【信頼性工学】

目次

【信頼性工学】ガンマ分布がわかる

【1】確率密度関数を導出するモデルを理解する

(1) 故障率は指数分布だけではない

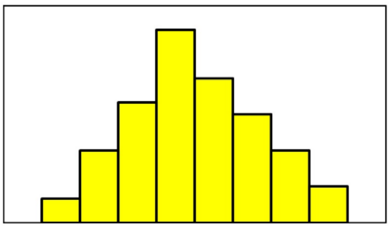
特に信頼性工学の入門を解説している教科書やサイトでは、

信頼性工学＝指数分布

とインプットされがちです。でも、ちゃうで！（違うよ！）

(2) 故障分布に合わせた確率密度関数を作る

例えば、寿命試験結果が以下のヒストグラムになったとします。



この図よく見ると、正規分布型です。
しかし、指数分布型の確率密度関数を導出する教科書がほとんどです。
それぞれの分布にあった確率密度関数を使って、寿命予測や故障率を計算しよう！

(3) 分布の種類

よく使う、確率密度関数で良いです。
①一様分布　②指数分布　③正規分布　④ワイブル分布　⑤ガンマ分布
ワイブル分布とガンマ分布は無理矢理感がありますが、信頼性工学でよく使います。

信頼性工学≠指数分布　をインプットしてください。

では、個々の分布関数を見ていきます。

【2】ガンマ分布とは

(1) ガンマ分布の確率密度関数の考え方

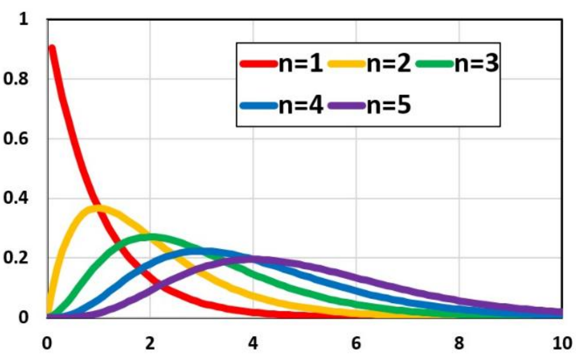
ガンマ分布の確率密度関数 $f(t)=\frac{\lambda^n t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-\lambda t}$

指数分布関数$f(t)=e^{-\lambda t}$のn回の畳み込み積分$(t_1+t_2+\cdots+t_n)$から
ガンマ分布を導出すると考えるとわかりやすい。

関数の導出方法は関連記事で確認ください。

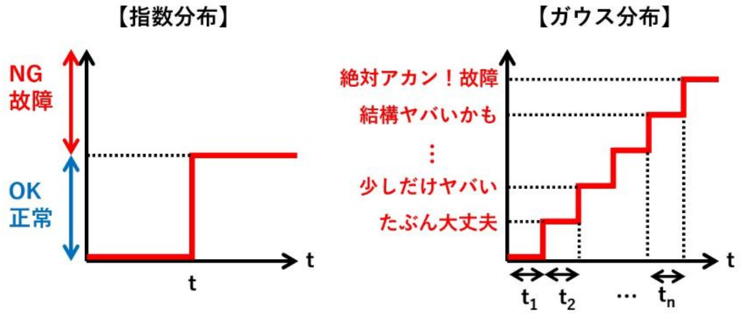
【関連記事】ガンマ分布がよくわかる
https://qcplanets.com/method/statistics-method/gamma-distribution/

なお、λ=1 の場合、ガンマ分布は下図になります。



(2) ガンマ分布と指数分布の違いがよくわかる図

ガンマ分布は指数分布から作るので、指数分布に属すると考えてよいです。
では、ガンマ分布と指数分布の使い分け方が気になります。わかりやすく図で描くと次の通りです。



要は、

①OK!、NG!の２択なら指数分布 ②NG までにいくつゲートがある場合ならガウス分布 のイメージで区別する。

ガウス分布の使用例としては、金属の亀裂の数から故障判定を使う場合とかがあります。
① 時刻t_1で〇〇個亀裂があれば、少しヤバいけど故障ではない
② 時刻t_1+t_2で△△個亀裂があれば、そろそろヤバいかもでも、もう少し使用許可する
③ 時刻t_1+t_2+⋯+t_nで★★個亀裂があれば、アカン！ヤバい！ 故障や！とする
という感じです。

(3) 信頼度$R(x)$と不信頼度$F(x)$の関係

これ混同しがちなので、きちっと整理しましょう。
信頼度は Reliability と英語で書くので、信頼度$R(x)$と書きます。
不信頼度は失敗の Failure を英語で使って、不信頼度(故障度) $F(x)$と書きます。
そして大事な関係式があります。簡単です！ よく使います。

$$R(x)+F(x)=1$$
$$\frac{dR(x)}{dx}=-\frac{dF(x)}{dx}$$
$$f(x)=\frac{dF(x)}{dx}=-\frac{dR(x)}{dx}$$

【3】故障率λの計算

(1) 故障率λ

故障率とは、$f(x)$と$R(x)$との比で計算します。ガンマ分布の場合、機械的に $\lambda(t)=\frac{f(t)}{R(t)}=\frac{f(t)}{1-F(t)}$をします。

(2) 不信頼度関数$F(t)$

$F(t)=\int_0^t f(t)dt=\int_0^t \frac{\lambda^n t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-\lambda t}\,dt$=(式 1)

ここで、$\Gamma(n)=(n-1)!$、$u=\lambda t$ とおくと

(式 1)= $\frac{1}{\Gamma(n)}\int_0^t \lambda^n t^{n-1}e^{-\lambda t}=\frac{1}{\Gamma(n)}\int_0^{\frac{u}{\lambda}} u^{n-1}e^{-u}du=\frac{\gamma(n,u)}{\Gamma(n)}=\frac{\gamma(n,\lambda t)}{\Gamma(n)}$ ($\gamma(n,u)=\int_0^{\frac{u}{\lambda}} u^{n-1}e^{-u}du$)

と置くことができます。

(3)信頼度関数$R(t)$と故障率$\lambda(t)$

結果を書くと、$R(t)=1-\frac{\gamma(n,\lambda t)}{\Gamma(n)}$

$\lambda(t)=\frac{f(t)}{R(t)}=\frac{\lambda^n t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-\lambda t}\Big/\left\{1-\frac{\gamma(n,\lambda t)}{\Gamma(n)}\right\}$

$\lambda(t)$によって、故障率曲線の特徴が 3 つに分けられます。これはあとで解説します。

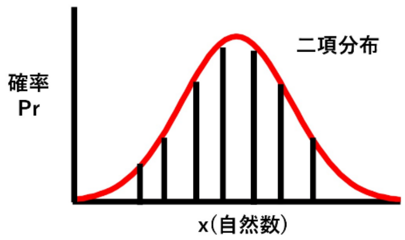
以上、「【信頼性工学】ガンマ分布がわかる」を解説しました。

【信頼性工学】二項正規分布がわかる

【1】二項分布から故障率を考える例題

二項分布は他の分布よりは簡単で扱いやすいですよね。でも、信頼性工学の故障率について二項分布からどう求めたらよいか？を考えましょう。

イメージは、　横軸が故障数xを整数で考え、縦軸は発生確率 Pr です。



(1)例題

ある確率変数x（自然数とする)が、確率 p の二項分布に従い、確率密度関数$f(x)$=　${}_nC_x p^x (1-p)^{n-x}$ に従うとする。 (1) 分布関数$F(x)$を求めよ。 (2) 確率密度関数$f(x)$の期待値と分散を計算せよ。 (3) 故障率λ(x)を求め、故障率曲線について考察せよ。

信頼性工学の観点で二項分布をどう扱うかを解説します。

(2) 分布関数$F(x)$

いつもなら、積分すればよいですよね。

$$F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$$

でも、それはxが実数の場合です。今回は、xが自然数の場合ですから、∫ではなくΣを使います。よって、

$$F(x) = \sum_{x=0}^{x} f(x) = \sum_{x=0}^{x} {}_nC_x p^x (1-p)^{n-x}$$

なお、$\sum_{x=0}^{n} {}_nC_x p^x (1-p)^{n-x}$ =1 (全区間の確率の和は 1 ですね。)

【2】故障率$\lambda(t)$の計算

故障率とは、$f(t)$と$R(t)$との比で計算します。機械的に　$\lambda(t)$= $\frac{f(t)}{R(t)}$をします。

二項分布の場合、

$\lambda(t)$=$\frac{f(t)}{R(t)} = \frac{{}_nC_t p^t (1-p)^{n-t}}{1-\sum_{t=0}^{t} {}_nC_t p^t (1-p)^{n-t}}$

故障率曲線の特徴が 3 つに分けられます。

以上、「【信頼性工学】二項分布がわかる」を解説しました。

【必読】ワイブル分布の寿命計算なのにχ2 乗分布を使う理由がよくわかる

【1】MTBF の信頼区間はχ2 乗分布から求める

(1) MTBF の信頼区間の例題

寿命分布が下式のワイブル分布に従う場合、

$$f(t)=\frac{\alpha}{\beta}\left(\frac{t}{\beta}\right)^{\alpha-1}\exp\left(-\left(\frac{t}{\beta}\right)^{\alpha}\right)$$

(1) t^{α}は指数分布に従い、

(2) Z=t_1^{α}+t_2^{α}+…+t_n^{α} はガンマ分布に従うので、

(3) 2Z は自由度$2n$の$\chi 2$ 乗分布に従う。

１つずつ解説します。いっぱい分布関数が出てきたので整理しましょう。

①ワイブル分布⇒指数分布に直せる？
②指数分布は和にするとガンマ分布にできる？
③ガンマ分布とχ2 乗分布は同じになる場合がある？

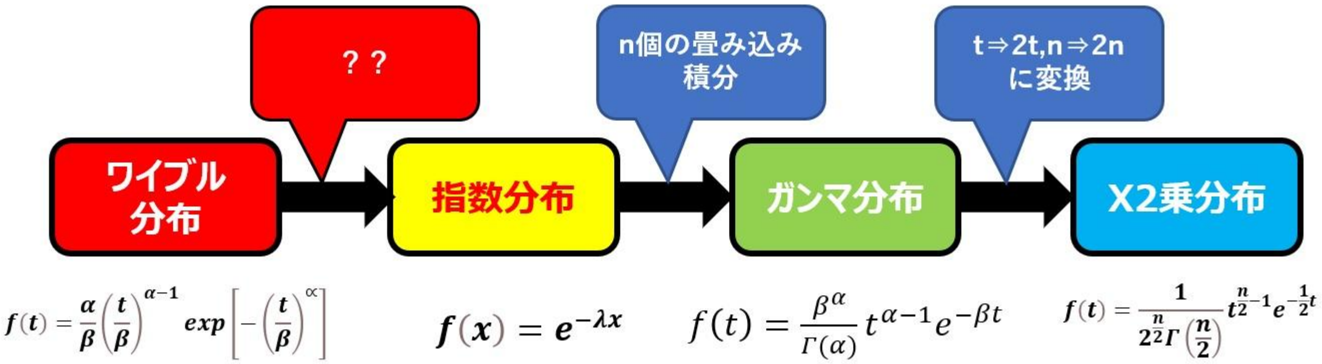
ワイブル分布の確率密度関数が　$f(t)=\frac{\alpha}{\beta}\left(\frac{t}{\beta}\right)^{\alpha-1}\exp\left(-\left(\frac{t}{\beta}\right)^{\alpha}\right)$と複雑ですが、大丈夫！

(2) 実は、指数分布からχ2 乗分布の流れは簡単

関連記事に解説しています。これは指数分布の寿命計算でχ2 乗分布を使える理由を解説しています。まずご覧ください。

【関連記事】【必読】寿命計算の信頼区間にχ2 乗分布を使う理由がよくわかる
https://qcplanets.com/method/reliability/gamma-chi/

図で説明すると、こうなります。



４つの分布の確率密度関数は全く形が違いますが、上図の青枠のように変形すると、関連記事のように

指数分布⇒ガンマ分布⇒χ2 乗分布までは変換できる！
赤枠部のワイブル分布⇒指数分布ができれば OK！

やってみましょう。

【2】ワイブル分布、指数分布、ガンマ分布とχ2 乗分布の関係

(1)【重要】ワイブル分布から指数分布への変換

①変数変換で使う関係式

ある変数を別の変数に変換しますが、同じ確率密度関数同士の変換なので、それぞれの積分値は同じ条件の確率となるため、積分は一致するという関係式を使います。

つまり
●変換前の関数と変換前の変数： $f(t)$とt
●変換後の関数と変換後の変数： $g(u)$とu
は積分
$\int f(t)dt=\int g(u)du$
なので、両辺を微分すると
$f(t)dt = g(u)du$となり、この関係式を使います。

②ワイブル分布を指数分布へ変換！
ワイブル分布の確率密度関数を用意します。
$f(t)=\frac{\alpha}{\beta}\left(\frac{t}{\beta}\right)^{\alpha-1}\exp\left(-\left(\frac{t}{\beta}\right)^{\alpha}\right)$
ここで、$t^{\alpha}=u$とおきます。つまり

● $t=u^{\frac{1}{\alpha}}$

● $\frac{dt}{du}=\frac{1}{\alpha}u^{\frac{1}{\alpha}-1}$
となりますね。これも使います。

$$f(t)=\frac{\alpha}{\beta}\left(\frac{t}{\beta}\right)^{\alpha-1}\exp\left(-\left(\frac{t}{\beta}\right)^{\alpha}\right) = \frac{\alpha}{\beta}\left(\frac{u^{\frac{1}{\alpha}}}{\beta}\right)^{\alpha-1}\exp\left(-\left(\frac{u^{\frac{1}{\alpha}}}{\beta}\right)^{\alpha}\right) = \frac{\alpha}{\beta}\left(\frac{u^{\frac{1}{\alpha}}}{\beta}\right)^{\alpha-1}\exp\left(-\frac{u}{\beta^{\alpha}}\right)$$

$f(t)dt = g(u)du$ から

$$g(u)=f(t)\frac{dt}{du}= \frac{\alpha}{\beta}\left(\frac{u^{\frac{1}{\alpha}}}{\beta}\right)^{\alpha-1}\exp\left(-\frac{u}{\beta^{\alpha}}\right)\frac{1}{\alpha}u^{\frac{1}{\alpha}-1} = \frac{1}{\beta^{\alpha}}\exp\left(-\frac{u}{\beta^{\alpha}}\right)$$

となり、$g(u)$は指数関数になりましたね。

ここでよく指数関数の定数λは、$\lambda=\frac{1}{\beta^{\alpha}}$ともいえます。まとめると、

$u=t^{\alpha}$とする変数uは定数$\lambda=\frac{1}{\beta^{\alpha}}$の指数分布関数に従う。(1) t^{α}は指数分布に従う　が解けました。

⑵ 指数分布⇒ガンマ分布への変換
関連記事を見ながら解説していきます。

【関連記事】ガンマ分布がよくわかる
https://qcplanets.com/method/statistics-method/gamma-distribution/

指数分布関数の変数t_iについて、
$T=t_1+t_2+\cdots+t_n$はガンマ分布に従います。
これは畳み込み積分と数学的帰納法で証明できます！関連記事に書いています。

今回、指数分布に従う変数は、t_i^{α}なので、同様に書くと、上の問いのように

⑵ $Z=t_1^{\alpha}+t_2^{\alpha}+\cdots+t_n^{\alpha}$ はガンマ分布に従う

(3) ガンマ分布⇒χ2 乗分布への変換
関連記事にもあるように、ガンマ分布の従う変数tについて

- tを 2tに
- nを 2nに

変えると、ガンマ分布の確率密度関数とχ2 乗分布の確率密度関数が同じ形になる！でしたね。

同様に考えると、上の問いの

(3) 2Z は自由度$2n$のχ2 乗分布に従う。

【3】ワイブル分布モデルなのに、信頼区間はχ2 乗を使う理由
(1) まとめ
例題が全て解けました。図でも理解できます。

$$f(t)=\frac{\alpha}{\beta}\left(\frac{t}{\beta}\right)^{\alpha-1}exp\left[-\left(\frac{t}{\beta}\right)^{\propto}\right]$$

$$f(x)=e^{-\lambda x}$$

$$f(t)=\frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}t^{\alpha-1}e^{-\beta t}$$

$$f(t)=\frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}t^{\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{1}{2}t}$$

