + \overline{\varepsilon_{(2)i.k.}}$
- $\bar{x}_{.jk.} = \mu + \beta_j + \gamma_k + (\beta\gamma)_{jk} + \overline{\varepsilon_{(1).jk.}} + \overline{\varepsilon_{(2).jk.}}$
- $\bar{\bar{x}} = \mu + \bar{\varepsilon}$

-	$\bar{x}_{i...}$	$\bar{x}_{.j..}$	$\bar{x}_{..k.}$	$\bar{x}_{ij..}$	$\bar{x}_{i.k.}$	$\bar{x}_{.jk.}$	$\bar{x}_{ijk.}$	$x_{ijkl}$	$\bar{\bar{x}}$
S <sub>A</sub>	1								-1
S <sub>B</sub>		1							-1
S <sub>C</sub>			1						-1
S <sub>A×B</sub>	-1	-1		1					1
S <sub>A×C</sub>	-1		-1		1				1
S <sub>B×C</sub>		-1	-1			1			1
S <sub>ε(1)</sub>	1	1	1	-1	-1	-1	1		-1
S <sub>ε(2)</sub>							-1	1	
S <sub>T</sub>								1	-1

●残差 ε (1)、ε (2)の平方和の期待値

残差 ε (1)

$$E[S_{\varepsilon(1)}] = E[\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^c \sum_{l=1}^d (\bar{x}_{ijkl} - \bar{x}_{ij..} - \bar{x}_{i.k.} - \bar{x}_{.jk.} + \bar{x}_{i...} + \bar{x}_{.j..} + \bar{x}_{..k.} - \bar{\bar{x}})^2]$$

$$= E[\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^c \sum_{l=1}^d ((*1) + (*2))^2]$$

$$(*1) = (\varepsilon_{(1)ijk} - \overline{\varepsilon_{(1)ij.}} - \overline{\varepsilon_{(1).jk.}} - \overline{\varepsilon_{(1)i.k.}} + \overline{\varepsilon_{(1)i...}} + \overline{\varepsilon_{(1).j..}} + \overline{\varepsilon_{(1)..k.}} - \overline{\varepsilon_{(1)}})$$

$$(*2) = (\overline{\varepsilon_{(2)ijkl}} - \overline{\varepsilon_{(2)ij..}} - \overline{\varepsilon_{(2).jk.}} - \overline{\varepsilon_{(2)i.k.}} + \overline{\varepsilon_{(2)i...}} + \overline{\varepsilon_{(2).j..}} + \overline{\varepsilon_{(2)..k.}} - \overline{\varepsilon_{(2)}})$$

残差  $\varepsilon(2)$

$$E[S_{\varepsilon(2)}] = E[\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^c \sum_{l=1}^d (x_{ijkl} - \bar{x}_{ijk})^2] = E[\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^c \sum_{l=1}^d (\varepsilon_{(2)ijkl} - \bar{\varepsilon}_{(2)ijk})^2]$$

本冊子、【本記事限定】残差  $e$  の分散の期待値の導出がわかる】を参考ください。

結果は、 $E[S_{\varepsilon(1)}] = d(a-1)(b-1)(c-1)\sigma_{e(1)}^2 + (a-1)(b-1)(c-1)\sigma_{e(2)}^2$

$E[S_{\varepsilon(2)}]$  の導出は、次のように変形して求めます。

$$(\varepsilon_{(2)ijkl} - \bar{\varepsilon}_{(2)}) = (\varepsilon_{(2)ijkl} - \bar{\varepsilon}_{(2)ijk}) + (\bar{\varepsilon}_{(2)ijk} - \bar{\varepsilon}_{(2)})$$

$(\varepsilon_{(2)ijkl} - \bar{\varepsilon}_{(2)})$  と  $(\bar{\varepsilon}_{(2)ijk} - \bar{\varepsilon}_{(2)})$  は次のように分散を定義します。

$$\cdot \sigma_{e(2)}^2 = E\left[\frac{\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^c \sum_{l=1}^d (\varepsilon_{(2)ijkl} - \bar{\varepsilon}_{(2)})^2}{abcd-1}\right]$$

$$\cdot \frac{\sigma_{e(2)}^2}{d} = E\left[\frac{\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^c (\bar{\varepsilon}_{(2)ijk} - \bar{\varepsilon}_{(2)})^2}{abc-1}\right]$$

結果は、 $E[S_{\varepsilon(2)}] = abc(d-1)\sigma_{e(2)}^2$

### (3) 分散分析表をまとめる

—	$\phi$	E[V]	—	$\phi$	E[V]
A	$a-1$	$\sigma_{e(2)}^2 + d\sigma_{(1)}^2 + bcd\sigma_A^2$	A×C	$(a-1)(c-1)$	$\sigma_{e(2)}^2 + d\sigma_{(1)}^2 + bd\sigma_{A\times C}^2$
B	$b-1$	$\sigma_{e(2)}^2 + d\sigma_{(1)}^2 + acd\sigma_B^2$	B×C	$(b-1)(c-1)$	$\sigma_{e(2)}^2 + d\sigma_{(1)}^2 + ad\sigma_{B\times C}^2$
C	$c-1$	$\sigma_{e(2)}^2 + d\sigma_{(1)}^2 + abd\sigma_C^2$	e(1)	$(a-1)(b-1)(c-1)$	$\sigma_{e(2)}^2 + d\sigma_{(1)}^2$
A×B	$(a-1)(b-1)$	$\sigma_{e(2)}^2 + d\sigma_{(1)}^2 + cd\sigma_{A\times B}^2$	e(2)	$abc(d-1)$	$\sigma_{e(2)}^2$
—	—	—	T	$abcd-1$	—

### 【2】直交表を繰返し使う場合の注意点がわかる

#### (1) 直交表全列の平方和の総和 ≤ 総平方和

直交表の列をすべてみると、3 因子の場合は、A,B,C,A×B,A×C,B×C,e(≡A×B×C)の 7 種類です。

つまり、e(2)は直交表からはみ出ることになり直交表全列の平方和の総和は全体の平方和の総和になりません。

直交表全列の平方和の総和を  $S_T$  とします。

$$S_T = S_A + S_B + S_C + S_{A\times B} + S_{A\times C} + S_{B\times C} + S_{e(1)}$$

ですが、

$$S_T = S_T + S_{e(2)}$$

となります。

つまり、 $S_T \leq S_T$  に注意しましょう。なお、 $S_{e(2)}=0$  なら、両者は一致します。

$S_{e(2)}=0$  とは、繰返しによるデータのズレが無いことですから、同じデータを繰り返した場合が考えられます。

下表にまとめます。黄色枠が直交表からはみ出る部分です。

—	直交表	$\phi$	—	直交表	$\phi$
A	○	$a - 1$	B×C	○	$(b - 1)(c - 1)$
B	○	$b - 1$	e(1)	○	$(a - 1)(b - 1)(c - 1)$
C	○	$c - 1$	T'(ABC)計	○	$abc - 1$
A×B	○	$(a - 1)(b - 1)$	e(2)	×	$abc(d - 1)$
A×C	○	$(a - 1)(c - 1)$	T(ABCD)計	×	$abcd - 1$

よって、 $S_T$ は直交表または直交表以外から導出。 $S_T$ は直交表以外から導出する必要があります。

(2)  $S_T$ の個別の求め方<

直交表の全列の平方和を総和すれば導出できますが、直接求めることも可能です。

$T'$  は ABC と表記し、 $T$  は ABCD と表記しました。つまり、

$S_{T'} = S_{ABC}$  ( $S_{A \times B \times C}$  ではない)

$S_T = S_{ABCD}$  ( $S_{A \times B \times C \times D}$  ではない)

です。

### 【3】直交表 L27 の事例

直交表 L27 にて、3 回繰り返した場合の分散分析をしましょう。平方和  $S_T$  の導出も解説します。

(1) 直交表 L27 を使って実験

データを用意します。

No	x1	x2	x3	計	No	x1	x2	x3	計
1	14	20	22	56	15	26	14	12	52
2	24	21	17	62	16	19	21	27	67
3	23	22	26	71	17	24	19	24	67
4	27	23	19	69	18	20	24	33	77
5	25	22	27	74	19	15	24	33	72
6	19	14	20	53	20	10	27	30	67
7	14	19	10	43	21	20	15	30	65
8	16	18	27	61	22	19	22	29	70
9	19	24	31	74	23	19	15	19	53
10	22	20	26	68	24	29	25	19	73
11	27	26	15	68	25	12	30	28	70
12	28	22	16	66	26	27	23	10	60
13	12	23	29	64	27	20	27	30	77
14	24	23	10	57	計	554	583	619	1756

直交表に割当てます。

行/列	1	2	...	13	データ1	データ2	データ3
1	1	1	...	1	14	20	22
...	...	...	...	...	...	...	...
27	3	3	...	2	20	27	30
成分	a		...	a	計554	計583	計619
		b	...	2b	-	-	-
			...	2c	-	-	-

各列の総和と平方和を算出します。

列	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
割当	A	B	A×B	A×B	C	A×C	A×C	B×C	B×C	e(1)	e(1)	e(1)	e(1)
1	563	595	596	569	579	543	575	562	574	567	608	611	586
2	586	565	605	611	569	611	604	628	580	600	555	555	557
3	607	596	555	576	608	602	577	566	602	589	593	590	613
計	1756	1756	1756	1756	1756	1756	1756	1756	1756	1756	1756	1756	1756
S	35.877	22.988	52.617	37.506	30.395	101.06	19.432	101.43	16.099	20.914	55.284	59.284	58.099