ワイブル分布の寿命計算で使いますので、理解しておきましょう。

以上、「【必読】ワイブル分布の寿命計算なのにχ2 乗分布を使う理由がよくわかる」を解説しました。

信頼度の点推定と区間推定がわかる(指数分布)

【1】分布関数
(1)3 つの分布関数を解説！

①　指数分布	②ワイブル分布	③正規分布

そして、３つの分布関数に対して、共通の解法で解説していきます。
(2) 今回は指数分布
指数分布関数の確率密度関数を定義します。

$$f(t)=\lambda\exp(-\lambda t)$$

【2】尤度関数(ゆうど）を作る
(1) 尤度関数とは？

尤度関数とは前提条件に従って結果が出る場合に、逆に観察結果からみて前提条件が「何々であった」と推測する尤もらしさ（もっともらしさ）を表す数値を、変数とした関数。

よくわかりませんよね。

(2) 尤度関数って簡単にいうと何？

テキトーに関数作って、とにかく微分=0 で条件作って解析すると意外とうまく行くぜ！という、処理。

とにかくやってみましょう。いい加減に定義した関数が、良い加減な条件を作るので不思議です。

【3】最尤推定量(さいゆう)を導出
(1) 指数分布の尤度関数を定義
こんな関数を尤度関数として定義します。理由はテキトーで、指数なので掛け算と log を使いこなしたいから

尤度関数$L(\lambda)=\prod_{i=1}^{n}f(t_i)$ $(f(t_i)=\lambda\exp(-\lambda t_i))$
とにかく尤度関数をテキトーに設定して、微分=0 となる条件式を作ります。

(2) 尤度関数はとにかく「微分して０」を作る
$L(\lambda)=\prod_{i=1}^{n}\lambda\exp(-\lambda t_i)\quad=\lambda\exp(-\lambda t_1)\times\lambda\exp(-\lambda t_2)\times\ldots\times\lambda\exp(-\lambda t_n)=\lambda^n\exp(-\lambda\sum_{i=1}^{n}t_i)$
ここで、両辺を log をとりましょう。
$logL(\lambda)=nlog\lambda-\lambda\sum_{i=1}^{n}t_i$

両辺をλで微分します。
$\frac{\partial\log(L(\lambda))}{\partial\lambda}=\frac{n}{\lambda}-\sum_{i=1}^{n}t_i=0$　より　$\frac{1}{\lambda}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}t_i$

(3) 最尤推定量は何が出るの？
とりあえず、尤度関数を微分して 0 になる条件式を作りました。

$\frac{1}{\lambda}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}t_i$

よーくみると、(左辺)は故障率λの逆数で、(右辺)は寿命の平均になっていますよね。

寿命平均が$\frac{1}{\lambda}$ってことですが、確かに正しいですよね。

【4】点推定の導出

尤度関数を微分して 0 になる条件式から、寿命平均が$\frac{1}{\lambda}$とわかりました。

これって、寿命の平均だから点推定としてＯＫです！

点推定： $\frac{1}{\lambda}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}t_i$

確かに、関数の極小値に落ち着く条件だから、それが点推定になるかもしれませんが、尤度関数から導出できるのは不思議ですね。

【5】区間推定の導出

(1) 区間推定にχ2 乗分布を使う理由

寿命が指数分布に従う場合、区間推定はχ2 乗分布を使います。この理由は関連記事で解説しています。

【関連記事】【必読】寿命計算の信頼区間にχ2 乗分布を使う理由がよくわかる
https://qcplanets.com/method/reliability/gamma-chi/

(2) 区間推定を導出

指数分布をガンマ分布に変身させて、ガンマ分布とχ2 乗分布の確率密度関数を一致させることです。

(i) ガンマ分布： $f_n(t)=\lambda^n\frac{t^{n-1}}{\Gamma(n)}e^{-\lambda t}$

(ii) χ2 乗分布： $g_n(u)=\frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})}u^{\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{1}{2}u}$

χ2 乗分布に $u=2t\lambda$ と $n\Rightarrow 2n$ を代入しましょう。

$g_{2n}(2t\lambda)=\frac{1}{2^{\frac{2n}{2}}\Gamma(\frac{2n}{2})}(2t\lambda)^{\frac{2n}{2}-1}e^{-\frac{1}{2}(2t\lambda)}=\frac{1}{2^n\Gamma(n)}(2t\lambda)^{n-1}e^{-\lambda t}=\frac{2^{n-1}}{2^n\Gamma(n)}(\lambda t)^{n-1}e^{-\lambda t}=\frac{1}{2\lambda}\frac{\lambda^n t^{n-1}}{\Gamma(n)}e^{-\lambda t}=\frac{1}{2\lambda}f(t)$

となり、係数$\frac{1}{2\lambda}$は残りますが、$f(t)\equiv g_{2n}(u)$となるので、指数分布は、自由度$2n$のχ2 乗分布に従い、$u=2t\lambda$の関係を使います。

(3) χ2 乗分布から区間推定

指数分布は、自由度$2n$のχ2 乗分布に従い、$u=2t\lambda$の関係を使うので、

$\chi^2\left(2n,1-\frac{\alpha}{2}\right)<\ \Pr(u=2t\lambda)<\ \chi^2\left(2n,\frac{\alpha}{2}\right)$

の区間になります。

なお、λは

$\frac{1}{\lambda}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}t_i$より、

$T=\sum_{i=1}^{n}t_i$

とおくと、

$\frac{1}{\lambda}=\frac{T}{n}$となります。これを代入すると、

$$\chi^2\left(2n,1-\frac{\alpha}{2}\right)<\ \Pr\left(u=\frac{2tn}{T}\right)<\ \chi^2\left(2n,\frac{\alpha}{2}\right)$$

となります。

以上、「信頼度の点推定と区間推定がわかる(指数分布)」を解説しました。

信頼度の点推定と区間推定がわかる(正規分布)

【1】分布関数

(1)3 つの分布関数を解説！

① 指数分布	②ワイブル分布	③正規分布

そして、3つの分布関数に対して、共通の解法で解説していきます。

(2) 今回は指数分布

正規分布関数の確率密度関数を定義します。

$$f(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left(-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

【2】尤度関数(ゆうど）を作る

本冊子の「信頼度の点推定と区間推定がわかる(指数分布)」で解説しています。

【3】最尤推定量(さいゆう)を導出

(1) 正規分布の尤度関数を定義

尤度関数$L(\sigma,\mu)=\prod_{i=1}^{n} f(t_i)$ （$f(t_i)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left(-\frac{(t_i-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$）

尤度関数を設定して、微分=0 となる条件式を作ります。

(2) 尤度関数はとにかく「微分して０」を作る

$$L(\sigma,\mu)=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left(-\frac{(t_i-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)=\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\right)^n\exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(t_i-\mu)^2\right)$$

ここで、両辺を log をとって、両辺をσ,μそれぞれで微分して、

● $\frac{\partial\log(L(\sigma,\mu))}{\partial\sigma}$=0

● $\frac{\partial\log(L(\sigma,\mu))}{\partial\mu}$=0

の式を作ります。

(3) 最尤推定量は何が出るの？

とりあえず、尤度関数を微分して 0 になる条件式を作ります。

● $\frac{\partial\log(L(\sigma,\mu))}{\partial\sigma}$=0　$\frac{\partial\log(L(\sigma,\mu))}{\partial\sigma}=-\frac{n}{\sigma}+2\sigma^3\sum_{i=1}^{n}\frac{(t_i-\mu)^2}{2}$ =0　まとめると、$\sigma^2=\frac{\sum_{i=1}^{n}(t_i-\mu)^2}{n}$

● $\frac{\partial\log(L(\sigma,\mu))}{\partial\mu}$=0　$\frac{\partial\log(L(\sigma,\mu))}{\partial\mu}=-\sum_{i=1}^{n}\frac{(\mu-t_i)}{\sigma^2}$=0　まとめると、$\mu=\frac{\sum_{i=1}^{n}t_i}{n}$

【4】点推定の導出

尤度関数を微分して 0 になる条件式から、

● $\frac{\partial\log(L(\sigma,\mu))}{\partial\sigma}$=0　まとめると、$\sigma^2=\frac{\sum_{i=1}^{n}(t_i-\mu)^2}{n}$

● $\frac{\partial\log(L(\sigma,\mu))}{\partial\mu}$=0　まとめると、$\mu=\frac{\sum_{i=1}^{n}t_i}{n}$

が出ました。これって、

平均μと分散σ^2そのものですよね！

尤度関数を勝手に定義して、強制的に微分=0 とすると、平均と分散が出るので不思議ですね。

よって、点推定は

$$\bar{\mu} = \frac{\sum_{i=1}^{n} t_i}{n}$$
$$\overline{\sigma^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(t_i - \mu)^2}{n}$$

【5】区間推定の導出

(1) 区間推定は正規分布表から計算できる

　指数分布やワイブル分布は、とにかくχ2乗分布に直して区間推定しましたが、正規分布は正規分布表から区間を推定すればOKです。

(2) 例題で確認すれば簡単にわかる！

　信頼性工学とはいえ、ただの正規分布の問題と思えば、難しい例題ではありません。

【例題】
ある材料の引張強度を測定したら以下の10個のデータを得た。
179,190,193,194,198,201,204,210,211,220
①平均μと標準偏差σの最尤推定値を求めよ。
② 部材に220の引張強度をかけた時の信頼度(部材が壊れない確率)を求めよ。
③ 仮にσが既知で15とすると、(2)の220の引張強度をかけた時の信頼度(部材が壊れない確率)を求めよ。

一見、難しそうですが、正規分布と信頼性工学を組み合わせた問題で良問です。

(3) 例題の解法

①の最尤推定値は、

$$\bar{\mu} = \frac{\sum_{i=1}^{n} t_i}{n}$$
$$\overline{\sigma^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(t_i - \mu)^2}{n}$$

計算して、

$\bar{\mu}$=2000/10=200

$\bar{\sigma}$=$\sqrt{1268/10}$=11.26

です。平均、平方和、標準偏差を計算しただけです。

②の信頼度

正規分布はZ値を使いますよね。

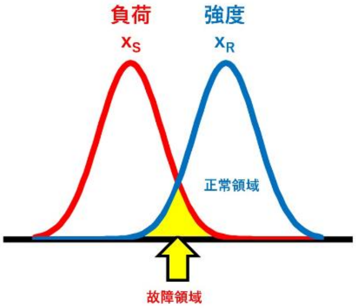
$Z = \frac{x-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$=$\frac{220-200}{11.26}$=1.776

正規分布表からZ=1.776以上となる確率は、Pr=0.0384。

引張強度が強すぎると壊れると考えると、信頼度は、R=1-0.0384=0.9616となります。

③の信頼度

参考に下図から問を考えます。



正規分布はZ値を使いますよね。(2)と同じです。

$Z=\frac{x-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$=$\frac{220-200}{15}$=1.333

正規分布表からZ=1.333以上となる確率は、Pr=0.0918。

引張強度が強すぎると壊れると考えると、信頼度は、R=1-0.0918=0.9082となります。

正規分布の場合の信頼度の計算は、信頼性工学を意識せず、単に Z 値を計算して正規分布表から確率を求めたら信頼度が出ることがわかります。難しそうですが意外と簡単です。

以上、「信頼度の点推定と区間推定がわかる(正規分布)」を解説しました。

信頼度の推定方法がわかる(寿命分布なし、区間分け有、打切り無しの場合)

【1】【まとめ】データの種類による推定方法の求め方

【データの種類】

①	▸寿命分布なし、区間分け有、打切り無しの場合
②	寿命分布なし、区間分け有、打切り有りの場合
③	寿命分布なし、区間分け無、打切り無しの場合
④	寿命分布なし、区間分け無、打切り有りの場合

【2】信頼度の推定方法

●寿命分布なしとは	故障率が指数分布やワイブル分布に乗らない場合。 度数分布表から解いていくパターン
●区間分け有とは	区間を等間隔で用意して、各区間の故障数を調べる。 区間分けする方が一般的。
●打切り無しとは、	対象の製品が全部壊れるまで試験を行う場合。 有限時間内に壊れる製品はヤバいので、試験で壊れなかった製品は試験打切りする方が一般的。

実際に、例題で解いてみましょう。あまり、難しく構える必要はありません。

故障率の計算って、簡単な場合は中学生レベルなのに、急に大学の統計学が入るから、簡単なのか激難かよくわからない！だから、触れにくいよね！

そういう時は、いっぱい例題を見て、比較して理解すればＯＫです。

【3】例題で信頼度の推定方法を理解する

(1) 例題

【例題】ある製品 100 台を寿命試験にかけて、<mark>100 台すべて故障するまで</mark>試験を実施した。下表はその結果をまとめたものである。各区間の信頼度 R を計算せよ。

i	区間			故障数	残数	R(ti)
0	0.5	～	10.5	1	100	??
1	10.5	～	20.5	3	99	??
2	20.5	～	30.5	6	96	??
3	30.5	～	40.5	8	90	??
4	40.5	～	50.5	12	82	??
5	50.5	～	60.5	20	70	??
6	60.5	～	70.5	28	50	??
7	70.5	～	80.5	13	22	??
8	80.5	～	90.5	6	9	??
9	90.5	～	100.5	3	3	??
10	100.5	～	110.5	0	0	??

この例題だけだと、中学生でも解けます！でも、実際は、いろいろなパターンがあり、違いを理解して、どんな数式を使えばよいかを考えると、一気に大学レベルに上がります。解法の違いを比較しながら、理解しよう！

(2) 解法

①まず、信頼度を解く前に、

●区間の最大レベルを見ると 110.5 で止まっており、110.5 以上は打ち切っていないことを確認しましょう。
●故障数の合計は確かに全 100 個になっていることを確認しましょう。

これに打ち切りが入るとすぐにややこしくなります。まずはシンプルな例題で理解する！

本記事で、一番言いたいところです。

②頼度を計算する
単純明快で、　信頼度 R=残数/全個数で計算できます。

めっちゃ簡単だけど、打ち切りが入るなり、分布なりが入ってくると難しくなる点は意識しましょう。

結果は

i	区間			故障数	残数	R(ti)
0	0.5	～	10.5	1	100	(=100/100)=1
1	10.5	～	20.5	3	99	(=99/100)=0.99
2	20.5	～	30.5	6	96	(=96/100)=0.96
3	30.5	～	40.5	8	90	(=90/100)=0.9
4	40.5	～	50.5	12	82	(=82/100)=0.82
5	50.5	～	60.5	20	70	(=70/100)=0.7
6	60.5	～	70.5	28	50	(=50/100)=0.5
7	70.5	～	80.5	13	22	(=22/100)=0.22
8	80.5	～	90.5	6	9	(=9/100)=0.09
9	90.5	～	100.5	3	3	(=3/100)=0.03
10	100.5	～	110.5	0	0	(=0/100)=0

まず、シンプルな例題から簡単に求まりましたが、いくつかのパターンを比較すると混乱します。1 つずつわかりやすく解説していきます！

以上、「信頼度の推定方法がわかる(寿命分布なし、区間分け有、打切り無しの場合)」を解説しました。

信頼度の推定方法がわかる(寿命分布なし、区間分け有、打切り有りの場合)

【1】【まとめ】データの種類による推定方法の求め方
【データの種類】

① 寿命分布なし、区間分け有、打切り無しの場合
② ▸寿命分布なし、区間分け有、打切り有りの場合
③ 寿命分布なし、区間分け無、打切り無しの場合
④ 寿命分布なし、区間分け無、打切り有りの場合

【2】信頼度の推定方法
本冊子、「信頼度の推定方法がわかる(寿命分布なし、区間分け有、打切り無しの場合)」で確認ください。

【3】打切りの方法は複数ある
2つ打ち切る方法があります。3つ目以上もあるかもしれません。

① 区間で打ち切る場合←本記事のテーマ
② 区間ごとで故障しない場合で打切る場合

【4】例題で信頼度の推定方法を理解する
(1) 例題

【例題】ある製品 100 台を寿命試験にかけて、100 台すべて故障するまで試験を実施した。下表はその結果をまとめたものである。各区間の信頼度 R を計算せよ。

i	区間			故障数	残数	R(ti)
0	0.5	～	10.5	1	100	??
1	10.5	～	20.5	3	99	??
2	20.5	～	30.5	6	96	??
3	30.5	～	40.5	8	90	??
4	40.5	～	50.5	12	82	??
5	50.5	～	60.5	20	70	??
6	60.5	～	70.5	28	50	??
7	70.5	～	80.5	10	22	??
8	80.5	～	90.5	6	12	??
9	90.5	～	100.5	3	6	??
10	100.5	～		3	3	??

いろいろなパターンがあり、違いを理解して、どんな数式を使えばよいかを考えると、一気に大学レベルに上がります。解法の違いを比較しながら、理解しよう！

「寿命分布なし、区間分け有、打切り無しの場合」と比較すると一気に難しく感じる！

(2) 「寿命分布なし、区間分け有、打切り無しの場合」と比較すると一気に難しく感じる！

ー	打切り無し						打切り有り					
i	区間			故障数	残数	R(ti)	区間			故障数	残数	R(ti)
0	0.5	～	10.5	1	100	??	0.5	～	10.5	1	100	??
1	10.5	～	20.5	3	99	??	10.5	～	20.5	3	99	??
2	20.5	～	30.5	6	96	??	20.5	～	30.5	6	96	??
3	30.5	～	40.5	8	90	??	30.5	～	40.5	8	90	??
4	40.5	～	50.5	12	82	??	40.5	～	50.5	12	82	??
5	50.5	～	60.5	20	70	??	50.5	～	60.5	20	70	??
6	60.5	～	70.5	28	50	??	60.5	～	70.5	28	50	??
7	70.5	～	80.5	13	22	??	70.5	～	80.5	10	22	??
8	80.5	～	90.5	6	9	??	80.5	～	90.5	6	12	??
9	90.5	～	100.5	3	3	??	90.5	～	100.5	3	6	??
10	100.5	～	110.5	0	0	??	100.5	～		3	3	??

上の表で
●寿命分布なし、区間分け有、打切り無しの場合
●寿命分布なし、区間分け有、打切り有りの場合
で違いがありますよね。

●区間 i=10 で　100.5～110.5　と 100.5～　が違う　この違いで解き方が変わるのか？同じでいいのか？

ここが難しいポイントですよね！　解き方を丸暗記せず、理解して進めることが大事です。本記事で、一番言いたいところです。

(3) 解法
①まず、信頼度を解く前に、

●区間の最大レベルを見ると、110.5 以上は打ち切っていることを確認しましょう。
●故障数の合計は確かに全 100 個になっていることを確認しましょう。

②信頼度を計算する

実は、計算は打ち切り無しと同じ。でも計算以外で注意してよく考えるべき点がある！

単純明快で、信頼度 R=残数/全個数で計算できます。

めっちゃ簡単だけど、打ち切りが入るなり、分布なりが入ってくると難しくなる点は意識しましょう。

結果は、こうなります。

i	区間			故障数	残数	R(ti)
0	0.5	～	10.5	1	100	(=100/100)=1
1	10.5	～	20.5	3	99	(=99/100)=0.99
2	20.5	～	30.5	6	96	(=96/100)=0.96
3	30.5	～	40.5	8	90	(=90/100)=0.9
4	40.5	～	50.5	12	82	(=82/100)=0.82
5	50.5	～	60.5	20	70	(=70/100)=0.7
6	60.5	～	70.5	28	50	(=50/100)=0.5
7	70.5	～	80.5	10	22	(=22/100)=0.22
8	80.5	～	90.5	6	12	(=12/100)=0.12
9	90.5	～	100.5	3	6	(=6/100)=0.06
10	100.5	～		3	3	(=3/100)=0.03

まず、シンプルな例題から簡単に求まりましたが、いくつかのパターンを比較すると混乱します。1 つずつわかりやすく解説していきます！

(4) 注意すべき点がある

110.5 以上のデータを打ち切る場合
●110.5 以上で打ち切っても本当によいか？
●どこまで試験時間、量をかけたらよいか？

　例えば、110.5 以上の打ち切りデータは、実際 130 くらいで故障したなら、区間を 140 まで延伸した方が、より精度の高い表ができます。これを実践するかどうか？
　試験は打ち切らない方が精度の良い結果が出ますが、実際は時間もお金もかかります。区間をどこまでとするのが、妥当な区間域をどう決めるか？
　実は、

R(t)の計算より、打ち切る区間の決め方の方が大事ですし、打切りデータがある場合は実際ほとんどです。
ここは技術者の腕の見せ所で、計算や演習問題には出て来ません。

寿命予測はここが難しいと言えます。

以上、「信頼度の推定方法がわかる(寿命分布なし、区間分け有、打切り有りの場合)」を解説しました。

待機系の信頼性・故障率がよくわかる

【1】要素の種類

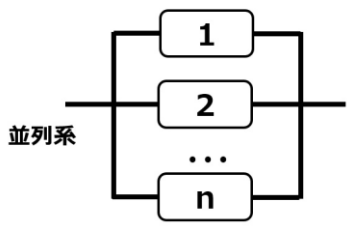
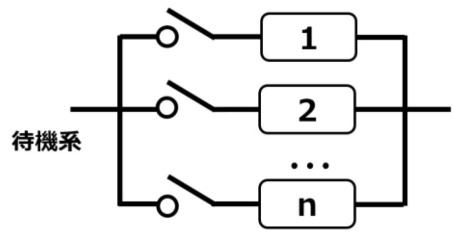
信頼性工学では、以下の４つの要素について、それぞれ信頼度、故障率、MTTF を計算します。

★　要素の種類

①直列系　　②並列系　　③待機系　　④多数決系

【2】待機系は並列系と比較するとよくわかる

(1) 並列系と待機系の違い

並列系	待機系
	
並列に並んだ要素がすべて故障しないかぎり正常であるから、信頼性が上がる！	並列機能が独立しているのが並列系で 並列機能が独立せず関係性があるのが待機系です。

待機系は、ブロック１も２も別々に動作していいのが並列系で、
あるブロック１が壊れたら直ちに並列する他のブロック２に切り替えるのが待機系です。

(2) 並列系と待機系は数式で書くと全く違うものになる

並列系は、ただの掛け算で確率、故障率、確率密度関数を計算する。 t=t1+t2 と考える時は (右辺)側の t1,t2 で考える。直観的でわかりやすいし、馴染み深い。

待機系は、ただの掛け算で確率、故障率、確率密度関数を計算できない。 t=t1+t2 と考える時は(左辺)側の t1,t2 で考える。畳み込み積分で計算するから、一気に難しくなる。

並列系と待機系では、イメージ図はほとんど同じですが、計算方法が全く違います。

【3】待機系の平均寿命の計算

(1) 信頼度の確率密度関数$f_s(t)$

畳み込み積分で確率密度関数$f_s(t)$を求めます。畳み込み積分については、関連記事で復習しましょう。

【関連記事】【まとめ】畳み込み積分がよくわかる
https://qcplanets.com/method/statistics-method/convolution-integral-summary/

$$f_s(t)=\int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau$$

(2) 平均寿命の計算の例題

２個のブロックが待機系にあり、それぞれのブロックの故障率が指数分布に従うとします。

● $f_1(t)=\lambda_1 e^{-\lambda_1 t}$

● $f_2(t)=\lambda_2 e^{-\lambda_2 t}$

ここで、例題です。

【例題】① $f_s(t)$　を計算せよ。

② MTTF=$\mu=\int_0^\infty t f_s(t)dt$ を計算せよ。

積分すればできます！

(3) ① $f_s(t)$計算の解法

$$f_s(t)=\int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau=\lambda_1\lambda_2\int_0^t e^{-\lambda_1\tau}e^{-\lambda_2(t-\tau)}d\tau=\lambda_1\lambda_2 e^{-\lambda_2 t}\int_0^t e^{-(\lambda_1-\lambda_2)\tau}d\tau=\frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_2}e^{-\lambda_2 t}(1-e^{-(\lambda_1-\lambda_2)t})$$

②平均寿命μの計算

$$\mu=\int_0^\infty tf_s(t)dt=\frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_2}\int_0^\infty te^{-\lambda_2 t}(1-e^{-(\lambda_1-\lambda_2)t})dt$$

部分積分すると

$$=\frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_2}\left\{\left[-\frac{1}{\lambda_2^2}e^{-\lambda_2 t}-\frac{1}{\lambda_2}te^{-\lambda_2 t}\right]_0^\infty+\left[-\frac{1}{\lambda_1^2}e^{-\lambda_1 t}-\frac{1}{\lambda_1}te^{-\lambda_1 t}\right]_0^\infty\right\}=\frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_2}\left\{\frac{1}{\lambda_2^2-\lambda_1^2}\right\}=\frac{1}{\lambda_1}+\frac{1}{\lambda_2}$$

まとめると、

平均寿命$\mu=\frac{1}{\lambda_1}+\frac{1}{\lambda_2}$

(4) 平均寿命を並列系と待機系で比較する</h3>

並列系の平均寿命は関連記事で計算しています。確認ください。

【関連記事】並列系の信頼性・故障率がよくわかる
https://qcplanets.com/method/reliability/parallel/

結果を比較すると、下表になります。

―	直列系	並列系	待機系
μ	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda_1}+\frac{1}{\lambda_2}-\frac{1}{\lambda_1+\lambda_2}$	$\frac{1}{\lambda_1}+\frac{1}{\lambda_2}$

並列系より待機系の方が、平均寿命が長くなる

【4】待機系はさらに種類がある

①熱予備　②温予備　③冷予備

それぞれの違いについては関連記事で解説していきます。

【5】絶対解いて欲しい演習問

確率密度関数と平均寿命を求める問題で、畳み込み積分、指数関数からガンマ分布が復習できる良問です。

【例題】要素数 n で、どの要素の確率密度関数が、同一のλによる指数分布関数$f_i(t)=\lambda e^{-\lambda t}$に従うとき

(1) $f_s(t)=\frac{\lambda^n t^{n-1}}{\Gamma(n)}e^{-\lambda t}$ を示せ。

(2) MTTF=$\mu=\int_0^\infty tf_s(t)dt=\frac{n}{\lambda}$ を確認せよ。

関連記事で解説しています。確認すると解けるはず。

【関連記事】ガンマ分布がよくわかる
https://qcplanets.com/method/statistics-method/gamma-distribution/

以上、「待機系の信頼性・故障率がよくわかる」を解説しました。

待機系の冷予備系の信頼性・故障率がわかる

【1】待機系の種類

待機系ではさらに３つに分類できます。信頼性工学の専門書レベルですが、比較すると理解が深まるので解説します。

①冷予備系　②温予備系　③熱予備系

３つの違いを表にします。

―	種類	特徴
①	冷予備系	待機中は放置、稼働しない。稼働しない分の信頼度は並列系より高くなる。
②	温予備系	冷予備系と温予備系の間。予備電源だけ入れて待機状態のイメージ。
③	熱予備系	並列系と同じで、待機中も稼働。いつでも切り替え可能だが、信頼度は並列系程度。

名前に、温度が関係する文字があるのは、対応する系の設備や施設と関連があるからです。

イメージは、

待機中は放置、稼働しない。稼働しない分の信頼度は並列系より高くなる。

信頼度$R_s(t)$の式も若干異なります。それぞれ解説しまし。

●冷予備系：$R_s(t)= R_1(t)+\alpha\int_0^t f_1(\tau)R_2(t-\tau)d\tau$

●温予備系：$R_s(t)= R_1(t)+\alpha\int_0^t f_1(\tau)R_2\left(t-\tau+\frac{\tau}{k}\right)d\tau$

●熱予備系：$R_s(t)= R_1(t)+\alpha R_2(t)\left(1-R_{1(t)}\right)$

【2】冷予備系とは

(1)冷予備系とは

●平均寿命は、待機系の方が並列系より長い ●冷予備系が待機系より ●熱予備系に近いほど並列系の信頼性に近づく(低下する)

待機系については、本冊子「待機系の信頼性・故障率がよくわかる」で解説しています。

(2) 冷予備系の信頼度$R_s(t)$

●冷予備系：$R_s(t)= R_1(t)+\alpha\int_0^t f_1(\tau)R_2(t-\tau)d\tau$　(0≦α≦1)

ですが、式の意味を解説すると、

信頼度は、１系の信頼度と、１系が故障して２系に切り替わる際の両系の信頼度の和（畳み込み積分）として表現する。

２系は１系の影響を受けて稼働する・しないを決めるので、並列系のように単純な信頼度の積ではなく、畳み込み積分で計算します。

実例として、$R_1(t)=e^{-\lambda_1 t}$、$R_2(t)=e^{-\lambda_2 t}$ として、$R_s(t)$ を求めましょう。

まず、計算が大変そうな$\int_0^t f_1(\tau)R_2(t-\tau)d\tau$を計算すると、

$$\int_0^t f_1(\tau)R_2(t-\tau)d\tau = \int_0^t \lambda_1 e^{-\lambda_1\tau}e^{-\lambda_2(t-\tau)}d\tau=\frac{\lambda_1 e^{-\lambda_2 t}}{\lambda_1-\lambda_2}\left(1-e^{-(\lambda_1-\lambda_2)t}\right)$$

よって、$R_s(t)$は

$$R_s(t)= e^{-\lambda_1 t}+\alpha\frac{\lambda_1 e^{-\lambda_2 t}}{\lambda_1-\lambda_2}\left(1-e^{-(\lambda_1-\lambda_2)t}\right)$$

ここで、α=0の場合、(切り替わりが失敗した場合)
$R_s(t)=\ e^{-\lambda_1 t}$と1系の信頼度だけで、$R_s(t)$が最小の場合となります。

以降、α＝1（切り替わりが確実に成功する場合）について計算すると、

$R_s(t)=\ e^{-\lambda_1 t}+\frac{\lambda_1 e^{-\lambda_2 t}}{\lambda_1-\lambda_2}\left(1-e^{-(\lambda_1-\lambda_2)t}\right)=\frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}\left(-\lambda_2 e^{-\lambda_1 t}+\lambda_1 e^{-\lambda_2 t}\right)$

(3) 冷予備系の確率密度関数$f_s(t)$
次に確率密度関数$f_s(t)$を計算します。導出方法が２つあります。

①　信頼度$R_s(t)$の微分から
②　１系、２系の確率密度関数の関係式か

①信頼度$R_s(t)$の微分から導出　　　$f_s(t)=-\frac{dR_s(t)}{dt}=\frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_2}\left(e^{-\lambda_2 t}-e^{-\lambda_1 t}\right)$

【3】冷予備系の平均寿命の計算
(1) 平均寿命μの導出

$\mu=\int_0^{\infty} t f_s(t)dt=\frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_2}\int_0^{\infty} te^{-\lambda_2 t}(1-e^{-(\lambda_1-\lambda_2)t})dt$

$=\frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_2}\left(\left[-\frac{1}{\lambda_2^2}e^{-\lambda_2 t}-\frac{1}{\lambda_2}te^{-\lambda_2 t}\right]_0^{\infty}+\left[-\frac{1}{\lambda_1^2}e^{-\lambda_1 t}-\frac{1}{\lambda_1}te^{-\lambda_1 t}\right]_0^{\infty}\right)=\frac{1}{\lambda_1}+\frac{1}{\lambda_2}$

(2) 冷予備系(待機系)と並列系の比較

―	直列系	並列系	待機系
μ	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda_1}+\frac{1}{\lambda_2}-\frac{1}{\lambda_1+\lambda_2}$	$\frac{1}{\lambda_1}+\frac{1}{\lambda_2}$

並列系より待機系の方が、平均寿命が長くなる

次は、温予備系と熱予備系を見て、待機系の３つの違いを比較して理解しましょう。
以上、「待機系の冷予備系の信頼性・故障率がわかる」を解説しました。

待機系の温予備系の信頼性・故障率がわかる

【1】待機系の種類
　待機系ではさらに３つに分類できます。本冊子、「待機系の冷予備系の信頼性・故障率がわかる」で確認ください。

【2】温予備系とは
(1) 温予備系とは

●平均寿命は、待機系の方が並列系より長い
●冷予備系が待機系より
●熱予備系に近いほど並列系の信頼性に近づく(低下する)

(2) 温予備系の信頼度

$R_s(t)= R_1(t)+\alpha\int_0^t f_1(\tau)R_2\left(t-\tau+\frac{\tau}{k}\right)d\tau$　(0≦α≦1、1≦k)