なお、全列の平方和の総和は  
 $35.88+22.99+\dots+58.09=610.99$

(2) 総和 T の平方和と残差 e(2)の平方和の導出  
 総平方和  $S_T$ , 直交表の総平方和  $S_{T'}$  と残差 e(2)の平方和  $S_{e(2)}$ を導出します。

①  $S_T$  の導出  
 平方和の定義どおり、  
 $S_T = 14^2 + 20^2 + \dots + 22^2 - CT$   
 $CT = 1756^2 / 81 = 38068.37$   
 $S_T = 40730 - 38068.37 = 2661.65$

②  $S_{T'}$  の導出  
 本記事で初めての平方和ですが、直交表から  
 $S_{T'} = S_{ABC}$   
 とわかります。  
 ABC については各回のデータについて、繰返し 3 回分の合計について、平方和を導出すればよいです。

$$S_{T'} = \frac{\sum_{ijk}^{abc} (x_{ijk1} + \dots + x_{ijk3})^2}{3 (= \text{繰返し数})} - CT = \frac{(14+20+22)^2 + (24+21+17)^2 + \dots + (20+27+30)^2}{3 (= \text{繰返し数})} - C = 38679.33 - 38068.35 = 610.99$$

全列の平方和の総和と一致します。

③  $S_{e(2)}$  の導出  
 $S_T$  と  $S_{T'}$  の差分となります。  
 $S_{e(2)} = S_T - S_{T'} = 2661.65 - 610.99 = 2050.67$

(3) 分散分析の結果  
 結果をまとめます。直交表 L27 を活用しながら、 $S_T$  と  $S_{e(2)}$  は独自で導出する点に注意が必要です。

-	自由度		平方和S	V	F	
A	a-1	2	35.877	17.938	$V_A/V_{e(1)}$	0.929
B	b-1	2	22.988	11.494	$V_B/V_{e(1)}$	0.596
C	c-1	2	30.395	15.198	$V_C/V_{e(1)}$	0.787
A×B	(a-1)(b-1)	4	90.123	22.531	$V_{A×B}/V_{e(1)}$	1.167
A×C	(a-1)(c-1)	4	120.494	30.123	$V_{A×C}/V_{e(1)}$	1.561
B×C	(b-1)(c-1)	4	156.716	39.179	$V_{B×C}/V_{e(1)}$	2.030
e(1)	(a-1)(b-1)(c-1)	8	154.395	19.299	$V_{e(1)}/V_{e(2)}$	0.508
T'	abc-1	26	610.988	-	-	-
e(2)	abc(d-1)	54	2050.667	37.975	-	-
T	abcd-1	80	2661.654	-	-	-

以上、直交表を繰返し使う場合の分散分析について解説しました。

【残差 e の分散の期待値の導出を詳しく解説する】

- ① 二元配置実験の場合
- ② 三元配置実験の場合
- ③ 分割法の場合(残差が複数ある場合)

【分散分析の期待値 E[V]の導出テクニック】

- ・プーリングなしの場合のデータ構造式で E[V]を導出
- ・残差 e の分散期待値を求める基本パターンがある
- ・プーリングがあればそのまま E[V]を加算する

この上の 3 つの必勝パターンで解説していきます。実験によっては、無視やプーリングする効果がありますが、一旦全効果を書き出してそれぞれの E[V]を導出します。

なお、プーリングがある場合については、関連記事で解説しています。

【関連記事】実験計画法のプーリングがわかる

<https://qcplanets.com/method/doe/pooling/>

【1】二元配置実験の場合

(1) プーリングなしの場合のデータ構造式で E[V]を導出  
データの構造式を書き出します。

$$x_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \varepsilon_{ij}$$

次に、平方和を求める式に書き直します。

$$(x_{ij} - \bar{x}) = (\bar{x}_{i\cdot} - \bar{x}) + (\bar{x}_{\cdot j} - \bar{x}) + (x_{ij} - \bar{x}_{i\cdot} - \bar{x}_{\cdot j} + \bar{x})$$

(右辺)最後の項が残差 e に関する式ですね。

(2) 残差 e の分散期待値を求める基本パターンがある  
残差 e の平方和の期待値を導出します。

$$\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b (x_{ij} - \bar{x}_{i\cdot} - \bar{x}_{\cdot j} + \bar{x})^2$$

$x \rightarrow \varepsilon$ へ変わります。

$$\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b (\varepsilon_{ij} - \bar{\varepsilon}_{i\cdot} - \bar{\varepsilon}_{\cdot j} + \bar{\varepsilon})^2$$

【残差 e の分散期待値を求める基本パターン】

そのまま 2 乗を展開せずに、全体から残りを引くように式を作る

どういう意味か、式を作ります。実は、そのまま 2 乗を展開しても、 $E[V_e] = \sigma_e^2$ になりませんでした。私なりに、 $E[V_e] = \sigma_e^2$ へ誘導できる方法を本記事で紹介します。

$$(\varepsilon_{ij} - \bar{\varepsilon}_{i\cdot} - \bar{\varepsilon}_{\cdot j} + \bar{\varepsilon}) \text{ (=A)とします)を}$$

$$(\varepsilon_{ij} - \bar{\varepsilon}) = (A) + (\bar{\varepsilon}_{i\cdot} - \bar{\varepsilon}) + (\bar{\varepsilon}_{\cdot j} - \bar{\varepsilon}) \text{と書き換えます。}$$

$$E[\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b (\varepsilon_{ij} - \bar{\varepsilon})^2] = E[\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b (A)^2] + E[\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b (\bar{\varepsilon}_{i\cdot} - \bar{\varepsilon})^2] + E[\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b (\bar{\varepsilon}_{\cdot j} - \bar{\varepsilon})^2]$$

次に、期待値を仮定します。

$$(あ)ij \text{ については、 } \sigma_e^2 = E[\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \frac{(\varepsilon_{ij} - \bar{\varepsilon})^2}{ab-1}]$$

$$(い)i \text{ については、 } \frac{\sigma_e^2}{b} = E[\sum_{i=1}^a \frac{(\bar{\varepsilon}_i - \bar{\varepsilon})^2}{a-1}]$$

両辺  $b$  倍すると、 $\sigma_e^2 = E[\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \frac{(\bar{\varepsilon}_i - \bar{\varepsilon})^2}{a-1}]$

$$(う)j \text{ については、 } \frac{\sigma_e^2}{a} = E[\sum_{j=1}^b \frac{(\bar{\varepsilon}_j - \bar{\varepsilon})^2}{b-1}]$$

両辺  $a$  倍すると、 $\sigma_e^2 = E[\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \frac{(\bar{\varepsilon}_j - \bar{\varepsilon})^2}{b-1}]$

を活用します。期待値の式に戻ります。

$$E[\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b (\varepsilon_{ij} - \bar{\varepsilon})^2] = \underbrace{E[\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b (A)^2]}_{\text{①}} + \underbrace{E[\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b (\bar{\varepsilon}_i - \bar{\varepsilon})^2]}_{\text{②}} + \underbrace{E[\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b (\bar{\varepsilon}_j - \bar{\varepsilon})^2]}_{\text{③}}$$

求めたい②は①-③-④ですから、

$$E[\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b (A)^2] = ((ab - 1) - (a - 1) - (b - 1))\sigma_e^2 = (a - 1)(b - 1)\sigma_e^2$$

となり、残差  $e$  の自由度  $(a - 1)(b - 1)$  に  $\sigma_e^2$  を掛けた結果となります。

**【2】三元配置実験の場合**

(1) プーリングなしの場合のデータ構造式で  $E[V]$  を導出  
データの構造式を書き出します。

$$x_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_k + (\alpha\beta)_{ij} + (\beta\gamma)_{jk} + (\alpha\gamma)_{ik} + \varepsilon_{ijk}$$

次に、平方和を求める式に書き直し、表にまとめます。

-	$\bar{x}_{i..}$	$\bar{x}_{.j.}$	$\bar{x}_{..k}$	$\bar{x}_{ij.}$	$\bar{x}_{i.k}$	$\bar{x}_{.jk}$	$x_{ijk}$	$\bar{\bar{x}}$
$\alpha_i$	1							-1
$\beta_j$		1						-1
$\gamma_k$			1					-1
$(\alpha\beta)_{ij}$	-1	-1		1				1
$(\beta\gamma)_{jk}$		-1	-1		1			1
$(\alpha\gamma)_{ik}$	-1		-1			1		1
$\varepsilon_{ijk}$	1	1	1	-1	-1	-1	1	-1

上表の黄色部の縦の和が残差  $e$  に関する式ですね。

(2) 残差  $e$  の分散期待値を求める基本パターンがある  
残差  $e$  の平方和の期待値を導出します。

$$\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^c (x_{ijk} - \bar{x}_{ij.} - \bar{x}_{i.k} - \bar{x}_{.jk} + \bar{x}_{i..} + \bar{x}_{.j.} + \bar{x}_{..k} - \bar{\bar{x}})^2$$

$x \rightarrow \varepsilon$  へ変わります。

$$\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^c (\varepsilon_{ijk} - \bar{\varepsilon}_{ij.} - \bar{\varepsilon}_{i.k} - \bar{\varepsilon}_{.jk} + \bar{\varepsilon}_{i..} + \bar{\varepsilon}_{.j.} + \bar{\varepsilon}_{..k} - \bar{\bar{\varepsilon}})^2$$

**【残差  $e$  の分散期待値を求める基本パターン】**

そのまま 2 乗を展開せずに、全体から残りを引くように式を作る

$$(\varepsilon_{ijk} - \bar{\varepsilon}_{ij.} - \bar{\varepsilon}_{i.k} - \bar{\varepsilon}_{.jk} + \bar{\varepsilon}_{i..} + \bar{\varepsilon}_{.j.} + \bar{\varepsilon}_{..k} - \bar{\bar{\varepsilon}}) = \underbrace{(B)}_{\text{①}} + \underbrace{(\bar{\varepsilon}_{ij.} - \bar{\varepsilon}_{i..} - \bar{\varepsilon}_{.j.} + \bar{\bar{\varepsilon}})}_{\text{②}} + \underbrace{(\bar{\varepsilon}_{i.k} - \bar{\varepsilon}_{i..} - \bar{\varepsilon}_{.k} + \bar{\bar{\varepsilon}})}_{\text{③}} + \underbrace{(\bar{\varepsilon}_{.jk} - \bar{\varepsilon}_{.j.} - \bar{\varepsilon}_{..k} + \bar{\bar{\varepsilon}})}_{\text{④}}$$

$$+ \underbrace{(\bar{\varepsilon}_{i..} - \bar{\bar{\varepsilon}})}_{\text{⑤}} + \underbrace{(\bar{\varepsilon}_{.j.} - \bar{\bar{\varepsilon}})}_{\text{⑥}} + \underbrace{(\bar{\varepsilon}_{..k} - \bar{\bar{\varepsilon}})}_{\text{⑦}}$$

と分解します。

平方和の期待値を導出します。式が長くなるので簡単に書きます。

$$\begin{aligned} E[\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^c (\textcircled{1})^2] &= E[\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^c ((B) + \textcircled{2} + \textcircled{3} + \textcircled{4} + \textcircled{5} + \textcircled{6} + \textcircled{7})^2] \\ &= E[\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^c (\textcircled{1})^2] + E[\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^c ((B))^2] + E[\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^c (\textcircled{2})^2] \\ &+ E[\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^c (\textcircled{3})^2] + E[\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^c (\textcircled{4})^2] + E[\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^c (\textcircled{5})^2] \\ &+ E[\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^c (\textcircled{6})^2] + E[\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^c (\textcircled{7})^2] \end{aligned}$$

(右辺)はすべて2乗項のみが残り、その他の項は0になります。平方和の分解ができる理由です。

次に分散の期待値を仮定します。

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad \sigma_e^2 &= E\left[\frac{\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^c (\varepsilon_{ijk} - \bar{\varepsilon})^2}{abc-1}\right] & \textcircled{2} \quad \frac{\sigma_e^2}{c} &= E\left[\frac{\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b (\varepsilon_{i\cdot} - \bar{\varepsilon}_{i\cdot} - \bar{\varepsilon}_{\cdot j} + \bar{\varepsilon})^2}{(a-1)(b-1)}\right] \\ \textcircled{3} \quad \frac{\sigma_e^2}{a} &= E\left[\frac{\sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^c (\varepsilon_{\cdot jk} - \bar{\varepsilon}_{\cdot j} - \bar{\varepsilon}_{\cdot k} + \bar{\varepsilon})^2}{(b-1)(c-1)}\right] & \textcircled{4} \quad \frac{\sigma_e^2}{b} &= E\left[\frac{\sum_{i=1}^a \sum_{k=1}^c (\varepsilon_{i\cdot k} - \bar{\varepsilon}_{i\cdot} - \bar{\varepsilon}_{\cdot k} + \bar{\varepsilon})^2}{(a-1)(c-1)}\right] \\ \textcircled{5} \quad \frac{\sigma_e^2}{bc} &= E\left[\frac{\sum_{i=1}^a (\bar{\varepsilon}_{i\cdot} - \bar{\varepsilon})^2}{(a-1)}\right] & \textcircled{6} \quad \frac{\sigma_e^2}{ac} &= E\left[\frac{\sum_{j=1}^b (\bar{\varepsilon}_{\cdot j} - \bar{\varepsilon})^2}{(b-1)}\right] & \textcircled{7} \quad \frac{\sigma_e^2}{ab} &= E\left[\frac{\sum_{k=1}^c (\bar{\varepsilon}_{\cdot k} - \bar{\varepsilon})^2}{(c-1)}\right] \end{aligned}$$

①~⑦について(右辺)のΣが $\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^c$  になるように両辺 a,b,c 倍します。

$$(abc-1)\sigma_e^2 = \textcircled{1} (B) + \textcircled{2} (a-1)(b-1)\sigma_e^2 + \textcircled{3} (b-1)(c-1)\sigma_e^2 + \textcircled{4} (a-1)(c-1)\sigma_e^2 + \textcircled{5} (a-1)\sigma_e^2 + \textcircled{6} (b-1)\sigma_e^2 + \textcircled{7} (c-1)\sigma_e^2$$

よって、

$$(B) = (a-1)(b-1)(c-1)\sigma_e^2$$

となり、残差 e の自由度  $(a-1)(b-1)(c-1)$  に  $\sigma_e^2$  を掛けた結果となります。

### 【3】 分割法の場合(残差が複数ある場合)

(1) 分割法、乱塊法などのデータの構造式のつくり方のポイント

1. プーリングなしの三元配置実験のデータ構造式を作る
2. 反復などの変量因子を決めて、実際のデータの構造式を作る
3. 最初はプーリングせずに、残差 e の平方和・分散の期待値を導出する

この3つの方法で、どんな難しいデータの構造式が来ても、分散の期待値  $E[V]$  は計算できます。

(2) プーリングなしの三元配置実験のデータ構造式を作る

データの構造式を書き出します。

$$x_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_k + (\alpha\beta)_{ij} + (\beta\gamma)_{jk} + (\alpha\gamma)_{ik} + \varepsilon_{ijk}$$

(3) プーリング有りの分割法のデータ構造式を作る

次に、反復などの変量因子を決めます。反復因子  $\gamma_k$ 、1次単位の残差  $\varepsilon_{(1)ik}$ 、2次単位の残差  $\varepsilon_{(2)ijk}$  とします。

なお、

- $\varepsilon_{(1)ik} = (\alpha\gamma)_{ik}$

- $\varepsilon_{(2)ijk} = \varepsilon_{ijk}$

と交絡しています。つまり、同じデータを違う変数に変えたという意味です。

2分割の分割法+乱塊法を表現するデータの構造式を作ります。

$$x_{ijk} = \mu + \gamma_k + \alpha_i + \beta_j + \varepsilon_{(1)ik} + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} + (\beta\gamma)_{jk} + \varepsilon_{(2)ijk}$$

(4) 最初はプーリングせずに、残差 e の平方和・分散の期待値を導出する  
 分割法+乱塊法の場合は、残差が複数あり、複雑です。しかも、調べない効果をプーリングするとさらに複雑になります。まずはプーリングしない場合の導出を見ましょう。プーリングは関連記事で理解しましょう。

【関連記事】実験計画法のプーリングがわかる  
<https://qcplanets.com/method/doe/pooling/>  
 【本冊子】分割法(3 因子 1 段分割)の分散分析・区間推定が解ける【必見】

各効果の平方和の期待値を導出しましょう。どの効果も下の同一の式を使います。

$S_{\star} = E[\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^c (*)^2]$  各効果における  $\star$  と  $*$  について下表にまとめます。

★	*	* の式
C	$\bar{x}_{..k} - \bar{x}$	$(\gamma_k - \bar{r}) + (\overline{\varepsilon_{(1)\cdot k}} - \overline{\varepsilon_{(1)}}) + (\overline{\varepsilon_{(2)\cdot k}} - \overline{\varepsilon_{(2)}})$
A	$\bar{x}_{i\cdot\cdot} - \bar{x}$	$\alpha_i + (\overline{\varepsilon_{(1)i\cdot}} - \overline{\varepsilon_{(1)}}) + (\overline{\varepsilon_{(2)i\cdot}} - \overline{\varepsilon_{(2)}})$
e(1)(≡A×C)	$\bar{x}_{i\cdot k} - \bar{x}_{i\cdot\cdot} - \bar{x}_{..k} + \bar{x}$	$(\varepsilon_{(1)ik} - \overline{\varepsilon_{(1)i\cdot}} - \overline{\varepsilon_{(1)\cdot k}} + \overline{\varepsilon_{(1)}})$ $+ (\varepsilon_{(2)ik} - \overline{\varepsilon_{(2)i\cdot}} - \overline{\varepsilon_{(2)\cdot k}} + \overline{\varepsilon_{(2)}})$
B	$\bar{x}_{\cdot j} - \bar{x}$	$\beta_j + (\overline{\varepsilon_{(2)\cdot j}} - \overline{\varepsilon_{(2)}})$
A×B	$\bar{x}_{ij\cdot} - \bar{x}_{i\cdot\cdot} - \bar{x}_{\cdot j} + \bar{x}$	$(\alpha\beta)_{ij} + (\overline{\varepsilon_{(2)ij\cdot}} - \overline{\varepsilon_{(2)i\cdot}} - \overline{\varepsilon_{(2)\cdot j}} + \overline{\varepsilon_{(2)}})$
B×C	$\bar{x}_{\cdot jk} - \bar{x}_{\cdot j} - \bar{x}_{..k} + \bar{x}$	$(\beta\gamma)_{jk} + (\overline{\varepsilon_{(2)\cdot jk}} - \overline{\varepsilon_{(2)\cdot j}} - \overline{\varepsilon_{(2)\cdot k}} + \overline{\varepsilon_{(2)}})$
e(2)(≡A×B×C)	$x_{ijk} - \bar{x}_{ij\cdot} - \bar{x}_{i\cdot k} - \bar{x}_{\cdot jk}$ $+ \bar{x}_{i\cdot\cdot} + \bar{x}_{\cdot j} + \bar{x}_{..k} - \bar{x}$	$\varepsilon_{(2)ijk} - \overline{\varepsilon_{(2)ij\cdot}} - \overline{\varepsilon_{(2)i\cdot k}} - \overline{\varepsilon_{(2)\cdot jk}}$ $+ \overline{\varepsilon_{(2)i\cdot\cdot}} + \overline{\varepsilon_{(2)\cdot j}} + \overline{\varepsilon_{(2)\cdot k}} - \overline{\varepsilon_{(2)}}$