ですが、式の意味を解説すると、

冷予備系と式が違うのは、$R_2\left(+\frac{\tau}{k}\right)$があること。待機中に要素を使用状態にするため、少し時間が経過しているという意味を持たせるために$R_2\left(+\frac{\tau}{k}\right)$がある。

実例として、α =1、$R_1(t)= e^{-\lambda_1 t}$、$R_2(t)= e^{-\lambda_2 t}$として、$R_s(t)$を求めましょう

まず、計算が大変そうな$\int_0^t f_1(\tau)R_2\left(t-\tau+\frac{\tau}{k}\right)d\tau$を計算すると、

$\int_0^t f_1(\tau)R_2\left(t-\tau+\frac{\tau}{k}\right)d\tau=\int_0^t \lambda_1 e^{-\lambda_1\tau}e^{-\lambda_2(t-\left(1-\frac{1}{k}\right)\tau)}d\tau=\frac{\lambda_1 e^{-\lambda_2 t}}{\lambda_1-\lambda_2\left(1-\frac{1}{k}\right)}(1-e^{-\left(\lambda_1-\lambda_2\left(1-\frac{1}{k}\right)\right)t})$

よって、$R_s(t)$は

$R_s(t)= e^{-\lambda_1 t}+\frac{\lambda_1 e^{-\lambda_2 t}}{\lambda_1-\lambda_2\left(1-\frac{1}{k}\right)}(1-e^{-\left(\lambda_1-\lambda_2\left(1-\frac{1}{k}\right)\right)t})$

以降、$\lambda=\lambda_1=\lambda_2$について計算すると、

$R_s(t)= e^{-\lambda t}+\frac{\lambda e^{-\lambda t}}{\lambda-\lambda\left(1-\frac{1}{k}\right)}(1-e^{-\left(\lambda-\lambda\left(1-\frac{1}{k}\right)\right)t})=(1+k)e^{-\lambda t}-ke^{-\lambda\left(1+\frac{1}{k}\right)t}$

(3)温予備系の信頼度$R_s(t)$と並列系の信頼度$R_p(t)$の比較

待機系の信頼度は、並列系の信頼度より高い。温予備系の信頼度$R_s(t)$は並列系の信頼度$R_p(t)$より高いかどうか確認しましょう。

【関連記事】並列系の信頼度$R_p(t)$の導出
https://qcplanets.com/method/reliability/parallel/

$R_p(t)=R_1+R_2-R_1R_2=2e^{-\lambda t}-e^{-2\lambda t}$

(4)温予備系の信頼度$R_s(t)$と並列系の信頼度$R_p(t)$の比較

$R_s(t)-R_p(t)=(1+k)e^{-\lambda t}-ke^{-\lambda\left(1+\frac{1}{k}\right)t}-(2e^{-\lambda t}-e^{-2\lambda t})=(k-1)e^{-\lambda t}-ke^{-\lambda\left(1+\frac{1}{k}\right)t}+e^{-2\lambda t}$

$=e^{-\lambda t}\left\{k\left(1-e^{-\frac{\lambda}{k}t}\right)+(e^{-\lambda t}-1)\right\}\geqq 0$

(ここで、$g(t)=k\left(1-e^{-\frac{\lambda}{k}t}\right)+\left(e^{-\lambda t}-1\right)(k\geqq 1)$とおくと、$g'^{(t)}=\lambda\left(e^{-\frac{\lambda}{k}t}-e^{-\lambda t}\right)>0$より、$g(t)\geqq g(0)=)$

より、確かに、

待機系の信頼度は、並列系の信頼度より高い。温予備系の信頼度$R_s(t)$は並列系の信頼度$R_p(t)$より高いことが確認できた！

(5) 温予備系の確率密度関数 $f_s(t)$

次に確率密度関数$f_s(t)$を計算します。導出方法が２つあります。

① 信頼度$R_s(t)$の微分から

② １系、２系の確率密度関数の関係式から

２つ目の「１系、２系の確率密度関数の関係式から」は大変なので、信頼度$R_s(t)$微分から計算しましょう。

②信頼度$R_s(t)$の微分から導出

$$f_s(t)=-\frac{dR_s(t)}{dt}=(1+k)\lambda e^{-\lambda t}-\lambda(k+1)e^{-\lambda\left(1+\frac{1}{k}\right)t}$$

少し複雑な微分ですが、良い計算練習にはなります。

【3】 温予備系の平均寿命の計算

(1) 平均寿命μの導出

$$\mu=\int_0^{\infty}tf_s(t)dt=\int_0^{\infty}\left\{(1+k)\lambda te^{-\lambda t}-\lambda(k+1)te^{-\lambda\left(1+\frac{1}{k}\right)t}\right\}dt=(1+k)\lambda\int_0^{\infty}\left\{te^{-\lambda t}-te^{-\lambda\left(1+\frac{1}{k}\right)t}\right\}dt$$

$$=(1+k)\lambda\left\{\left[-\frac{1}{\lambda}te^{-\lambda t}-\frac{1}{\lambda^2}e^{-\lambda t}\right]_0^{\infty}-\left[-\frac{1}{a}te^{-at}-\frac{1}{a^2}e^{-at}\right]_0^{\infty}\right\}\quad \left(a=\lambda\left(1+\frac{1}{k}\right)\right)$$

$$=(1+k)\lambda\left\{\frac{1}{\lambda^2}-\frac{k^2}{\lambda^2(1+k)^2}\right\}=\frac{2k+1}{\lambda(1+k)}=\frac{1}{\lambda}\left(1+\frac{k}{1+k}\right)$$

まとめると、

平均寿命$\mu=\frac{1}{\lambda}\left(1+\frac{k}{1+k}\right)$

(2) 冷予備系と温予備系の平均寿命μの比較

●冷予備系の平均寿命$\mu_1=\frac{1}{\lambda_1}+\frac{1}{\lambda_2}=\frac{2}{\lambda}$

●温予備系の平均寿命$\mu_2=\frac{1}{\lambda}\left(1+\frac{k}{1+k}\right)$

平均寿命を比較すると、

$$\mu_1-\mu_2=\frac{2}{\lambda}-\frac{1}{\lambda}\left(1+\frac{k}{1+k}\right)=\frac{1}{\lambda(k+1)}>0$$

より、確かに、

冷予備系の方が温予備系より平均寿命が長いことがわかった

温予備系と熱予備系を見て、待機系の３つの違いを比較して理解しましょう。

以上、「待機系の温予備系の信頼性・故障率がわかる」を解説しました。

待機系の熱予備系の信頼性・故障率がわかる

【1】待機系の種類

待機系ではさらに３つに分類できます。本冊子、「待機系の冷予備系の信頼性・故障率がわかる」で確認ください。

【2】温予備系とは

(1) 熱予備系とは

●平均寿命は、待機系の方が並列系より長い
●冷予備系が待機系より
●熱予備系に近いほど並列系の信頼性に近づく(低下する)

(2) 熱予備系の信頼度

$R_s(t)= R_1(t)+\alpha R_2(t)(1-R_1(t))$ $(0 \leqq \alpha \leqq 1)$

熱予備系は、予備系も通常稼働しているので、信頼度の式は、待機系より並列系に近い

信頼度$R_s(t)$、確率密度関数$f_s(t)$は並列系の記事ですでに解説済です。式の違いは、
●並列系　　　　　　：$R_s(t)= R_1(t)+R_2(t)(1-R_1(t))$
●待機系・熱予備系：$R_s(t)= R_1(t)+\alpha R_2(t)(1-R_1(t))$ $(0 \leqq \alpha \leqq 1)$
とαの有無の違いだけです。

並列系の記事を参考に、信頼度$R_s(t)$、確率密度関数$f_s(t)$を計算します。

【関連記事】並列系の信頼性・故障率がよくわかる
https://qcplanets.com/method/reliability/parallel/

【3】熱予備系の平均寿命の計算

(1) 平均寿命μの導出

$\mu = \int_0^{\infty} t f_s(t)dt$ で計算できますが、並列系の平均寿命の式を一部変えるだけで求められます。平均寿命μは、

●並列系　　　　　　：$\mu=\frac{1}{\lambda_1}+\frac{1}{\lambda_2}-\frac{1}{\lambda_1+\lambda_2}$

●待機系・熱予備系：$\mu=\frac{1}{\lambda_1}+\frac{\alpha}{\lambda_2}-\frac{\alpha}{\lambda_1+\lambda_2}$

とαの有無の違いだけです。

【4】待機系（冷予備系・温予備系・熱予備系）の平均寿命を比較

(1) 平均寿命を列挙

待機系の３つの状態「冷予備系」、「温予備系」、「熱予備系」の平均寿命が計算できたので、比較してみましょう。比較しやすくするために、$\lambda=\lambda_1=\lambda_2$とします。

●冷予備系：$\mu = \frac{1}{\lambda_1}+\frac{1}{\lambda_2}=\frac{2}{\lambda}$

●温予備系：$\mu = \frac{1}{\lambda}\left(1+\frac{k}{1+k}\right)$

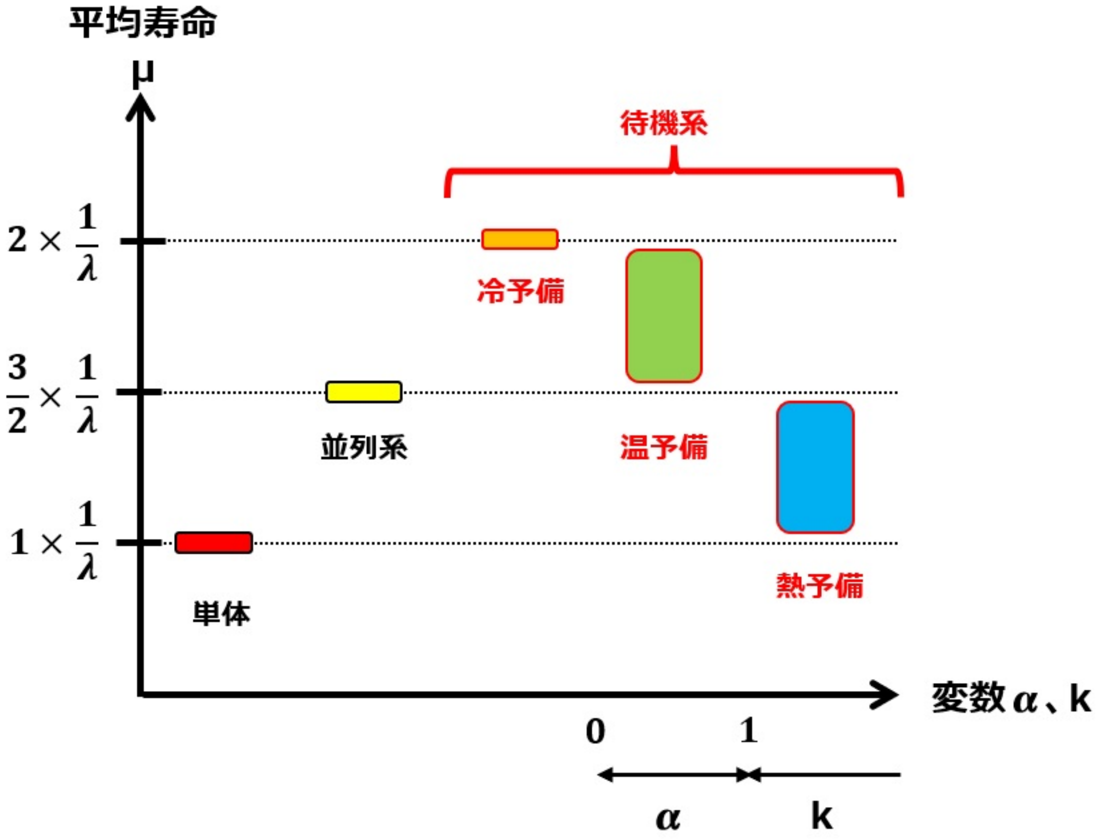
●熱予備系：$\mu = \frac{1+\alpha}{\lambda}-\frac{2\alpha}{\lambda}$

$(0 \leqq \alpha \leqq 1$、$1 \leqq k)$

●単体　　：　$\mu = \frac{1}{\lambda}$

●並列系　　：　$\mu = \frac{1}{\lambda_1}+\frac{1}{\lambda_2}-\frac{1}{\lambda_1+\lambda_2}=\frac{3}{2\lambda}$

(2) 平均寿命を比較
上の 5 つの場合の大小関係を調べ、比較すると下図のようになります。下図で各系の違いを理解しましょう。



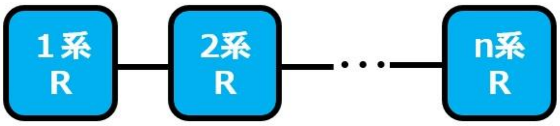
以上、「待機系の熱予備系の信頼性・故障率がわかる」を解説しました。

要素の故障が非独立な系の信頼性がわかる(非修理系)

【1】独立な場合と非独立な場合の違い
(1) 独立系とは
中学生でも理解できるほど、簡単なのは、要素間の信頼性は独立だからです

①要素間の故障は独立している
②全体系の信頼度は要素の信頼度の積で計算できる
③簡単に計算できる

①例題
次の信頼度はどう計算しますか？



単純に、R×R×R×…×R=R^nと掛け算すれば出ますよね。この単純さは、各要素が独立して一定の信頼度(故障率)をもっていると仮定しているからです。

(2) 非独立系とは
では、各要素が互いに影響し合うと、全体の信頼度はどうやって計算しますか？ イメージは、

故障要素が増すと、故障していない要素にかかる負荷が増加するため、故障率が増大するので、各要素の故障は独立できなくなる

難しそうですよね。

①要素間の故障は独立できない
②全体系の信頼度は要素間の関係式から求めないと算出できない
③計算が一気に難しくなる

要素の故障も故障の状態や時間によって、信頼度が変化するので、微分方程式を立てて、全体の信頼度を計算する必要があります。

【2】非独立な系の信頼性でおさえたい３つのパターン
ＱＣプラネッツでは次の３つの非独立系の信頼度を解説します。

①▸非修理系
②不完全修理系
③完全修理系

【3】解法パターン
どのパターンも次の 3 つの流れで解いていきます。同じ解法なので、安心して理解できます！

①シャノン線図を描く
②微分方程式を作る
③ラプラス変換して計算

【4】非修理系を学ぶ

(1) 例題

n要素並列系を考える。各要素は同種とする。系にかかる全負荷は時間的に一定であるが、故障要素が増加するとともに、故障していない要素にかかる負荷は増加し、故障率が増大するとする。また、各要素の故障率をμ_iとする。

下図のように各状態S_iを以下のように定義する。

● S_0：どの要素も故障していない状態

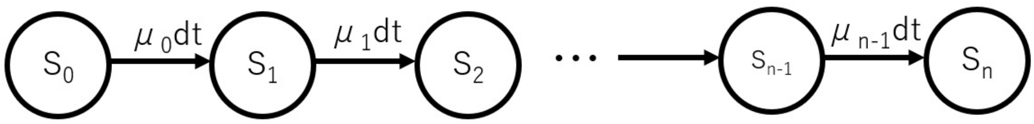
● S_1：1 個故障した状態

●・・・

● S_n：：n 個すべて故障した状態

(1)各要素の故障率$P_i(t)$を求めよ。

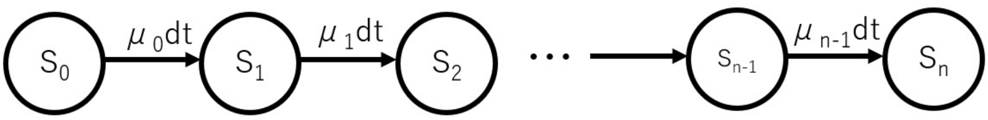
(2)系全体の信頼度$R_s(t)$を求めよ。



(2)解法

①シャノン線図を描く

　シャノン線図といいますが、別に何でもよく、各要素の関係性がわかる図であればＯＫです。下図のとおりですね。



②微分方程式を作る

ある時刻tから$t+dt$だけ時間が経つと、各要素の故障率$P_i(t)$はどう変化するか、図を見ながら関係式を作ります。

1 つ丁寧に考えます。

(i) $P_0(t)$は状態が 0 の場合の故障率なので、状態が変化すると$P_0(t)$は変化します。

ある時刻tから$t+dt$だけ時間が経つと、

●(A)状態 0 のままの確率⇒$P_0(t+dt)$

●(B)状態 1 に移動する確率⇒$\mu_0 P_0(t)dt$

の 2 つがあるので、

$P_0(t+dt)$は次の式で表現できます。

$P_0(t+dt)= P_0(t)-\mu_0 P_0(t)dt$

両辺をdtで割ると、

$\frac{dP_0(t)}{dt}=-\mu_0 P_0(t)$　⇒微分方程式になりましたね！

もう 1 つ丁寧に考えます。

(ii) $P_1(t)$は状態が 1 の場合の故障率なので、状態が変化すると$P_1(t)$は変化します。

ある時刻tから$t+dt$だけ時間が経つと、

●(A)状態 1 のままの確率⇒$P_1(t+dt)$

●(B)状態 0 から移動する確率⇒$\mu_0 P_0(t)dt$

●(C)状態 2 に移動する確率⇒$\mu_1 P_1(t)dt$

の 3 つがあるので、

$P_1(t+dt)$は次の式で表現できます。
$P_1(t+dt)$= $P_1(t)+\mu_0 P_0(t)dt-\mu_1 P_1(t)dt$
両辺をdtで割ると、