e(1)も e(2)の式は非常に複雑ですが、  
 $e_{ij\cdot}e_{i\cdot k}e_{\cdot jk} + e$  という形になっていますね。  
 これはさっきやりましたね。平方和の期待値が  $(O-1)(\Delta-1)\sigma_e^2$  になるパターンです。

$E[S_{e1}]$  は  
 e(1)について  $(O-1)(\Delta-1)\sigma_e^2$  になるパターンと、  
 e(2)について  $(O-1)(\Delta-1)\sigma_e^2$  になるパターンになるわけです。

また和は、 $\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^c$  です。

e(1)は i,k のみ、e(2)は ijk の添字があります。よって、計算しなくても、

$E[S_{e1}] = b(a-1)(c-1)\sigma_{e(1)}^2 + (a-1)(c-1)\sigma_{e(2)}^2$  となります。

同様に

$E[S_{e2}] = (a-1)(b-1)(c-1)\sigma_{e(2)}^2$

です。これも、本記事で解説済みで、

$abc - 1 = (*) + (a-1)(b-1) + (a-1)(c-1) + (b-1)(c-1) + (a-1) + (b-1) + (c-1)$

まとめると、

$$E[S_{e1}] = b(a-1)(c-1)\sigma_{e(1)}^2 + (a-1)(c-1)\sigma_{e(2)}^2$$

$$E[S_{e2}] = (a-1)(b-1)(c-1)\sigma_{e(2)}^2$$

自由度で割った分散の期待値は、

$$E[V_{e1}] = b\sigma_{e(1)}^2 + \sigma_{e(2)}^2$$

$$E[V_{e2}] = \sigma_{e(2)}^2$$

となり、分割法の分散分析表にいつもある値が出てきます。

(5) プーリングがあれば、そのまま加算する

例えば、先ほどの分割法において、交互作用  $A \times B$  を残差  $e$  にプーリングしたら、残差  $e$  の分散の期待値はどうなるのでしょうか？

自由度も平方和も増えるが、分散の期待値は不変です。

$$E[S_{e2}] = (a-1)(b-1)(c-1)\sigma_{e(2)}^2$$

に交互作用  $A \times B$  の効果分である、

$(\overline{\varepsilon_{(2)ij}} - \overline{\varepsilon_{(2)i\cdot}} - \overline{\varepsilon_{(2)\cdot j}} + \overline{\varepsilon_{(2)}})$  を加算します。

この加算したの自由度と平方和の期待値はそれぞれ

$$\phi(\text{追加分}) = (a-1)(b-1)$$

$$E[S(\text{追加分})] = (a-1)(b-1)\sigma_{e(2)}^2$$

となります。もとの  $E[S_{e2}]$  に合算すると、

$$\phi = ((a-1)(b-1)(c-1) + (a-1)(b-1))$$

$$E[S_{e2}] = ((a-1)(b-1)(c-1) + (a-1)(b-1)) \sigma_{e(2)}^2$$

となり、分散の期待値  $E[V]$  は、

$$E[V_{e2}] = \sigma_{e(2)}^2 \text{ と変わりません。面白いですね。}$$

以上、残差  $e$  の分散の期待値の導出を解説しました。

**【簡単】分散分析表の検定結果とデータの関係が理解できる</div>**

分散分析とデータの特徴を理解しましょう。5つ例を挙げて説明します。

- |                        |
|------------------------|
| ① 分散分析で平方和がすべて0のデータ    |
| ② 主効果のみ平方和が0以上のデータ     |
| ③ 主効果も交互作用も平方和が0以上のデータ |
| ④ 主効果も交互作用も有意であるデータ    |
| ⑤ 主効果も交互作用も有意でないデータ    |

<データ>

二元配置実験の繰返しあり 因子 A(3水準),因子 B(4水準),繰返し3回の計 36 データを対象にします。

-	B1	B2	B3	B4
A1				
A2				
A3				

**【1】分散分析で平方和がすべて0のデータ**

主効果 A,B、交互作用 A×B と残差 e の平方和が0の場合は、どんなデータでしょうか？

①	S	Φ	V	F	F0
A	0	2	0	-	3.4
B	0	3	0	-	3.01
A×B	0	6	0	-	2.51
e	0	24	0	-	
T	0	35	-	-	-

<正解は>

すべて同じデータになっている場合です。

-	B1	B2	B3	B4
A1	30	30	30	30
	30	30	30	30
	30	30	30	30
A2	30	30	30	30
	30	30	30	30
	30	30	30	30
A3	30	30	30	30
	30	30	30	30
	30	30	30	30

差がありませんから、ばらつき成分は一切ありません。この場合は分散分析できません。

【2】主効果のみ平方和が 0 以上のデータ</h2>

主効果 A,B、交互作用 A×B と残差 e の平方和が 0 の場合は、どんなデータでしょうか？

(1) 因子 A だけが平方和があるデータ

②	S	Φ	V	F	F0
A	216	2	108	-	3.4
B	0	3	0	-	3.01
A×B	0	6	0	-	2.51
e	0	24	0	-	
T	216	35	-	-	-

(2) 因子 A も B 平方和があるデータ

②	S	Φ	V	F	F0
A	216	2	108	-	3.4
B	180	3	60	-	3.01
A×B	0	6	0	-	2.51
e	0	24	0	-	
T	396	35	-	-	-

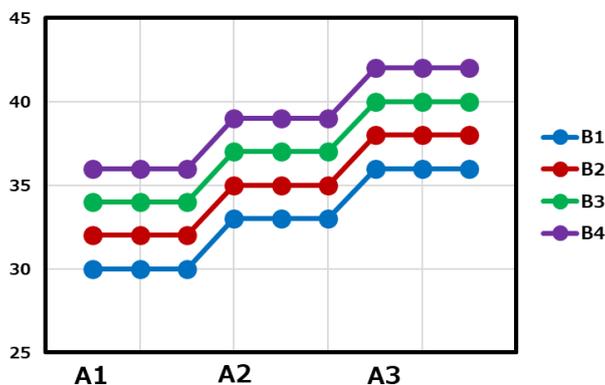
<正解は>

(1) 因子 A の水準ごとにデータが変わるがそれ以外は変化しない場合ですね。

(2) 因子 A、B の各水準にデータが変わるが、それ以外は変化しない場合ですね。

-	B1	B2	B3	B4
A1	30	30	30	30
	30	30	30	30
	30	30	30	30
A2	33	33	33	33
	33	33	33	33
	33	33	33	33
A3	36	36	36	36
	36	36	36	36
	36	36	36	36

-	B1	B2	B3	B4
A1	30	32	34	36
	30	32	34	36
	30	32	34	36
A2	33	35	37	39
	33	35	37	39
	33	35	37	39
A3	36	38	40	42
	36	38	40	42
	36	38	40	42



データの何が変化すると分散分析表が変化したのかをよく眺めてください。

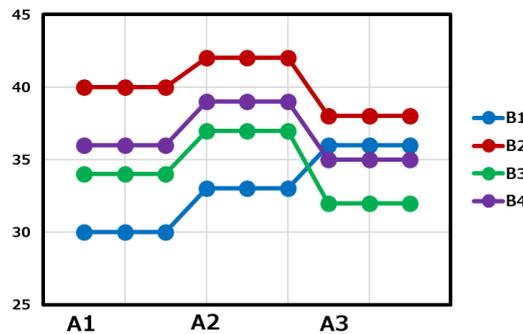
【3】主効果も交互作用も平方和が0以上のデータ

主効果 A,B と交互作用 A×B だけ平方和がある場合、どんなデータでしょうか？

③	S	Φ	V	F	F0
A	55.5	2	27.75	-	3.4
B	254	3	84.67	-	3.01
A×B	86.5	6	14.42	-	2.51
e	0	24	0	-	
T	396	35	-	-	-

交互作用 A×B がばらつきます。緑とオレンジ枠をわざと入れ替えてみました。グラフは右に行くほど高くなっていきましたが、わざと入れ替えたので、ジグザグになっていますね。A と B の関係を交互作用としてみますから、交互作用のばらつきは少ない方が好まれます。

-	B1	B2	B3	B4
A1	30	40	34	36
	30	40	34	36
	30	40	34	36
A2	33	42	37	39
	33	42	37	39
	33	42	37	39
A3	36	38	32	35
	36	38	32	35
	36	38	32	35



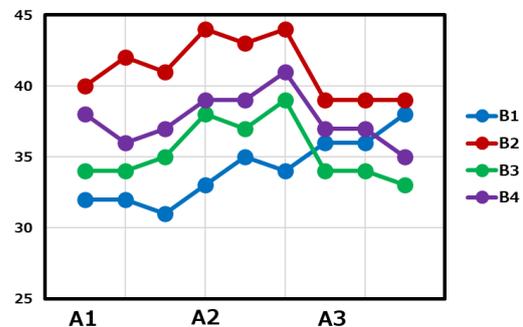
【4】主効果も交互作用も有意であるデータ

主効果 A,B と交互作用 A×B の F 検定が有意なデータとは、どんなデータでしょうか？

主効果 A,B と交互作用 A×B のばらつきが大きく、残差が小さい場合です。

④	S	Φ	V	F	F0
A	56.17	2	28.08	36.11	3.4
B	264.31	3	88.10	113.27	3.01
A×B	65.61	6	10.94	14.06	2.51
e	18.67	24	0.78	-	
T	404.75	35	-	-	-

-	B1	B2	B3	B4
A1	32	40	34	38
	32	42	34	36
	31	41	35	37
A2	33	44	38	39
	35	43	37	39
	34	44	39	41
A3	36	39	34	37
	36	39	34	37
	38	39	33	35



偶発的な誤差が小さいために、残差平方和は小さくなります。その結果、主効果、交互作用ともに F 検定が有意となります。実際、主効果も、交互作用もばらつきが大きく検定が有意なデータはあまり教科書では出てきません。

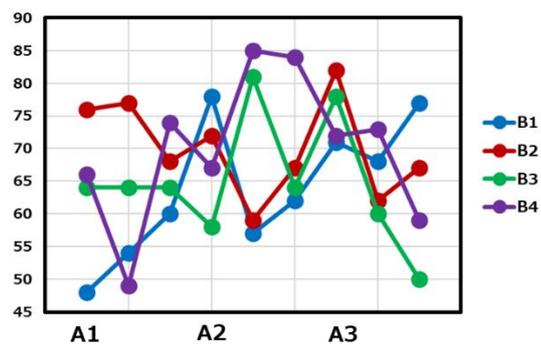
【5】主効果も交互作用も有意でないデータ

主効果も交互作用も有意でないデータは、どんなデータでしょうか？

主効果、交互作用のばらつきよりも、ランダムばらつきの方が大きい場合です。残差平方和が他の平方和と比べて大きいですね。

⑤	S	Φ	V	F	F0
A	226.39	2	113.20	1.33	3.4
B	286.97	3	95.66	1.12	3.01
A×B	786.94	6	131.16	1.54	2.51
e	2046	24	85.25	-	
T	3346.30	35	-	-	-

-	B1	B2	B3	B4
A1	48	76	64	66
	54	77	64	49
	60	68	64	74
A2	78	72	58	67
	57	59	81	85
	62	67	64	84
A3	71	82	78	72
	68	62	60	73
	77	67	50	59



以上、データの変化によって分散分析の結果がどのように変化するかを解説しました。

## 欠測値を推定する方法がわかる【重要】

### 【1】欠測値の処理方法がわかる

#### (1) データを捨てるか推定して入れるか

データを用意します。因子 A(3 水準)と因子 B(4 水準)のデータがあるが、AB22 が欠測してしまい、11 個のデータしかないとします。このままでは分散分析ができません。さて、どうしますか？

—	A1	A2	A3
B1	30	40	50
B2	40	×	60
B3	50	70	80
B4	100	120	130

欠測値があると、繰返し数が異なります。一元配置実験ならば、繰返し数の異なる場合として分散分析できますが、二元以上の配置実験になると分散分析ができません。なぜなら平方和が分解できないからです。

繰返し数が異なる二元配置実験は分散分析ができない理由については、本冊子【繰返し数が異なる場合は一元配置実験だけである理由がわかる】に詳細な計算過程を解説しています。

#### (2) 欠測値の処理方法は、次の 2 つです。

- ① データを捨てる
- ② 欠測値を推定して追加する

##### ① データを捨てる(推奨しない)

下表のように、データを削って分散分析する方法です。

—	A1	A3
B1	30	50
B3	50	80
B4	100	130

でも、推奨しません。理由は

- ・データを削るのはもったいない
- ・データの特性が変化する

からです。データ分析結果が変わってしまうため、推奨しません。

##### ② 欠測値を推定して追加する(推奨)

欠測といっても、1 個か 2 個程度なので、推定値を作って分散分析します。

これなら、測定した全データを活かせるので、分析結果の精度を低下することはありません。

でも、ここで 1 つ疑問が湧きます。

どうやって推定するの？

#### (3) データの推定方法

残差平方和 Se が最小になるように推定値を決める

無二な方法ではなく、都度推定値を考えて算出すればよいですが、ある変数が最小値になる条件(微分=0)を使います。

誤差が大きくなるように気をつけて推定したいことから、残差平方和 Se が最小となる推定値を決めます。

以下、二元配置実験での欠測値の推定方法を解説します。一元配置実験は、本冊子【一元配置実験の平方和の分解ができる【初心者必見】】に詳細な計算過程を解説しています。

**【2】** 二元配置実験(繰返し無し)の場合の欠測値の推定方法がわかる

欠測値の数によらず、解析方法は同じですが、途中経過の式は欠測値の数によって異なるので、個別に解説します。

(1)欠測値 1つの場合

以下のような 2 因子実験を考えます。AB<sub>11</sub> だけ欠測だったとします。

	A <sub>1</sub>	A <sub>2</sub>	...	A <sub>a</sub>	計
B <sub>1</sub>	■	x <sub>21</sub>	...	x <sub>a1</sub>	T'· <sub>1</sub>
B <sub>2</sub>	x <sub>12</sub>	x <sub>22</sub>	...	x <sub>a2</sub>	T· <sub>2</sub>
...	...	...	...	...	...
B <sub>b</sub>	x <sub>1b</sub>	x <sub>2b</sub>	...	x <sub>ab</sub>	T· <sub>b</sub>
計	T'· <sub>1</sub>	T <sub>2·</sub>	...	T <sub>a·</sub>	T'

AB<sub>11</sub> に推定値を入れます。未知数なので x として代入します。

	A <sub>1</sub>	A <sub>2</sub>	...	A <sub>a</sub>	計
B <sub>1</sub>	x	x <sub>21</sub>	...	x <sub>a1</sub>	x+T'· <sub>1</sub>
B <sub>2</sub>	x <sub>12</sub>	x <sub>22</sub>	...	x <sub>a2</sub>	T· <sub>2</sub>
...	...	...	...	...	...
B <sub>b</sub>	x <sub>1b</sub>	x <sub>2b</sub>	...	x <sub>ab</sub>	T· <sub>b</sub>
計	x+T'· <sub>1</sub>	T <sub>2·</sub>	...	T <sub>a·</sub>	x+T'

x だけ増加したことがわかります。次に各平方和を求めます。

$$CT = \frac{1}{ab}(x + T')^2$$

$$ST = x^2 + x_{21}^2 + \dots + x_{ab}^2$$

$$SA = \frac{1}{a}((x + T'_{\cdot 1})^2 + T_{2\cdot}^2 + \dots + T_{a\cdot}^2) - CT$$

$$SB = \frac{1}{b}((x + T'_{\cdot 1})^2 + T_{2\cdot}^2 + \dots + T_{b\cdot}^2) - CT$$

$$Se = ST - SA - SB$$

$$= \{x^2 + x_{21}^2 + \dots + x_{ab}^2\} - \frac{1}{a}((x + T'_{\cdot 1})^2 + T_{2\cdot}^2 + \dots + T_{a\cdot}^2) - \frac{1}{b}((x + T'_{\cdot 1})^2 + T_{2\cdot}^2 + \dots + T_{b\cdot}^2) + \frac{1}{ab}(x + T')^2$$

と式で書けます。

残差平方和 Se が最小( $\frac{dSe}{dx} = 0$ )になるように推定値を決める

$$\frac{dSe}{dx} = 2x - \frac{2}{a}(x + T'_{\cdot 1}) - \frac{2}{b}(x + T'_{\cdot 1}) + \frac{2}{ab}(x + T') = 0$$

整理すると、 $x = \frac{bT'_{\cdot 1} + aT'_{\cdot 1} - T'}{(a-1)(b-1)}$  となります。1 を i,j に変えて一般化します。

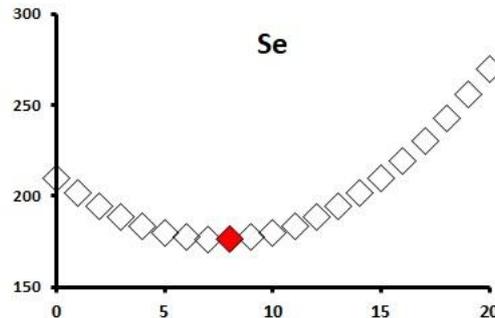
$$x = \frac{bT'_{\cdot i} + aT'_{\cdot j} - T'}{(a-1)(b-1)}$$