$\frac{dP_1(t)}{dt}=\mu_0 P_0(t)-\mu_1 P_1(t)$　⇒微分方程式になりましたね！
この式は$i=1,\dots,n-1$ で同様となります。図で言うと端でない真ん中のところです。

そして、最後のnも丁寧に考えます。
(iii) $P_n(t)$は状態がnの場合の故障率なので、状態が変化すると$P_n(t)$は変化します。
ある時刻tから$t+dt$だけ時間が経つと、
●(A)状態nのままの確率⇒$P_n(t)$
●(B)状態$n-1$から来る確率⇒$\mu_{n-1}P_{n-1}(t)dt$
の 2 つがあるので、
$P_n(t+dt)$は次の式で表現できます。
$P_n(t+dt)$= $P_n(t)-\mu_{n-1}P_{n-1}(t)dt$
両辺をdtで割ると、

$\frac{dP_n(t)}{dt}=P_n(t)-\mu_{n-1}P_{n-1}(t)$　⇒微分方程式になりましたね！

以上まとめると、

● $\frac{dP_0(t)}{dt}=-\mu_0 P_0(t)$

● $\frac{dP_1(t)}{dt}=\mu_0 P_0(t)-\mu_1 P_1(t)$

・・・

● $\frac{dP_n(t)}{dt}=P_n(t)-\mu_{n-1}P_{n-1}(t)$

なお、初期条件は
$P_0(t)$=1
$P_i(t)$=0 $(i=1,\dots,n)$
連立微分方程式ができました。

③ ラプラス変換して計算

●$P_0(t)$　: $\frac{dP_0(t)}{dt}=-\mu_0 P_0(t)$をラプラス変換すると$sP_0-P_0(0)=-\mu_0 P_0$ から $P_0=\frac{1}{s+\mu_0}$ よって、$P_0(t)=e^{-\mu_0 t}$

●$P_1(t)$　: $\frac{dP_1(t)}{dt}=\mu_0 P_0(t)-\mu_1 P_1(t)$ をラプラス変換すると$sP_1-P_1(0)=\mu_0 P_0-\mu_1 P_1$, $P_1=\frac{\mu_0 P_0}{s+\mu_1}=\frac{\mu_0}{s+\mu_1}\frac{1}{s+\mu_0}$

$P_1=\frac{\mu_0}{\mu_1-\mu_0}\left(\frac{1}{s+\mu_0}-\frac{1}{s+\mu_1}\right)$ よって、$P_1(t)=\frac{\mu_0}{\mu_1-\mu_0}(e^{-\mu_0 t}-e^{-\mu_1 t})$
と言う感じで解けます。
i=2 以上は複雑なので割愛しますが、同じ解法で解けます。是非やってみてください。

以上、「要素の故障が非独立な系の信頼性がわかる(非修理系)」を解説しました。

要素の故障が非独立な系の信頼性がわかる(完全修理系)</div>

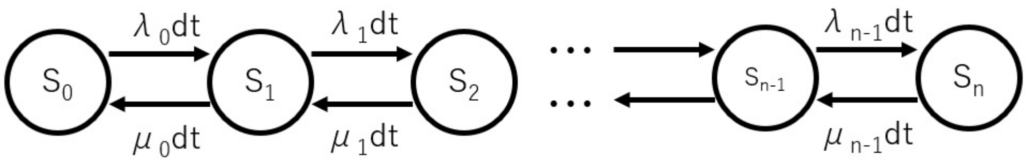
【1】独立な場合と非独立な場合の違い
本冊子「要素の故障が非独立な系の信頼性がわかる(非修理系)」で解説していますので確認ください。

【2】非独立な系の信頼性でおさえたい３つのパターン
本冊子「要素の故障が非独立な系の信頼性がわかる(非修理系)」で解説していますので確認ください。

【3】解法パターン
本冊子「要素の故障が非独立な系の信頼性がわかる(非修理系)」で解説していますので確認ください。
では、「完全修理系」を解説します！

【4】完全修理系を学ぶ
(1) 例題

n要素並列系を考える。各要素は同種とする。系にかかる全負荷は時間的に一定であるが、故障要素が増加するとともに、故障していない要素にかかる負荷は増加し、故障率が増大するとする。また、各要素の故障率をλ_iと各要素の修復率μ_iをする。
下図のように各状態S_iを以下のように定義する。
● S_0：どの要素も故障していない状態
● S_1：1 個故障した状態
●・・・
● S_n：：n 個すべて故障した状態
(1)各要素の故障率$P_i(t)$を求めるための微分方程式を作れ。
(2)各要素が平衡状態になったときの、各要素の故障率$P_n(t)$を求めよ。
(3) λ_iとμ_iはどちらが大きくないといけないか？



(2)解法
①シャノン線図を描く
シャノン線図といいますが、別に何でもよく、各要素の関係性がわかる図であればＯＫです。上図のとおりですね。
ある時刻tから$t+dt$だけ時間が経つと、
●(A)状態 0 のままの確率⇒$P_0(t+dt)$
●(B)状態 1 に移動する確率⇒$\mu_0 P_0(t)dt$

②微分方程式を作る
ある時刻tから$t+dt$だけ時間が経つと、各要素の故障率$P_i(t)$はどう変化するか、図を見ながら関係式を作ります。

各要素の故障率は、故障と修復の関係を式に書けばＯＫです。
●$P_0(t+dt)=\ P_0(t)-(\lambda P_0(t)dt-\mu P_1(t)dt)$
●$P_1(t+dt)=\ P_1(t)-(\lambda P_1(t)dt-\mu P_2(t)dt)+\ (\lambda P_0(t)dt-\mu P_1(t)dt)$
…
●$P_n(t+dt)=\ P_n(t)+(\lambda P_{n-1}(t)dt-\mu P_n(t)dt)$

両辺をdtで割ると、

●$\frac{dP_0(t)}{dt}$= $-(\lambda P_0(t)-\mu P_1(t))$

●$\frac{dP_11(t)}{dt}$= $-(\lambda P_1(t)-\mu P_2(t))$+ $(\lambda P_0(t)-\mu P_1(t))$

…

●$\frac{dP_n(t)}{dt}$= $(\lambda P_{n-1}(t)dt-\mu P_n(t)dt)$

微分方程式になりましたね！

なお、初期条件は

$P_0(0)$=1

$P_i(0)$=0 $(i=1,\ldots,n)$

$P_0(t)$+ $P_1(t)$+…+$P_n(t)$=1

連立微分方程式ができました。

③　ラプラス変換して計算

実際にラプラス変換すると、

●$sP_0-P_0(0)=-(\lambda P_0-\mu P_1)$

●$sP_1=-(\lambda P_1-\mu P_2)+(\lambda P_0-\mu P_1)$

…

●$sP_i=-(\lambda P_i-\mu P_{i+1})+(\lambda P_{i-1}-\mu P_i)$

…

●$sP_n=(\lambda P_{n-1}-\mu P_n)$

ここで１つ困ったことがありまして、

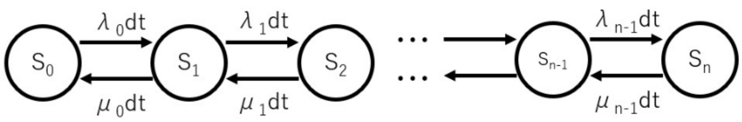
微分方程式から時刻 t の$P_n(t)$の式がでないため、平衡状態についてだけ計算します。

上式を全部足すと

$s(P_1+P_2+\cdots+P_n)$= $P_0(0)$=1

までは解けますが、そこから先は難しいです。

シャント線図見ると、確かに左右の矢印が綺麗に対称性をもって入っているので、非平衡より平衡状態を求めた方がよさそうです。



④平衡状態って？

$\frac{dP_i}{dt}=0$　ってことです。つまり、 ●0= $-(\lambda P_0-\mu P_1)$ ●$0=-(\lambda P_1-\mu P_2)+(\lambda P_0-\mu P_1)$ … ●$0=-(\lambda P_i-\mu P_{i+1})+(\lambda P_{i-1}-\mu P_i)$ … ●$0=(\lambda P_{n-1}-\mu P_n)$

これを解くと、

$$P_1 = \frac{\lambda}{\mu}P_0$$

$$P_2 = \frac{\lambda}{\mu}P_1 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 P_0$$

・・・$P_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{n-1} P_0$

となります。

まとめると

$$P_1 + P_2 + \cdots + P_n = \left(\frac{\lambda}{\mu} + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{n-1}\right) P_0 = 1$$

となるので、等比数列の和の公式から

$$P_0 = \frac{1-\frac{\mu}{\lambda}}{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n - 1}$$

$$P_n = \frac{1-\frac{\mu}{\lambda}}{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n - 1}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{n-1}$$

となります。各要素の故障率P_nが求まりました。

⑤ λ_iとμ_iはどちらが大きくないといけないか？

計算してわかったことは、

$$P_0 = \frac{1-\frac{\mu}{\lambda}}{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n - 1}$$

$$P_n = \frac{1-\frac{\mu}{\lambda}}{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n - 1}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{n-1}$$

がどちらも正でないといけません。確率だから。そのためには、$\lambda > \mu$　でないといけませんね。

完全修理系における平衡状態の故障率が計算できました。

以上、「要素の故障が非独立な系の信頼性がわかる(完全修理系)」を解説しました。

要素の故障が非独立な系の信頼性がわかる(不完全修理系)

【1】独立な場合と非独立な場合の違い
本冊子「要素の故障が非独立な系の信頼性がわかる(非修理系)」で解説していますので確認ください。

【2】非独立な系の信頼性でおさえたい３つのパターン
本冊子「要素の故障が非独立な系の信頼性がわかる(非修理系)」で解説していますので確認ください。

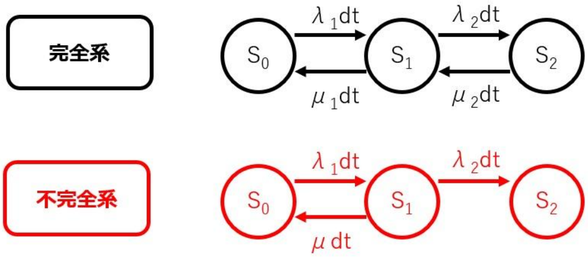
【3】解法パターン
本冊子「要素の故障が非独立な系の信頼性がわかる(非修理系)」で解説していますので確認ください。

【4】不完全修理系を学ぶ
(1) 例題

n要素並列系を考える。各要素は同種とする。系にかかる全負荷は時間的に一定であるが、故障要素が増加するとともに、故障していない要素にかかる負荷は増加し、故障率が増大するとする。また、各要素の故障率をλ_iと各要素の修復率μ_iをする。
下図のように各状態S_iを以下のように定義する。

- S_0：どの要素も故障していない状態
- S_1：1 個故障した状態
- S_2：：2 個すべて故障した状態

(1)各要素の故障率$P_i(t)$を求めるための微分方程式を作れ。
(2)各要素の故障率$P_n(t)$を求めよ。



不完全系は式がややこしいので、状態は 0,1,2 だけとします。

(2)解法
①シャノン線図を描く
シャノン線図といいますが、別に何でもよく、各要素の関係性がわかる図であればＯＫです。

②微分方程式を作る
ある時刻tから$t+dt$だけ時間が経つと、各要素の故障率$P_i(t)$はどう変化するか、図を見ながら関係式を作ります。各要素の故障率は、故障と修復の関係を式に書けばＯＫです。

●$P_0(t+dt)=\ P_0(t)-(\lambda_1 P_0(t)dt-\mu P_1(t)dt)$
●$P_1(t+dt)=\ P_1(t)-(\lambda_2 P_1(t)dt)+\ (\lambda_1 P_0(t)dt-\mu P_1(t)dt)$
●$P_2(t+dt)=\ P_2(t)+(\lambda_2 P_1(t))$
両辺をdtで割ると、

●$\frac{dP_0(t)}{dt}=\ -\lambda_1 P_0(t)+\mu P_1(t)$

●$\frac{dP_1 1(t)}{dt}=\ \lambda_1 P_0(t)\ -(\lambda_2 P_1(t)-\mu P_1(t))$

●$\frac{dP_2(t)}{dt}=\lambda_2 P_1(t)$

微分方程式になりましたね！なお、初期条件は
$P_0(0)$=1
$P_i(t)$=0 ($i=1,2$)
$P_0(t)$+ $P_1(t)$+$P_2(t)$=1
連立微分方程式ができました。

③　ラプラス変換して計算
実際にラプラス変換すると、
●$sP_0-P_0(0)=-\lambda_1P_0+\mu P_1$
●$sP_1=\lambda_1P_0-(\lambda_2P_1-\mu P_1)$
●$sP_2=\lambda_2P_1$

まとめると、

●P_0=$\frac{s+\lambda_2+\mu}{(s+\lambda_1)(s+\lambda_2)+s\mu}$

●P_1=$\frac{\lambda_1}{(s+\lambda_1)(s+\lambda_2)+s\mu}$

●P_2=$\frac{\lambda_1\lambda_2}{s((s+\lambda_1)(s+\lambda_2)+s\mu)}$

綺麗まとまりましたが、ここで１つ困ったことがありまして、

ここから式が煩雑になります。綺麗に因数分解ができないので。

$\frac{1}{(s+\lambda_1)(s+\lambda_2)+s\mu}$が綺麗に$\frac{1}{(s+a)}-\frac{1}{(s+b)}$と定数$a,b$が整数になりません。

2 次方程式$(s+\lambda_1)(s+\lambda_2)+s\mu$ =0 の解が複雑です。なので、文字でおいて解を求める事にします。

④文字でおいて解を求める
まとめると、

●P_0=$\frac{s+\lambda_2+\mu}{(s+\lambda_1)(s+\lambda_2)+s\mu}$=$\frac{A}{s+\alpha}-\frac{B}{s+\beta}$ と定数A,B,α,βをおき､逆ラプラス変換して$P_0(t)=Ae^{-\alpha t}-Be^{-\beta t}$　とします。

●P_1=$\frac{\lambda_1}{(s+\lambda_1)(s+\lambda_2)+s\mu}$=$\frac{C}{s+\alpha}-\frac{D}{s+\beta}$ と定数C,D,α,βをおき､逆ラプラス変換して$P_1(t)=Ce^{-\alpha t}-De^{-\beta t}$　とします。

●P_2=$\frac{\lambda_1\lambda_2}{s((s+\lambda_1)(s+\lambda_2)+s\mu)}$=$\frac{E}{s+\gamma}-\frac{F}{s+\delta}-\frac{G}{s+\varepsilon}$　から$P_2(t)=Ee^{-\gamma t}-Fe^{-\delta t}-Ge^{-\varepsilon t}$　とします。

不完全修理系の解き方が理解できました。けど、計算が煩雑ですね。 だから、解説する教材が少ないのですが、今回解説しました！

以上、「要素の故障が非独立な系の信頼性がわかる(不完全修理系)」を解説しました。

MTTF、MTBF と MTTR が導出できる

【1】MTTF,MTBF と MTTR
(1) MTTF,MTBF と MTTR とは
どれがどれだったっけ？で試験でよく間違える3兄弟表にまとめて、区別して暗記していませんか？