下表の場合、AB<sub>11</sub> を推定しましょう。

	A <sub>1</sub>	A <sub>2</sub>	A <sub>3</sub>	A <sub>4</sub>	計
B <sub>1</sub>	x	20	50	60	130
B <sub>2</sub>	50	70	90	110	320
B <sub>3</sub>	70	90	110	130	400
B <sub>4</sub>	150	170	180	200	700
B <sub>5</sub>	210	220	240	260	930
計	480	570	670	760	2480

$x = \frac{bT'_{i.} + aT'_{.j} - T'}{(a-1)(b-1)}$  から、 $a = 4, b = 5, T'_{i.} = 130, T'_{.j} = 480, T = 2480$ を代入すると、  
 $x = 7.5$

グラフで、推定値  $x$  と残差平方和  $Se$  の関係をグラフにすると、  
 確かに  $x=7.5$  付近で残差平方和  $Se$  が最小になっているのがわかります。



### (2) 欠測値 2 つの場合

実は、欠測値 1 つの場合が理解できれば、簡単です。  
 変数を 2 つ( $x, y$ )にしたらいからです。

欠測値が 2 つ場合の残差平方和  $Se$  は、  
 $Se = S_T - S_A - S_B$

$$= \{x^2 + y^2 + x_{21}^2 + \dots + x_{ab}^2\} - \frac{1}{a}((x + T'_{i.})^2 + (y + T'_{i'.})^2 + T_2^2 + \dots + T_a^2) \\ - \frac{1}{b}((x + T'_{.j})^2 + (y + T'_{.j'})^2 + T_2^2 + \dots + T_b^2) + \frac{1}{ab}(x + y + T')^2$$

と、 $y$  を増やせば式が作れます。

残差平方和  $Se$  が最小になるように推定値を決める。

変数が 2 つあるので、偏微分  $\frac{\partial Se}{\partial x} = 0, \frac{\partial Se}{\partial y} = 0$  を満たすように  $x, y$  を決める。

$$\frac{\partial Se}{\partial x} = 2x - \frac{2}{a}(x + T'_{i.}) - \frac{2}{b}(x + T'_{.j}) + \frac{2}{ab}(x + y + T') = 0$$

$$\frac{\partial Se}{\partial y} = 2y - \frac{2}{a}(y + T'_{i'.}) - \frac{2}{b}(y + T'_{.j'}) + \frac{2}{ab}(x + y + T') = 0$$

整理すると、

$$(a-1)(b-1)x + y = bT'_{i.} + aT'_{.j} - T'$$

$$(a-1)(b-1)y + x = bT'_{i'.} + aT'_{.j'} - T'$$

を満たす、 $x, y$  とすればよいです。

### (3) 欠測値 3 つ以上の場合

2 つの場合と同様に  $x, y, z, \dots$  と未知数を用意して残差平方和が最小となるように式を立てます。  
 同様に考えて計算すればよいです。

以上、欠測値がある場合の推定方法を解説しました。

## 実験計画法の水準は等間隔が良い理由がわかる

### 【1】局所管理の原理に反しているから

本記事の結論は、局所管理に反しているからですが、ちゃんと理解した上で結論に結び付けます。

#### (1) 局所管理とは？

関連記事でご確認ください。

【関連記事】【簡単】実験計画法のフィッシャー3原則がすぐわかる方法  
(<https://qcplanets.com/method/doe/fisher/>)

フィッシャーの3原則を簡単にまとめると、下の3点です。

1. 反復：効果と残差を分離させるため
2. 無作為化：ありのままの残差平方和  $S_e$  にするため
3. 局所管理：ありのままの効果の平方和 ( $S_A$  など) にするため

本記事は、局所管理です。

局所管理の注意点は、「適切な水準を用意しないと、水準間による影響が出てしまい、検定の有意性が出やすくなる」です。

有意性は、効果(例えば因子 A)と残差 e との分散比で検定します。ところが、適切な水準にしないと、効果の平方和  $S_A$ 、分散  $V_A$  の値が高くなり、残差 e との分散比  $V_A/V_e$  が高くなります。分散比が高くなると有意性があると判定しやすくなります。言葉で書いてもイメージしづらいので、実際に分散分析しながら局所管理の注意点を理解しましょう。

### 【2】水準が等間隔でない場合の分散分析を調べるとよくわかる

#### (1) 二元配置実験(繰り返し有り)で調べる</h3>

事例として、二元配置実験(繰り返し有り)を持ってきます。

データについて以下の仮定と置きます。

データ値  $z$  は因子 A(変数  $a$ )、B(変数  $b$ )に影響されるとする。データ  $z$  は  $a, b$  の関数であり、 $z=f(a, b)$  とする。

#### (2) 水準が等間隔で実験した場合

実験で入力する変数  $a, b$  は次の通りです。

-	a	-	b
A1	10	B1	5
A2	20	B2	10
A3	30	B3	15
-	-	B4	20

等間隔もしくは等間隔に近い変数を入力したことがわかります。この二元配置実験(繰り返し有り)のデータは下表のようになりました。

$x_{ijk}$	B1	B2	B3	B4	計
A1	11	4	19	19	80
	5	14	7	1	
A2	3	21	15	31	136
	13	9	23	21	
A3	24	15	46	54	264
	10	33	34	48	
計	66	96	144	174	480

各効果の平方和を計算します。

$$\bullet CT = \frac{480^2}{24} = 9600$$

$$\bullet S_T = (11^2 + \dots + 48^2) - CT = 4868$$

$$\bullet S_A = \frac{1}{8}(80^2 + \dots + 264^2) - CT = 2224$$

$$\bullet S_B = \frac{1}{6}(66^2 + \dots + 174^2) - CT = 1164$$

$$\bullet S_{AB} = \frac{1}{2}(16^2 + \dots + 102^2)$$

$$\bullet S_{A \times B} = S_{AB} - S_A - S_B - CT = 856$$

分散分析をまとめます。

効果	S	V	F	F0
A	2224	1112	15.59	3.89
B	1164	388	5.44	3.49
A×B	624	104	1.46	3
e	856	71.33	-	-
T	4868	-	-	-

(3)水準が等間隔にしないで実験した場合 1

極端に変数を変えた場合の分散分析を見ましょう。A3 について a=30→300 に変えた場合、A3 のデータ値が 10 倍に上がったとします。

二元配置実験(繰り返し有り)のデータも変化します。

x <sub>ijk</sub>	B1	B2	B3	B4	計
A1	11	4	19	19	80
	5	14	7	1	
A2	3	21	15	31	136
	13	9	23	21	
A3	240	150	460	540	2640
	100	330	340	480	
計	372	528	864	1092	2856

分散分析の結果を見ましょう。

効果	S	Φ	V	F	F0
A	534448	2	267224	(15.59→)90.31	3.89
B	52824	3	17608	(5.49→)5.95	3.49
A×B	89544	6	14924	(1.46→)5.04	3
e	35506	12	2958.8	-	-
T	712322	23	-	-	-

F 値を見ると因子 A の F 値が高くなったことがわかります。F0 より高いため、有意性があると思いますが、水準を等間隔にしなかった影響の方が強いため、適切な F 検定であるとは言えません。

(4)水準が等間隔にしないで実験した場合 2

極端に変数を変えた場合の分散分析を見ましょう。B4 について b=20→200 に変えた場合、B4 のデータ値が 10 倍に上がったとします。

二元配置実験(繰り返し有り)のデータも変化します。

x <sub>ijk</sub>	B1	B2	B3	B4	計
A1	11	4	19	190	260
	5	14	7	10	
A2	3	21	15	310	604
	13	9	23	210	
A3	24	15	46	540	1182
	10	33	34	480	
計	66	96	144	1740	2046

分散分析の結果を見ましょう。

効果	S	$\Phi$	V	F	F0
A	54271	2	27136	(15.59→)13.78	3.89
B	335897	3	111966	(5.49→)56.87	3.49
A×B	117669	6	19612	(1.46→)9.96	3
e	23626	12	1968.8	-	-
T	531463	23	-	-	-

F 値を見ると因子 B の F 値が高くなったことがわかります。F0 より高いため、有意性があるとしたいのですが、水準を等間隔にしなかった影響の方が強いため、適切な F 検定であるとは言えません。

水準が等間隔でない場合の弊害について、実例を挙げて解説しました。

以上、実験計画法の水準は等間隔が良い理由を解説しました。

●母平均差の区間推定

(平均差)  $\pm t(\varphi_e, \alpha) \sqrt{\frac{V_e}{n_e}}$  ( $\frac{1}{n_e} = \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}$ ) となる理由

●新たに採取するデータを含めた場合の区間推定

(平均)  $\pm t(\varphi_e, \alpha) \sqrt{\frac{V_e}{n_e}}$  ( $\frac{1}{n_e} = 1 + \frac{1}{n_1}$ ) となる理由

を解説します。

【1】区間推定の有効繰返し数  $n_e$  が変化する理由

(1) 母平均差の場合

一元配置実験を使って解説します。データの構造式を書きます。

$$x_{ij} = \mu + \alpha_i + \varepsilon_{ij}$$

次に因子 A について、2つの母平均差を立式します。

$$\mu(A_i) - \mu(A_{i'}) = (\mu + \alpha_i + \bar{\varepsilon}_i) - (\mu + \alpha_{i'} + \bar{\varepsilon}_{i'}) = (\alpha_i - \alpha_{i'}) - (\bar{\varepsilon}_i - \bar{\varepsilon}_{i'})$$

次に分散を求めましょう。

$$V(\mu(A_i) - \mu(A_{i'})) = V((\alpha_i - \alpha_{i'}) - (\bar{\varepsilon}_i - \bar{\varepsilon}_{i'})) = V(\bar{\varepsilon}_i - \bar{\varepsilon}_{i'}) = V(\bar{\varepsilon}_i) + V(\bar{\varepsilon}_{i'})$$

この分散の中の項で分解できる性質があるため、有効繰返し数  $n_e$  の式が変化するので。

$$V(\bar{\varepsilon}_i) = \frac{V_e}{n_a}, \quad V(\bar{\varepsilon}_{i'}) = \frac{V_e}{n_{a'}} \quad \text{より} \quad V = \left(\frac{1}{n_a} + \frac{1}{n_{a'}}\right) V_e = \frac{V_e}{n_e}$$

よって、 $\frac{1}{n_a} + \frac{1}{n_{a'}} = \frac{1}{n_e}$  が成り立ちます。

なお、一元配置実験の場合は  $a = a'$  なので、 $\frac{1}{n_e} = \frac{2}{n_a}$  となります。

(2) 新たにデータ取得する場合

一元配置実験を使って解説します。データの構造式を書きます。

$$x_{ij} = \mu + \alpha_i + \varepsilon_{ij}$$

新たに  $r$  個からなるデータを追加します。新データによる変化を確かめるために、差をとります。

$$\mu(A_i) - \mu(A_{i'}) = (\mu + \alpha_i + \bar{\varepsilon}_i) - (\mu + \alpha_{i'} + \bar{\varepsilon}_{i'}) = (\alpha_i - \alpha_{i'}) - (\bar{\varepsilon}_i - \bar{\varepsilon}_{i'})$$

と変形します。母平均差と同じ考え方です。

次に分散を求めましょう。

$$V(\mu(A_i) - \mu(A_{i'})) = V((\alpha_i - \alpha_{i'}) - (\bar{\varepsilon}_i - \bar{\varepsilon}_{i'})) = V(\bar{\varepsilon}_i - \bar{\varepsilon}_{i'}) = V(\bar{\varepsilon}_i) + V(\bar{\varepsilon}_{i'})$$

と分解できます。この分散の中の項で分解できる性質があるため、有効繰返し数  $n_e$  の式が変化するので。

$$V(\bar{\varepsilon}_i) = \frac{V_e}{n_a}, \quad V(\bar{\varepsilon}_{i'}) = \frac{V_e}{n_r} \quad \text{より} \quad V = \left(\frac{1}{n_a} + \frac{1}{n_r}\right) V_e = \frac{V_e}{n_e}$$

よって、 $\frac{1}{n_a} + \frac{1}{n_r} = \frac{1}{n_e}$  が成り立ちます。

$a$  は元のデータの自由度、 $r$  は新たに取得したデータの自由度とします。

なお、よく教科書では  $\frac{V_e}{n_e}$  を大きくして推定区間を広くみたいため、 $\frac{1}{n_r}$  を 1 とすることが多いです。

$\frac{1}{n_e} = 1 + \frac{1}{n_a}$  としています。

**【2】** 繰返し有り無し の二元配置実験の場合  
 ここでは、組合せ AB の推定区間を考えます。

(1) 繰返し無し の二元配置実験の場合  
 データの構造式を書きます。

$$x_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \varepsilon_{ij}$$

組合せ AB の平均値を導出します。関連記事で導出方法を復習しましょう。

**【関連記事】【簡単】** データの構造式から母平均の点推定が導出できる

<https://qcplanets.com/method/doe/point-estimation/>

$$\mu(A_i B_j) = \mu + \alpha_i + \beta_j = \bar{x} + (\bar{x}_{i\cdot} - \bar{x}) + (\bar{x}_{\cdot j} - \bar{x}) = \bar{x}_{i\cdot} + \bar{x}_{\cdot j} - \bar{x}$$

母平均差について式を作ります。

$$\mu(A_i B_j) - \mu(A_{i'} B_{j'}) = (\bar{x}_{i\cdot} + \bar{x}_{\cdot j} - \bar{x}) - (\bar{x}_{i'\cdot} + \bar{x}_{\cdot j'} - \bar{x}) = (\alpha_i - \alpha_{i'}) + (\beta_j - \beta_{j'}) - (\bar{\varepsilon}_{i\cdot} - \bar{\varepsilon}_{i'\cdot}) - (\bar{\varepsilon}_{\cdot j} - \bar{\varepsilon}_{\cdot j'})$$

分散を求めます。

$$V(\mu(A_i B_j) - \mu(A_{i'} B_{j'})) = V((\bar{\varepsilon}_{i\cdot} - \bar{\varepsilon}_{i'\cdot}) - (\bar{\varepsilon}_{\cdot j} - \bar{\varepsilon}_{\cdot j'})) = V(\bar{\varepsilon}_{i\cdot}) + V(\bar{\varepsilon}_{i'\cdot}) + V(\bar{\varepsilon}_{\cdot j}) + V(\bar{\varepsilon}_{\cdot j'}) = \frac{2}{b} V_e + \frac{2}{a} V_e \text{ となります。}$$

よって、推定区間は

$$(\alpha_i - \alpha_{i'}) + (\beta_j - \beta_{j'}) \pm t(\varphi_e, \alpha) \sqrt{\left(\frac{2}{b} + \frac{2}{a}\right) V_e}$$

となります。

(2) 繰返し有り の二元配置実験の場合  
 データの構造式を書きます。

$$x_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} + \varepsilon_{ijk}$$

組合せ AB の平均値を導出します。

$$\mu(A_i B_j) = \mu + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} = \bar{x} + (\bar{x}_{i\cdot\cdot} - \bar{x}) + (\bar{x}_{\cdot\cdot j} - \bar{x}) + (\bar{x}_{i\cdot j} - \bar{x}_{i\cdot\cdot} - \bar{x}_{\cdot\cdot j} + \bar{x}) = \bar{x}_{i\cdot j}$$

母平均差について式を作ります。

$$\mu(A_i B_j) - \mu(A_{i'} B_{j'}) = \bar{x}_{i\cdot j} - \bar{x}_{i'\cdot j'} = (\alpha\beta)_{ij} - (\alpha\beta)_{i'j'} + (\bar{\varepsilon}_{i\cdot j} - \bar{\varepsilon}_{i'\cdot j'})$$

分散を求めます。

$$V(\mu(A_i B_j) - \mu(A_{i'} B_{j'})) = V(\bar{\varepsilon}_{i\cdot j} - \bar{\varepsilon}_{i'\cdot j'}) = \frac{2}{c} V_e$$

となります。よって、推定区間は

$$(\alpha\beta)_{ij} - (\alpha\beta)_{i'j'} \pm t(\varphi_e, \alpha) \sqrt{\frac{2}{c} V_e} \text{ となります。}$$

同じ AB でも、交互作用の有無によって式が変わるのがわかります。

**【3】** 分割法の場合

同様に算出します。データの構造式を書きます。

$$x_{ijk} = \mu + \gamma_k + \alpha_i + \varepsilon_{(1)ik} + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} + \varepsilon_{(2)ijk}$$

組合せ AB の平均値を導出します。

$$\mu(A_i B_j) = \mu + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} = \bar{x} + (\bar{x}_{i\cdot\cdot} - \bar{x}) + (\bar{x}_{\cdot\cdot j} - \bar{x}) + (\bar{x}_{i\cdot j} - \bar{x}_{i\cdot\cdot} - \bar{x}_{\cdot\cdot j} + \bar{x}) = \bar{x}_{i\cdot j}$$

母平均差について式を作ります。

$$\mu(A_i B_j) - \mu(A_i' B_j') = \overline{x_{ij}} - \overline{x_{i'j'}} = (\alpha\beta)_{ij} - (\alpha\beta)_{i'j'} + (\overline{\varepsilon_{(1)i}} - \overline{\varepsilon_{(1)i'}}) + (\overline{\varepsilon_{(2)ij}} - \overline{\varepsilon_{(2)i'j'}})$$

分散を求めます。

$$V(\mu(A_i B_j) - \mu(A_i' B_j')) = V((\overline{\varepsilon_{(1)i}} - \overline{\varepsilon_{(1)i'}}) + (\overline{\varepsilon_{(2)ij}} - \overline{\varepsilon_{(2)i'j'}})) = \frac{2}{c} V_{e(1)} + \frac{2}{c} V_{e(2)}$$

となります。よって、推定区間は

$$(\alpha\beta)_{ij} - (\alpha\beta)_{i'j'} \pm t(\varphi_e, \alpha) \sqrt{\frac{2}{c} V_{e(1)} + \frac{2}{c} V_{e(2)}} \text{ となります。}$$