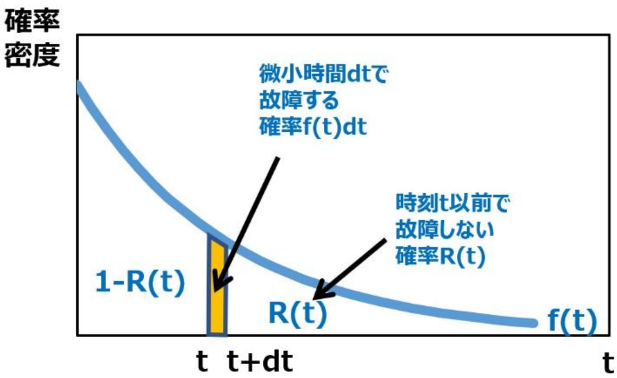
略語	用語	系	公式
MTTF	Mean Time To Failure	非修理系	$\frac{1}{\lambda}$
MTBF	Mean Time Between Failure	修理系	$\frac{1}{\lambda}$
MTTR	Mean Time To Repair	修理系	$\frac{1}{\mu}$

試験対策の公式暗記から、ちゃんと自力で導出できた方がいい！

流れ	MTTF,MTBF	MTTR
(1)	微分方程式を作る	微分方程式を作る
(2)	R(t)の導出	G(t)の導出
(3)	MTTF,MTBF を計算する	MTTR を計算する

上表の流れで解説していきます。

【2】MTTF,MTBF の導出ができる
(1) 微分方程式を作る
故障の時間変化を下図のように考えます。



●図から以下のように定義します。

(i) $R(t)$：時刻 t 以降で故障する確率、つまり、時刻 t までは故障しない確率
(ii) $1-R(t)$：時刻 t までで故障する確率
(iii) $f(t)$：故障確率の確率密度関数で $f(t)=-\frac{dR(t)}{dt}$とする。
(iv) $f(t)dt$：微小時間dtの間で故障する確率(長方形の面積で求める)

ここで、故障率$\lambda(t)$について、微小時間dtとの積$\lambda(t)dt$を
（微小時間の間で故障する面積）÷（時刻 t 以前で故障しない確率）
で計算しましょう。

時刻 t までは故障しなかったけど、微小時間dt経過したら、故障した確率が故障率$\lambda(t)$につながると考えます。

式は次のようになります。この微分方程式を解いていきます。

$\lambda(t)dt=\frac{f(t)dt}{R(t)}$

(2) R(t)の導出

微分方程式 $\lambda(t)dt$=$\frac{f(t)dt}{R(t)}$ を解きます。変形すると $\lambda(t)$=$\frac{f(t)}{R(t)}$

次に、$f(t)=-\frac{dR(t)}{dt}$ を代入します。

$\lambda(t)$ =$-\frac{dR(t)}{R(t)}\frac{1}{dt}$ から $\lambda(t)dt$ =$-\frac{dR(t)}{R(t)}$

両辺を積分すると、

$\int_0^t \lambda(t)dt=\int_0^t -\frac{dR(t)}{dR}=-logR$ から $R(t)=\exp\left(-\int_0^t \lambda(t)dt\right)$ と解けました。

(3) MTTF,MTBF を計算する

MTTF と MTBF は非修理系か修理系かの違いで、計算は同じです。

MTTF と MTBF = $\int_0^\infty tf(t)dt$ですね。

①指数分布の場合で計算する

ここで、$R(t)=\exp(-\lambda t)$、$f(t)=\lambda\exp(-\lambda t)$ とおきます。

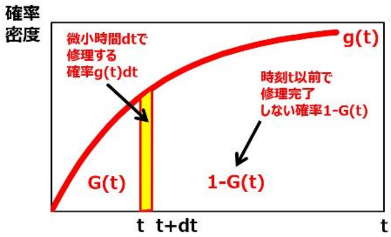
MTTF と MTBF = $\int_0^\infty tf(t)dt$=$\int_0^\infty t\lambda\exp(-\lambda t)dt$=$\lambda\left[-\frac{1}{\lambda}te^{-\lambda t}-\frac{1}{\lambda^2}e^{-\lambda t}\right]_0^\infty$=$\frac{1}{\lambda}$

計算できましたね。全く同じ流れで MTTR も導出します。

【3】MTTR の導出ができる

(1) 微分方程式を作る

故障の時間変化を下図のように考えます。



●図から以下のように定義します。

(i) $1-G(t)$：時刻 t 以降で修理完了する確率、つまり、時刻 t までは修理完了しない確率
(ii) $G(t)$：時刻 t までで修理完了する確率
(iii) $\mathrm{g}(t)$：修理確率の確率密度関数で $\mathrm{g}(t)=\frac{dG(t)}{dt}$とする。
(iv) $\mathrm{g}(t)dt$：微小時間dtの間で修復する確率(長方形の面積で求める)

ここで、修理率$\mu(t)$について、微小時間dtとの積$\mu(t)dt$を

（微小時間の間で修理完了する面積）÷（時刻 t 以前で修理完成しない確率)

で計算しましょう。

時刻 t までは修理完了しなかったけど、微小時間dt経過したら、修理完了した確率が修理率$\mu(t)$につながると考えます。

式は次のようになります。

$$\mu(t)dt = \frac{g(t)dt}{1-G(t)}$$

考え方は同じでも、故障と修理では若干式が変わります。変わった点だけ理解すれば OK です。

●故障：$\lambda(t)dt=\frac{f(t)dt}{R(t)}$

●修理：$\mu(t)dt = \frac{g(t)dt}{1-G(t)}$

この微分方程式を解いていきます。

(2) G(t)の導出</h3>

微分方程式 $\mu(t)dt = \frac{g(t)dt}{1-G(t)}$ を解きます。

変形すると $\mu(t) = \frac{g(t)}{1-G(t)}$

次に、$g(t) = \frac{dG(t)}{dt}$ を代入します。

$\mu(t) = \frac{dG(t)}{1-G(t)}\frac{1}{dt}$ から $\mu(t)dt = \frac{dG(t)}{1-G(t)}$

両辺を積分すると、

$$\int_0^t \mu(t)dt = \int_0^t \frac{dG(t)}{1-G(t)} = -\log\big(1-G(t)\big) \quad (0 < G(t) < 1)$$

$$G(t) = 1 - \exp\left(-\int_0^t \mu(t)dt\right)$$

と解けました。

(3) MTTR を計算する

MTTR = $\int_0^\infty tg(t)dt$ですね。MTTF,MTBF と同じ考えで導出できます。

①指数分布の場合で計算する

ここで、$G(t) = 1-\exp(-\mu t)$、$g(t) = \mu\exp(-\mu t)$ とおきます。

$$\text{MTTR} = \ = \int_0^\infty tg(t)dt = \int_0^\infty t\mu\exp(-\mu t)dt = \mu\left[-\frac{1}{\mu}te^{-\mu t} - \frac{1}{\mu^2}e^{-\mu t}\right]_0^\infty = \frac{1}{\mu}$$

計算できましたね。全く同じ流れで MTTR も導出します。

MTTF,MTBF と MTTR は全く別物ですが、

MTTF,MTBF =$\frac{1}{\lambda}$ ：λは故障率

MTTR=$\frac{1}{\mu}$ ：μは修理率

と同じ感じになります。不思議ですけど。

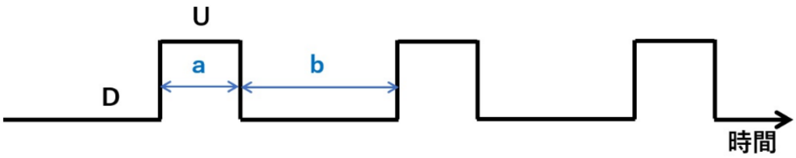
公式暗記不要で、自力で導出できます！

以上、「MTTF、MTBF と MTTR が導出できる」を解説しました。

アベイラビリティがよくわかる

【1】アベイラビリティとは
(1) アベイラビリティとは
　信頼度を高めるには、
「故障しないこと」以外に、
「修理が短時間で終わること」も重要ですね。
動作状態(アップタイムU)と休止状態(ダウンタイムD)の比を取ったものが「アベイラビリティ」です。

$$アベイラビリティ\ A=\frac{アップタイム\ U}{アップタイム\ U+ダウンタイム\ D}$$



(2) アベイラビリティは公式暗記で済ませるな！

結局、
$$ベイラビリティ\ A=\frac{MTBF}{MTBF+MTTR}$$
になりますが、暗記より導出が大事！

それと、

アベイラビリティAは時間tの関数であるが、
$$A(t\to\infty)=\frac{MTBF}{MTBF+MTTR}$$
ばかり試験や教科書しか出ないので、みんなこれを丸暗記して簡単と思ってしまう！

ちゃんとモデル式を立ててからアベイラビリティA(t)を導出しましょう。

(3)アベイラビリティを公式暗記するリスク
　単純な系なら、
$$A=\frac{MTBF}{MTBF+MTTR}$$
でいいのですが、並列系、直列系と応用になると、式が複雑化し、式が理解できなくなります。

モデル式を立ててからアベイラビリティA(t)を導出しましょう。
導出方法がわかれば、どんな系でもアベイラビリティは導出できます。

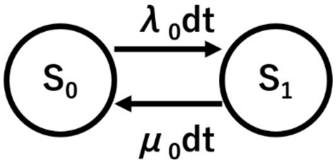
【2】アベイラビリティの導出
　公式暗記で点数稼ぎは短期的には効果がありますが、本質を理解していないのでマズイ！
　1つの系で2つの初期条件の場合から、時間の関数であるアベイラビリティA(t)を作ってみましょう。3つの流れで進めていきます。

1. 基礎要素からモデル式を作る
2. ２つの初期条件でそれぞれアベイラビリティを計算
3. アベイラビリティA(t)をA(t⇒∞)にするとどうなるか？

　なお、わかりやすくするため、指数分布について解説します。
また、本冊子にも説明済ですが、以下を復習しましょう。

1. シャント線図、微分方程式の導出
2. ラプラス変換の基本
3. MTTF,MTBF,MTTRの導出方法

(1) 基礎要素からモデル式を作る
次のような修理を伴う要素を考えます。シャント線図を描きます。



S_0は正常状態、S_1は故障状態、λは故障率、μは修理率とします。ある時刻tにおいて、系が正常状態S_0、故障状態S_1である確率を$P_0(t)$, $P_1(t)$とすると、次の微分方程式が作れます。

●モデル式
$P_0(t+\Delta t)=\ P_0(t)-P_0(t)\lambda\Delta t+P_1(t)\mu\Delta t$
$P_1(t+\Delta t)=\ P_1(t)+P_0(t)\lambda\Delta t-P_1(t)\mu\Delta t$
から

●微分方程式
$\frac{dP_0(t)}{dt}=-\lambda P_0(t)+\mu P_1(t)$

$\frac{dP_1(t)}{dt}=\lambda P_0(t)-\mu P_1(t)$

(2) ２つの初期条件でそれぞれアベイラビリティを計算
２つの初期条件とは、
(A) 時刻 t=0 で系は正常状態⇒$P_0(0)=1, P_1(0)=0$の場合
(B) 時刻 t=0 で系は故障状態⇒$P_0(0)=0, P_1(0)=1$の場合
では、微分方程式をラプラス変換して解いてみましょう。

ラプラス変換すると
$sP_0-P(0)=\ -\lambda P_0+\mu P_1$
$sP_1-P(1)=\ \lambda P_0-\mu P_1$
となります。

(A) 時刻 t=0 で系は正常状態の場合
初期条件を代入して、
$sP_0-1=\ -\lambda P_0+\mu P_1$
$sP_1=\ \lambda P_0-\mu P_1$

この連立方程式を解くと、
$P_0=\frac{s+\mu}{s(s+\mu+\lambda)}=\frac{\mu}{\mu+\lambda}\ \frac{1}{s}+\frac{\lambda}{\mu+\lambda}\frac{1}{s+\mu+\lambda}$

$P_1=\frac{\lambda}{s(s+\mu+\lambda)}=\frac{\lambda}{\mu+\lambda}\ \frac{1}{s}-\frac{\lambda}{\mu+\lambda}\frac{1}{s+\mu+\lambda}$

ラプラス変換から元に戻すと、
$P_0(t)=\frac{\mu}{\mu+\lambda}+\frac{\lambda}{\mu+\lambda}e^{-(\mu+\lambda)t}$
$P_1(t)=\frac{\lambda}{\mu+\lambda}-\frac{\lambda}{\mu+\lambda}e^{-(\mu+\lambda)t}$

次に、アベイラビリティ$A(t)$を考えます。

アベイラビリティ$A(t)$は、時刻tにて稼働状態である確率なので、
$A(t)=\ P_0(t)$となります。よって、
$A(t)=\ \frac{\mu}{\mu+\lambda}+\frac{\lambda}{\mu+\lambda}e^{-(\mu+\lambda)t}$

<u>（B）時刻 t=0 で系は故障状態の場合</u>
初期条件を代入して、
$sP_0=\ -\lambda P_0+\mu P_1$
$sP_1-1=\ \lambda P_0-\mu P_1$

この連立方程式を解くと、

$$P_0=\frac{\mu}{s(s+\mu+\lambda)}=\frac{\mu}{\mu+\lambda}\ \frac{1}{s}-\frac{\mu}{\mu+\lambda}\frac{1}{s+\mu+\lambda}$$

$$P_1=\frac{s+\lambda}{s(s+\mu+\lambda)}=\frac{\lambda}{\mu+\lambda}\ \frac{1}{s}+\frac{\mu}{\mu+\lambda}\frac{1}{s+\mu+\lambda}$$

ラプラス変換から元に戻すと、

$$P_0(t)=\frac{\mu}{\mu+\lambda}-\frac{\mu}{\mu+\lambda}e^{-(\mu+\lambda)t}$$

$$P_1(t)=\frac{\lambda}{\mu+\lambda}+\frac{\mu}{\mu+\lambda}e^{-(\mu+\lambda)t}$$

次に、アベイラビリティ$A(t)$を考えます。

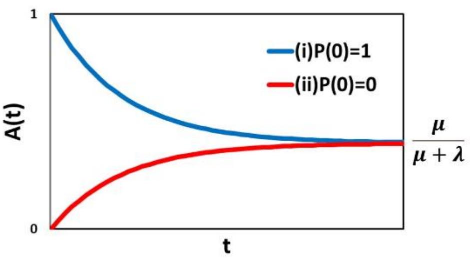
アベイラビリティ$A(t)$は、時刻tにて稼働状態である確率なので、
$A(t)=\ P_0(t)$となります。よって、
$A(t)=\frac{\mu}{\mu+\lambda}-\frac{\mu}{\mu+\lambda}e^{-(\mu+\lambda)t}$

(3) アベイラビリティ$A(t)$を A(t⇒∞)にするとどうなるか？
 2 通りのアベイラビリティを計算しました。

(A) 時刻 t=0 で系は正常状態の場合 $A(t)=\ \frac{\mu}{\mu+\lambda}+\frac{\lambda}{\mu+\lambda}e^{-(\mu+\lambda)t}$

(B) 時刻 t=0 で系は故障状態の場合 $A(t)=\frac{\mu}{\mu+\lambda}-\frac{\mu}{\mu+\lambda}e^{-(\mu+\lambda)t}$

グラフを描いてみましょう。



$\frac{\mu}{\mu+\lambda}$に収束していることがわかります。

しかも、

$$A = \frac{\mathrm{MTBF}}{\mathrm{MTBF+MTTR}} = \frac{\mu}{\mu+\lambda}$$

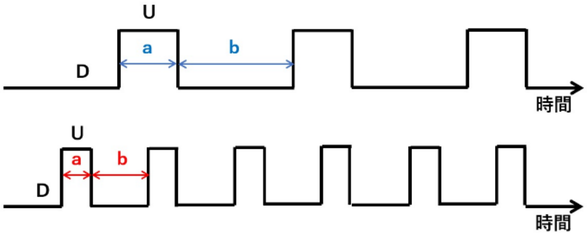
と公式と一致。

【3】アベイラビリティの注意点

アベイラビリティは万能ではなく、次の注意点が必要です。

アベイラビリティは同じでも、故障のしやすさ、しにくさは区別できない。

例をあげます。



アップとダウンの時間比は同じでも、故障頻度は測れない

短期間で故障が頻発しても、復旧が速いと、アベイラビリティは高いと判断する場合があります。

指標は万能ではないので、よく吟味して評価しましょう。

以上、「アベイラビリティがよくわかる」を解説しました。

並列系のアベイラビリティがよくわかる

【1】アベイラビリティとは
本冊子【アベイラビリティがよくわかる】で解説しています。

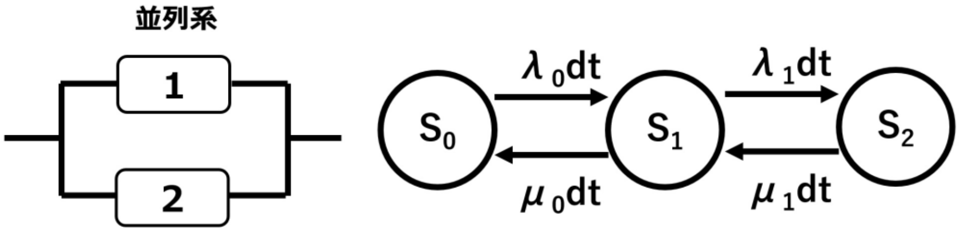
【2】並列系のアベイラビリティ A(t)を導出する例題
本記事では、次の例題を使って、並列系のアベイラビリティを解説します。

1. 並列系のアベイラビリティ A(t)をきちっと解く
2. 並列系のアベイラビリティがいくらになるかを解く
3. 並列系のメリットをアベイラビリティから理解する

なお、わかりやすくするため、指数分布について解説します。

(1) 並列系のアベイラビリティを考える例題

下図のような 2 個の同じ要素からなる並列系において、故障した要素を修理しつつ系を稼働させる場合の信頼度(確率)$P(t)$とアベイラビリティ$A(t)$を求めたい。
　下図のシャント線図で、各状態を定義する。
●S_0：故障しない(故障数 0)の場合、またその確率をP_0とする。
●S_1：故障が 1 個(故障数 1)の場合、またその確率をP_1とする。
●S_2：すべて故障する(故障数 2)の場合、またその確率をP_2とする。
当然、$P_0+P_1+P_2=1$である。
さらに、故障率λ_i、修理率μ_iを下図のシャント線図のように定義する。
(1) 連立微分方程式を作れ
(2) 定常状態(t⇒∞)における、各状態の確率P_iとアベイラビリティ A を計算せよ。
(3) 初期条件を$P_0(0)=1$, $P_1(0)=P_2(0)=0$とし、λ_i=μ_i= λとして、各状態の確率$P_i(t)$とアベイラビリティ A を計算せよ。
(4) (3)の結果を t⇒∞にしたときの各状態の確率$P_i(t)$とアベイラビリティ A を計算せよ。
(5) 並列系にするメリットは何か？アベイラビリティの値から考えよ。

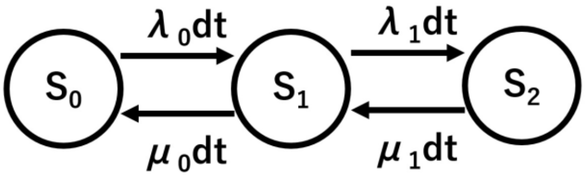


①アベイラビリティ
②並列系のアベイラビリティ A(t)を導出する例題⇒(1)を解説
③定常状態の並列系のアベイラビリティ A を導出⇒(2)を解説
④並列系のアベイラビリティ A(t)を計算⇒(3)を解説
⑤並列系のメリットをアベイラビリティから考える⇒(4)(5)を解説

信頼性工学は以下の 3 点の流れで解いていきます。

1. シャント線図、微分方程式の導出
2. ラプラス変換の基本
3. MTTF,MTBF,MTTR の導出方法

(2) 連立微分方程式を作る
シャント線図を見ながら、微分方程式を作ります。



●微分方程式は下のようになります。

●微分方程式((1)の答え)

$\frac{dP_0(t)}{dt}$=$-\lambda_0 P_0(t)+\mu_0 P_1(t)$

$\frac{dP_1(t)}{dt}$=$\lambda_0\ P_0(t)-(\lambda_1+\mu_0)P_1(t)+\mu_1 P_2(t)$

$\frac{dP_2(t)}{dt}$=$\lambda_1\ P_1(t)-\mu_1 P_2(t)$

(3) 初期条件は決まっている

●初期条件： $P_0(0)=1, P_1(0)=0, P_2(0)=0$ です。

では、微分方程式をラプラス変換して解いてみましょう。

【3】定常状態の並列系のアベイラビリティ A を導出
定常状態とは、t⇒∞で、確率の変化が 0 の場合です。つまり、(1)の微分方程式でいうと

$\frac{dP_i(t)}{dt}$=0 (i=0,1,2) です。

●微分方程式から

$\frac{dP_0(t)}{dt}$=0=$-\lambda_0 P_0(t)+\mu_0 P_1(t)$

$\frac{dP_1(t)}{dt}$=0=$\lambda_0\ P_0(t)-(\lambda_1+\mu_0)P_1(t)+\mu_1 P_2(t)$

$\frac{dP_2(t)}{dt}$=0=$\lambda_1\ P_1(t)-\mu_1 P_2(t)$

$P_0+P_1+P_2=1$

解くと、

●P_1=$\frac{\lambda_0}{\mu_0}P_0$

●P_2=$\frac{\lambda_1}{\mu_1}P_1$

●$P_0+P_1+P_2=1$から、

また、アベイラビリティ A は

動作できる状態の確率をアベイラビリティとすると、すべて故障するP_2以外の確率がアベイラビリティと定義できます。
A=P_0+P_1=1−P_2 と定義できます。

よって、

定常状態の各確率とアベイラビリティ((2)の答え)は

●P_0=$\frac{\mu_0\mu_1}{\mu_0\mu_1+\lambda_0\mu_1+\lambda_0\lambda_1}$

●P_1=$\frac{\lambda_0\mu_1}{\mu_0\mu_1+\lambda_0\mu_1+\lambda_0\lambda_1}$

●P_2=$\frac{\lambda_0\lambda_1}{\mu_0\mu_1+\lambda_0\mu_1+\lambda_0\lambda_1}$

●$A=\frac{\mu_0\mu_1+\lambda_0\mu_1}{\mu_0\mu_1+\lambda_0\mu_1+\lambda_0\lambda_1}$

(2)もできました。

【4】並列系のアベイラビリティ A(t)を計算

(1) 問いを再掲

もう一度、問と微分方程式に戻ります。

(3) 初期条件を$P_0(0)=1$, $P_1(0)=P_2(0)=0$とし、λ_i=μ_i= λとして、各状態の確率$P_i(t)$とアベイラビリティ A を計算せよ。

●微分方程式

・$\frac{dP_0(t)}{dt}$=0=$-\lambda_0 P_0(t)+\mu_0 P_1(t)$

・$\frac{dP_1(t)}{dt}$=0=$\lambda_0\ P_0(t)-(\lambda_1+\mu_0)P_1(t)+\mu_1 P_2(t)$

・$\frac{dP_2(t)}{dt}$=0=$\lambda_1\ P_1(t)-\mu_1 P_2(t)$

・$P_0+P_1+P_2=1$

●初期条件： $P_0(0)=1, P_1(0)=0, P_2(0)=0$

で、λ_i=μ_i= λとしてよいので、微分方程式は

・$\frac{dP_0(t)}{dt}$=$-\lambda P_0(t)+\lambda P_1(t)$

・$\frac{dP_1(t)}{dt}$=$\lambda\ P_0(t)-(2\lambda)P_1(t)+\lambda P_2(t)$

・$\frac{dP_2(t)}{dt}$=$\lambda\ P_1(t)-\lambda P_2(t)$

(2) ラプラス変換して解析

ラプラス変換すると微分方程式は、

●$sP_0-P_0(=1)$=$-\lambda P_0+\lambda P_1$

●sP_1=$\lambda\ P_0-2\lambda P_1+\lambda P_2$

●sP_2=$\lambda\ P_1-\lambda P_2$

$P_0+P_1+P_2=1$

まとめると、

●P_0=$\frac{1}{6}\frac{1}{s+3\lambda}+\frac{1}{2}\frac{1}{s+\lambda}+\frac{1}{3}\frac{1}{s}$

●P_1=$\frac{1}{3s}-\frac{1}{3(s+3\lambda)}$

●P_2=$\frac{1}{3s}-\frac{1}{2(s+\lambda)}+\frac{1}{6}\frac{1}{(s+3\lambda)}$

(3) 確率$R_i(t)$と$A(t)$を解析>
逆ラプラス変換すると

●$P_0(t)=\frac{1}{3}+\frac{1}{2}e^{-\lambda t}+\frac{1}{6}e^{-3\lambda t}$

●$P_1(t)=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}e^{-3\lambda t}$

●$P_2(t)=\frac{1}{3}-\frac{1}{2}e^{-\lambda t}+\frac{1}{6}e^{-3\lambda t}$

アベイラビリティ A(t)は

動作できる状態の確率をアベイラビリティとすると、すべて故障するP_2以外の確率がアベイラビリティと定義できます。
A=P_0+P_1=1−P_2　と定義できます。

よって、アベイラビリティ A(t)は

A(t)= $P_0(t)+P_1(t)=\frac{2}{3}+\frac{1}{2}e^{-\lambda t}-\frac{1}{6}e^{-3\lambda t}$

(3)の答えをまとめると、

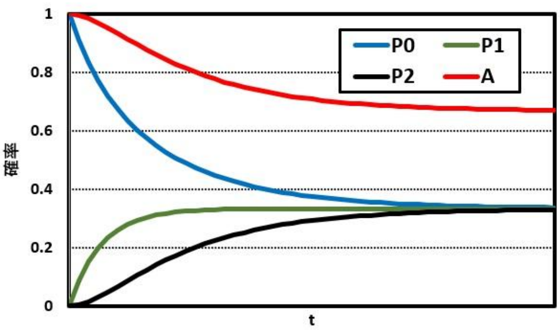
●$P_0(t)=\frac{1}{3}+\frac{1}{2}e^{-\lambda t}+\frac{1}{6}e^{-3\lambda t}$

●$P_1(t)=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}e^{-3\lambda t}$

●$P_2(t)=\frac{1}{3}-\frac{1}{2}e^{-\lambda t}+\frac{1}{6}e^{-3\lambda t}$

A(t)=$\frac{2}{3}+\frac{1}{2}e^{-\lambda t}-\frac{1}{6}e^{-3\lambda t}$

グラフに描くとこんな感じになります。



確率は 1/3 で、アベイラビリティは 2/3 に収束しているのがよくわかりますね。

【5】並列系のメリットをアベイラビリティから考える
問を再掲します。計算した確率とアベイラビリティの時刻 t における極限値を考えます。

(4) (3)の結果を t⇒∞にしたときの各状態の確率$P_i(t)$とアベイラビリティ A を計算せよ。
(5) 並列系にするメリットは何か？アベイラビリティの値から考えよ。

【問を再掲】
(4) (3)の結果を t⇒∞にしたときの各状態の確率$P_i(t)$とアベイラビリティ A を計算せよ。
(5) 並列系にするメリットは何か？アベイラビリティの値から考えよ。

★(4)は(2)の結果に一致する！

問(3)の極限値を計算すると、グラフからも明らかのように、

● $P_0(t)=\frac{1}{3}+\frac{1}{2}e^{-\lambda t}+\frac{1}{6}e^{-3\lambda t}$ $\Rightarrow\frac{1}{3}$
● $P_1(t)=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}e^{-3\lambda t}$ $\Rightarrow\frac{1}{3}$
● $P_2(t)=\frac{1}{3}-\frac{1}{2}e^{-\lambda t}+\frac{1}{6}e^{-3\lambda t}$ $\Rightarrow\frac{1}{3}$
$\mathrm{A(t)}=\frac{2}{3}+\frac{1}{2}e^{-\lambda t}-\frac{1}{6}e^{-3\lambda t}$ $\Rightarrow\frac{2}{3}$

にそれぞれ、収束します。ちなみに、定常状態で計算した確率とアベイラビリティを再掲すると、

定常状態の各確率とアベイラビリティ((2)の答え)は
● $P_0=\frac{\mu_0\mu_1}{\mu_0\mu_1+\lambda_0\mu_1+\lambda_0\lambda_1}=\frac{\lambda^2}{\lambda^2+\lambda^2+\lambda^2}=\frac{1}{3}$
● $P_1=\frac{\lambda_0\mu_1}{\mu_0\mu_1+\lambda_0\mu_1+\lambda_0\lambda_1}=\frac{1}{3}$
● $P_2=\frac{\lambda_0\lambda_1}{\mu_0\mu_1+\lambda_0\mu_1+\lambda_0\lambda_1}=\frac{1}{3}$
● $A=\frac{\mu_0\mu_1+\lambda_0\mu_1}{\mu_0\mu_1+\lambda_0\mu_1+\lambda_0\lambda_1}=\frac{2}{3}$

となり、

$P_i(t)$, $A(t)$から極限値を求めた結果と、定常状態から求めた結果が一致しました！

★(5)の並列系のメリットとは？

アベイラビリティは$\frac{2}{3}$に収束しました。

もし、並列系でなく、故障率λ＝修理率μなら、アベイラビリティはいくらになりますか？

単純に$\frac{1}{2}$ですよね。

並列系にするとアベイラビリティは向上する。今回の例では、$\frac{1}{2}$から$\frac{2}{3}$に向上するのがわかる。

これ、結構大事な考察結果です。並列系するメリットがアベイラビリティからもわかるわけです。

並列系のアベイラビリティはこれだけやれば十分！

以上、「並列系のアベイラビリティがよくわかる」を解説しました。

直列系のアベイラビリティがよくわかる

【1】アベイラビリティとは
本冊子【アベイラビリティがよくわかる】で解説しています。

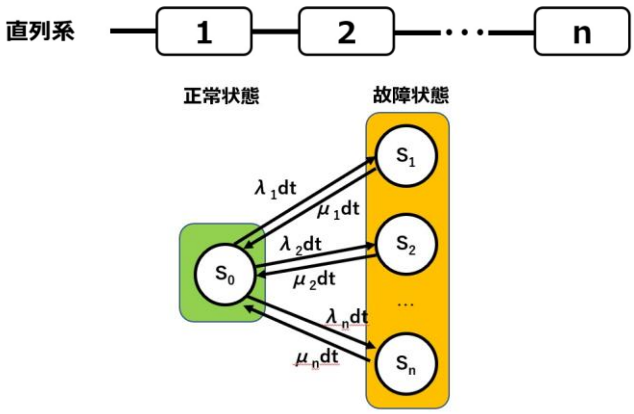
【2】直列系のアベイラビリティ A(t)を導出する例題
本記事では、次の例題を使って、直列系のアベイラビリティを解説します。

1. 直列系のアベイラビリティ A(t)をきちっと解く
2. 直列系のアベイラビリティがいくらになるかを解く
3. 直列系のメリットをアベイラビリティから理解する

なお、わかりやすくするため、指数分布について解説します。

(1) 直列系のアベイラビリティを考える例題

下図のような n 個の同じ要素からなる直列系において、故障した要素を修理しつつ系を稼働させる場合の信頼度(確率)P(t)とアベイラビリティ A(t)を求めたい。
　下図のシャント線図で、各状態を定義する。
●S_0：故障しない(故障数 0)の場合、またその確率をP_0とする。
●S_i $(i = 1, \ldots, n)$：要素iが故障の場合、またその確率をP_iとする。
直列系では、ある要素iが故障の場合、その修理中他の要素は停止させるとする。
当然、$P_0 + P_1 + \cdots + P_n = 1$である。さらに、故障率$\lambda_i$、修理率$\mu_i$を下図のシャント線図のように定義する。



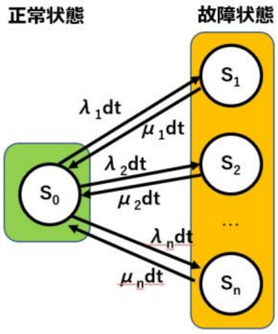
(1) 連立微分方程式を作れ
(2) 定常状態(t⇒∞)における、各状態の確率P_iととアベイラビリティ A を計算せよ。
(3) 初期条件を$P_0(0) = 1$, $P_1(0)=\cdots=P_i(0)=\cdots=P_n(0)=0$ とし、$\lambda_i=\lambda, \mu_i=\mu$として、各状態の確率$P_i(t)$とアベイラビリティ$A(t)$を計算せよ。
(4) 直列系にするメリットは何か？アベイラビリティの値から考えよ。