以上、母平均差などの区間推定の導出について解説しました。

【1】一元配置実験の場合

(1) データの構造式と分散分析表

どんな場面でも、最初はデータの構造式を書きましょう。データの構造式が実験計画法のすべてを導きます。

$$x_{ij} = \mu + \alpha_i + \varepsilon_{ij}$$

分散分析表を作ります。

—	$\phi$	E[V]
A	$a - 1$	$\sigma_e^2 + b\sigma_A^2$
e	$a(b - 1)$	$\sigma_e^2$
T	$ab - 1$	—

よって、

$$E[V_A] = \sigma_e^2 + b\sigma_A^2 \quad , \quad E[V_e] = \sigma_e^2$$

となり、

$$\sigma_A^2 = E\left[\frac{V_A - V_e}{b}\right] \quad , \quad \sigma_e^2 = E[V_e]$$

となります。

(2) 残差 $\sigma_e^2$ の推定区間の導出</h3>

$\sigma_e^2$ については、 $\chi^2$ 分布を活用します。

$\chi^2$ は平方和 S と  $\sigma_e^2$ を用いて

$$\chi^2 = \frac{S}{\sigma_e^2}$$

と表現できます。言い換えると、

$$\sigma_e^2 = \frac{S}{\chi^2}$$

となり、 $\chi^2$ の確率区間で $\sigma_e^2$ の推定区間が求まります。

$$\frac{S}{\chi^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)} < \sigma_e^2 < \frac{S}{\chi^2\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)}$$

(3) 主効果 $\sigma_A^2$ の推定区間の導出

一方、主効果 $\sigma_A^2$ については、 $\sigma_e^2$ と同様に、 $\chi^2$ 分布を使って推定区間を求めてもよいですが、F分布を使って推定区間を求めます。

$$\sigma_A^2 = E\left[\frac{V_A - V_e}{b}\right]$$

$$\frac{V_A - V_e}{b} = \frac{V_e}{b} \left(\frac{V_A}{V_e} - 1\right)$$

と変形して、 $\frac{V_A}{V_e} = F\left(\phi_A, \phi_e, \frac{\alpha}{2}\right)$ とします。

Fを使って推定区間を求めると次のように導出できます。

$$\frac{V_e}{b} \left(\frac{1}{F\left(\phi_A, \phi_e, \frac{\alpha}{2}\right)} - 1\right) < \frac{V_e}{b} \left(\frac{V_A}{V_e} - 1\right) = \sigma_A^2 < \frac{V_e}{b} \left(F\left(\phi_A, \phi_e, \frac{\alpha}{2}\right) - 1\right)$$

このような感じで、他の実験についても母分散の推定区間を導出します。

**【2】 二元配置実験(乱塊法も含む)の場合**

(1) データの構造式と分散分析表

どんな場面でも、最初はデータの構造式を書きましょう。データの構造式が実験計画法のすべてを導きます。

$$x_{ij} = \mu + \gamma_j + \alpha_i + \varepsilon_{ij}$$

分散分析表を作ります。

—	$\phi$	E[V]
R	$r - 1$	$\sigma_e^2 + a\sigma_R^2$
A	$a - 1$	$\sigma_e^2 + r\sigma_A^2$
e	$(a - 1)(r - 1)$	$\sigma_e^2$
T	$ar - 1$	—

よって、

$$E[V_A] = \sigma_e^2 + r\sigma_A^2$$

$$E[V_R] = \sigma_e^2 + a\sigma_R^2$$

$$E[V_e] = \sigma_e^2$$

となり、

$$\sigma_A^2 = E\left[\frac{V_A - V_e}{r}\right]$$

$$\sigma_R^2 = E\left[\frac{V_R - V_e}{a}\right]$$

$$\sigma_e^2 = E[V_e] \text{ となります。}$$

(2) 残差 $\sigma_e^2$ の推定区間の導出</h3>

一元配置実験と同じ結果になります。

$$\frac{S}{\chi^2(\frac{\alpha}{2})} < \sigma_e^2 < \frac{S}{\chi^2(1-\frac{\alpha}{2})}$$

(3) 反復 R( $\sigma_R^2$ ), 主効果 A( $\sigma_A^2$ )の推定区間の導出</h3>

一元配置実験と同様に F 分布を使って導出します。

$$\sigma_A^2 = E\left[\frac{V_A - V_e}{r}\right]$$

$$\sigma_R^2 = E\left[\frac{V_R - V_e}{a}\right]$$

変形して、

$$\frac{V_A - V_e}{r} = \frac{V_e}{r} \left(\frac{V_A}{V_e} - 1\right) = \frac{V_e}{r} \left(F(\varphi_A, \varphi_e, \frac{\alpha}{2}) - 1\right)$$

$$\frac{V_R - V_e}{a} = \frac{V_e}{a} \left(\frac{V_R}{V_e} - 1\right) = \frac{V_e}{a} \left(F(\varphi_R, \varphi_e, \frac{\alpha}{2}) - 1\right)$$

とします。

F を使って推定区間を求めると次のように導出できます。

$$\frac{V_e}{r} \left(F(\varphi_A, \varphi_e, \frac{\alpha}{2}) - 1\right) < \sigma_A^2 < \frac{V_e}{r} \left(\frac{1}{F(\varphi_A, \varphi_e, \frac{\alpha}{2})} - 1\right)$$

$$\frac{V_e}{a} \left(F(\varphi_R, \varphi_e, \frac{\alpha}{2}) - 1\right) < \sigma_R^2 < \frac{V_e}{a} \left(\frac{1}{F(\varphi_R, \varphi_e, \frac{\alpha}{2})} - 1\right)$$

**【3】 分割法(乱塊法も含む)の場合**

(1) データの構造式と分散分析表

どんな場面でも、最初はデータの構造式を書きましょう。データの構造式が実験計画法のすべてを導きます。

$$x_{ijk} = \mu + \gamma_k + \alpha_i + \varepsilon_{(1)ik} + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} + \varepsilon_{(2)ijk}$$

分散分析表を作ります。

よって、

—	$\phi$	E[V]	—	$\phi$	E[V]
R	$c - 1$	$\sigma_{e(2)}^2 + b\sigma_{e(1)}^2 + ab\sigma_R^2$	A × B	$(a - 1)(b - 1)$	$\sigma_{e(2)}^2 + c\sigma_{A \times B}^2$
A	$a - 1$	$\sigma_{e(2)}^2 + b\sigma_{e(1)}^2 + bc\sigma_A^2$	e(2)	$a(b - 1)(c - 1)$	$\sigma_{e(2)}^2$
e(1)	$(a - 1)(c - 1)$	$\sigma_{e(2)}^2 + b\sigma_{e(1)}^2$	T	$abc - 1$	—
B	$b - 1$	$\sigma_{e(2)}^2 + c\sigma_B^2$	—	—	—

よって、

$$E[V_R] = \sigma_{e(2)}^2 + b\sigma_{e(1)}^2 + ab\sigma_R^2, \quad E[V_A] = \sigma_{e(2)}^2 + b\sigma_{e(1)}^2 + bc\sigma_A^2, \quad E[V_{e(1)}] = \sigma_{e(2)}^2 + b\sigma_{e(1)}^2$$

$$E[V_B] = \sigma_{e(2)}^2 + c\sigma_B^2, \quad E[V_{A \times B}] = \sigma_{e(2)}^2 + c\sigma_{A \times B}^2, \quad E[V_{e(2)}] = \sigma_{e(2)}^2$$

となり、

$$\sigma_A^2 = E\left[\frac{V_A - V_{e(1)}}{bc}\right], \quad \sigma_B^2 = E\left[\frac{V_B - V_{e(2)}}{ac}\right], \quad \sigma_R^2 = E\left[\frac{V_R - V_{e(1)}}{ab}\right],$$

$$\sigma_{A \times B}^2 = E\left[\frac{V_{A \times B} - V_{e(2)}}{c}\right], \quad \sigma_{e(1)}^2 = E\left[\frac{V_{e(1)} - V_{e(2)}}{b}\right], \quad \sigma_{e(2)}^2 = E[V_{e(2)}]$$

となります。

(2) 残差 $\sigma_{e(1)}^2$ ,  $\sigma_{e(2)}^2$ の推定区間の導出

①  $\sigma_{e(2)}^2$ は、一元配置実験と同じ結果になります。

$$\frac{S}{\chi^2(\frac{\alpha}{2})} < \sigma_{e(2)}^2 < \frac{S}{\chi^2(1-\frac{\alpha}{2})}$$

$$\textcircled{2} \sigma_{e(1)}^2 = E\left[\frac{V_{e(1)} - V_{e(2)}}{b}\right]$$

変形して

$$\frac{V_{e(1)} - V_{e(2)}}{b} = \frac{V_{e(2)}}{b} \left( \frac{V_{e(1)}}{V_{e(2)}} - 1 \right) = \frac{V_{e(2)}}{b} \left( F(\varphi_{e(1)}, \varphi_{e(2)}, \frac{\alpha}{2}) - 1 \right)$$

Fを使って推定区間を求めると次のように導出できます。

$$\frac{V_{e(2)}}{b} \left( F(\varphi_{e(1)}, \varphi_{e(2)}, \frac{\alpha}{2}) - 1 \right) < \sigma_{e(1)}^2 < \frac{V_{e(2)}}{b} \left( \frac{1}{F(\varphi_{e(1)}, \varphi_{e(2)}, \frac{\alpha}{2})} - 1 \right)$$

あと、同様に F 分布から推定区間が導出できます。

以上、分散分析から母分散の推定区間の導出方法について解説しました。