①アベイラビリティ
②直列系のアベイラビリティ A(t)を導出する例題⇒(1)を解説
③定常状態の直列系のアベイラビリティ A を導出⇒(2)を解説
④直列系のアベイラビリティ A(t)を計算⇒(3)を解説
⑤直列系のメリットをアベイラビリティから考える⇒(4)を解説

信頼性工学は以下の 3 点の流れで解いていきます。ＱＣプラネッツの全記事共通です。

1. シャント線図、微分方程式の導出
2. ラプラス変換の基本
3. MTTF,MTBF,MTTR の導出方法

(2) 連立微分方程式を作る
シャント線図を見ながら、微分方程式を作ります。



●直列系のシャント線図は理解が難しいです。
直列系なので、どれか１つが故障すると、すべてが動作停止となるため、
１：動作中
２：停止中
の２つしかありません。だから、左がS_0、右がS_iとなります。
なお、どの要素で故障するかわからないので、右の状態が$i = 1, \ldots, n$と縦に並列しています。

●微分方程式は下のようになります。

●微分方程式((1)の答え)

$\frac{dP_0(t)}{dt}$=$-(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i)P_0(t) + \sum_{i=1}^{n} \mu_i P_i(t)$

$\frac{dP_1(t)}{dt}$=$\lambda_1 P_0(t) - \mu_1 P_1(t)$

・・・

$\frac{dP_n(t)}{dt}$=$\lambda_n P_0(t) - \mu_n P_n(t)$

$P_0 + P_1 + \cdots + P_n = 1$

(3) 初期条件は決まっている

●初期条件： $P_0(0) = 1, P_1(0) = 0, \ldots, P_n(0) = 0$ です。

では、微分方程式をラプラス変換して解いてみましょう。

【3】定常状態の並列系のアベイラビリティ A を導出
定常状態とは、t⇒∞で、確率の変化が 0 の場合です。つまり、(1)の微分方程式でいうと

$\frac{dP_i(t)}{dt}$=0 (i=0,1,⋯,n)　　です。

●微分方程式から

$\frac{dP_0(t)}{dt}$=0=$-(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i)P_0(t) + \sum_{i=1}^{n} \mu_i P_i(t)$

$\frac{dP_1(t)}{dt}$=0=$\lambda_1 P_0(t) - \mu_1 P_1(t)$

・・・

$\frac{dP_n(t)}{dt}$=0=$\lambda_n P_0(t) - \mu_n P_n(t)$

$P_0 + P_1 + \cdots + P_n = 1$

解くと、

●$P_i=\frac{\lambda_i}{\mu_i}P_0(i=1,2,\ldots,n)$

●$P_0+P_1+P_2=1$から、

$P_0+\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\lambda_i}{\mu_i}\right)P_0=1$

よって、

$$P_0=\frac{1}{1+\sum_{i=1}^{n}\frac{\lambda_i}{\mu_i}}$$

$$P_i=\frac{\frac{\lambda_i}{\mu_i}}{1+\sum_{i=1}^{n}\frac{\lambda_i}{\mu_i}}(i=1,2,\ldots,n)$$

となります。

また、アベイラビリティ A は

動作できる状態の確率をアベイラビリティとすると、A=P_0と定義できます。

よって、定常状態の各確率とアベイラビリティ((2)の答えは

●$A=\frac{1}{1+\sum_{i=1}^{n}\frac{\lambda_i}{\mu_i}}$

(2)もできました。

【4】直列系のアベイラビリティ A(t)を計算

(1) 問いを再掲

もう一度、問と微分方程式に戻ります。

(3) 初期条件を$P_0(0)=1$, $P_1(0)=\cdots=P_i(0)=\cdots=P_n(0)=0$ とし、$\lambda_i=\lambda, \mu_i=\mu$として、各状態の確率$P_i(t)$とアベイラビリティ$A(t)$を計算せよ。

●微分方程式(再掲)から　$\lambda_i=\lambda, \mu_i=\mu$として

$\frac{dP_0(t)}{dt}=0=-n\lambda P_0(t)+\mu\sum_{i=1}^{n}P_i(t)$

$\frac{dP_1(t)}{dt}=0=\lambda P_0(t)-\mu P_1(t)$

・・・

$\frac{dP_n(t)}{dt}=0=\lambda P_0(t)-\mu P_n(t)$

$P_0+P_1+\cdots+P_n=1$

(2) ラプラス変換して解析

ラプラス変換すると微分方程式は、

●$sP_0-P_0(=1)=-n\lambda P_0+\mu\sum_{i=1}^{n}P_i$

●$sP_1=\lambda P_0-\mu P_1$

・・・

●$sP_i=\lambda P_0-\mu P_i$

●$sP_2=\lambda P_0-\mu P_n$

また、$\sum_{i=1}^{n} P_i = 1 - P_0$を使うと、$P_0$が簡単に計算できます。
●$sP_0 - P_0(=1) = -n\lambda P_0 + \mu \sum_{i=1}^{n} P_i \quad \rightarrow \; sP_0 - 1 = -n\lambda P_0 + \mu(1 - P_0)$
そして、P_iは
●$sP_i = \frac{\lambda}{s+\mu} P_0 = \frac{\lambda(\mu+1)}{(s+\mu)(s+n\lambda+\mu)}$

まとめると、
●$P_0 = \frac{\mu+1}{s+n\lambda+\mu}$
●$sP_i = \frac{\lambda(\mu+1)}{(s+\mu)(s+n\lambda+\mu)}$

(3)逆ラプラス変換する
まとめると、

●$P_0 = \frac{\mu+1}{s+n\lambda+\mu}$
●$sP_i = \frac{\lambda(\mu+1)}{(s+\mu)(s+n\lambda+\mu)}$=$\frac{\mu+1}{n}\frac{1}{s+\mu} - \frac{\mu+1}{n}\frac{1}{s+n\lambda+\mu}$

(4) 確率$R_i(t)$と$A(t)$を解析
逆ラプラス変換すると

●$P_0(t) = (\mu+1)e^{-(n\lambda+\mu)t}$
●$P_i(t)$ ==$\frac{\mu+1}{n}e^{-\mu t} - \frac{\mu+1}{n}e^{-(n\lambda+\mu)t}$

計算は正しいですが、$P_0(t)$=1 でなく、$\mu+1$とずれます。これは今後課題解決します！
とにかく、解き方は並列系と同じ流れで解けることを理解しましょう。
アベイラビリティ A(t)は $A(t) = P_0(t) = (\mu+1)e^{-(n\lambda+\mu)t}$

(3)の答えをまとめると、

●$P_0(t) = (\mu+1)e^{-(n\lambda+\mu)t}$
●$P_i(t)$ ==$\frac{\mu+1}{n}e^{-\mu t} - \frac{\mu+1}{n}e^{-(n\lambda+\mu)t}$

$$A(t) = P_0(t) = (\mu+1)e^{-(n\lambda+\mu)t}$$

できましたね。

【4】直列系のメリットをアベイラビリティから考える

【問を再掲】
(4) 直列系にするメリットは何か？アベイラビリティの値から考えよ

(2)の解で定常状態のアベイラビリティ A は $A = \frac{1}{1+\sum_{i=1}^{n}\frac{\lambda_i}{\mu_i}}$ λ_i=λ, μ_i=μ とおくと、$A = \frac{1}{1+n\frac{\lambda}{\mu}}$ となり、

要素の個数 n を増やすと、アベイラビリティ A は低下します。

直列系ですから、1つでも故障すると全体が動作できません。それだけ、故障リスクが増大するため、アベイラビリティが低下することとつながっていますね。

直列系のメリットよりかは、デメリットがアベイラビリティからもよく理解できました。

以上、「直列系のアベイラビリティがよくわかる」を解説しました。

並列系のアベイラビリティがよくわかる(修理系の一部が無い場合)</div>

考え方は関連記事と同じですが、計算がもっと大変でした。計算を頑張ったので解説します！ちょっと応用になると計算が大変になるため、解説がない場合が多いです。でも、頑張れば解けるので読んでください。

【1】並列系のアベイラビリティ A(t)を導出する例題

本記事では、次の例題を使って、並列系のアベイラビリティを解説します。

1. 並列系のアベイラビリティ A(t)をきちっと解く
2. 並列系のアベイラビリティがいくらになるかを解く
3. 並列系のメリットをアベイラビリティから理解する

なお、わかりやすくするため、指数分布について解説します。

(1) 並列系のアベイラビリティを考える例題

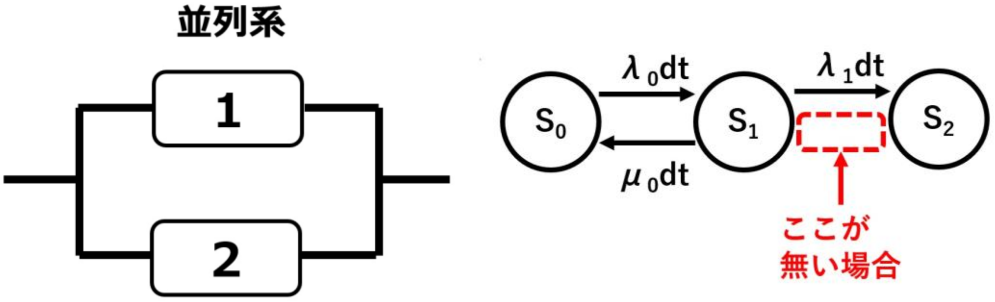
下図のような 2 個の同じ要素からなる並列系において、故障した要素を修理しつつ系を稼働させる場合の信頼度(確率)$P(t)$とアベイラビリティ$A(t)$を求めたい。

下図のシャント線図で、各状態を定義する。

●S_0：故障しない(故障数 0)の場合、またその確率をP_0とする。
●S_1：故障が 1 個(故障数 1)の場合、またその確率をP_1とする。
●S_2：すべて故障する(故障数 2)の場合、またその確率をP_2とする。

当然、$P_0+P_1+P_2=1$である。

さらに、故障率λ_i、修理率μ_iを下図のシャント線図のように定義する。



(1) 連立微分方程式を作れ
(2) 定常状態(t⇒∞)における、各状態の確率P_iとアベイラビリティ A を計算せよ。
(3) 初期条件を$P_0(0)=1$, $P_1(0)=P_2(0)=0$とし、λ_i=μ_i= λとして、各状態の確率$P_i(t)$とアベイラビリティ A を計算せよ。
(4) (3)の結果を t⇒∞にしたときの各状態の確率$P_i(t)$とアベイラビリティ A を計算せよ。

図をよくみると、状態S_2から状態S_1へ修理する矢印がありません。矢印が 2 方向ない場合を今回解説します。

①アベイラビリティ
②並列系のアベイラビリティ A(t)を導出する例題⇒(1)を解説
③定常状態の並列系のアベイラビリティ A を導出⇒(2)を解説
④並列系のアベイラビリティ A(t)を計算⇒(3)(4)を解説

信頼性工学は以下の 3 点の流れで解いていきます。ＱＣプラネッツの全記事共通です。

1. シャント線図、微分方程式の導出
2. ラプラス変換の基本
3. MTTF,MTBF,MTTR の導出方法

(2) 連立微分方程式を作る

シャント線図を見ながら、微分方程式を作ります。

●微分方程式((1)の答え)

$\frac{dP_0(t)}{dt}$=$-\lambda_0 P_0(t)+\mu_0 P_1(t)$

$\frac{dP_1(t)}{dt}$=$\lambda_0\ P_0(t)-(\lambda_1+\mu_0)P_1(t)$

$\frac{dP_2(t)}{dt}$=$\lambda_1\ P_1(t)$

(3) 初期条件は決まっている

●初期条件： $P_0(0)=1, P_1(0)=0, P_2(0)=0$ です。

では、微分方程式をラプラス変換して解いてみましょう。

【2】定常状態の並列系のアベイラビリティ A を導出

定常状態とは、t⇒∞で、確率の変化が 0 の場合です。つまり、(1)の微分方程式でいうと$\frac{dP_i(t)}{dt}$=0 (i=0,1,2)です。

●微分方程式

$\frac{dP_0(t)}{dt}$=0=$-\lambda_0 P_0(t)+\mu_0 P_1(t)$

$\frac{dP_1(t)}{dt}$=0 $=\lambda_0\ P_0(t)-(\lambda_1+\mu_0)P_1(t)$

$\frac{dP_2(t)}{dt}$=0 $=\lambda_1\ P_1(t)$

$P_0+P_1+P_2=1$

解くと、

●P_0 =0

●P_1 =0

●P_2 =0

となりますが、$P_0+P_1+P_2=1$が成立しません。

どういうこと？ →定常解が存在しないから、定常状態にはならない！ということですね！

また、アベイラビリティ A は

動作できる状態の確率をアベイラビリティとすると、すべて故障するP_2以外の確率がアベイラビリティと定義できます。$P_0+P_1+P_2=1$から

A=$P_0+P_1=1-P_2$と定義できます。

よって、

ですが、定常状態がないため、定常時のアベイラビリティ A は 0 と存在しないみたいです。

(2)もできました。

【3】並列系のアベイラビリティ A(t)を計算

(1) 問いを再掲

もう一度、問と微分方程式に戻ります。

(3) 初期条件を$P_0(0)=1,\ P_1(0)=P_2(0)=0$とし、$\lambda_i$=$\mu_i$= λとして、各状態の確率$P_i(t)$とアベイラビリティ A を計算せよ。

微分方程式（再掲）　λ_i=μ_i=　λとして、

$\frac{dP_0(t)}{dt}$=$-\lambda P_0(t)+\lambda P_1(t)$

$\frac{dP_1(t)}{dt}$=$0=\lambda P_0(t)-2\lambda P_1(t)$

$\frac{dP_2(t)}{dt}$=$0=\lambda P_1(t)$

●初期条件：$P_0(0)=1, P_1(0)=0, P_2(0)=0$

(2)　ラプラス変換して解析
ラプラス変換すると微分方程式は、
●$sP_0-P_0(=1)$=$-\lambda P_0+\lambda P_1$
●sP_1=$\lambda\ P_0-2\lambda P_1$
●sP_2=$\lambda\ P_1$
3 つの両辺を足すと

$$P_0+P_1+P_2=\frac{1}{s}$$

●P_0=$\dfrac{\frac{5-\sqrt{5}}{10}\lambda}{s+\frac{3+\sqrt{5}}{2}\lambda}$+$\dfrac{\frac{5+\sqrt{5}}{10}\lambda}{s+\frac{3-\sqrt{5}}{2}\lambda}$

●P_1=$\dfrac{1}{\sqrt{5}}\dfrac{1}{s+\frac{3-\sqrt{5}}{2}\lambda}$-$\dfrac{1}{\sqrt{5}}\dfrac{1}{s+\frac{3+\sqrt{5}}{2}\lambda}$

●P_2=$\dfrac{\lambda^2}{s}$+$\dfrac{-\frac{1}{2}+\frac{3}{2\sqrt{5}}}{s+\frac{3+\sqrt{5}}{2}}\lambda^2$-$\dfrac{\frac{1}{2}+\frac{3}{2\sqrt{5}}}{s+\frac{3-\sqrt{5}}{2}}\lambda^2$

(3)　確率$R_i(t)$と$A(t)$を解析>
逆ラプラス変換すると

各確率$P_i(t)$は

●$P_0(t)$=$\frac{5-\sqrt{5}}{10}\lambda e^{-\frac{3+\sqrt{5}}{2}}\lambda t$+$\frac{5+\sqrt{5}}{10}\lambda e^{-\frac{3-\sqrt{5}}{2}}\lambda t$

●$P_1(t)$=$\frac{\lambda}{\sqrt{5}}(e^{-\frac{3-\sqrt{5}}{2}\lambda t}-e^{-\frac{3+sqrt5}{2}\lambda t}$

●$P_2(t)$=λ^2+$\lambda^2(-\frac{1}{2}+\frac{3}{2\sqrt{5}})e^{-\frac{3+\sqrt{5}}{2}\lambda t}$-$\lambda^2(\frac{1}{2}+\frac{3}{2\sqrt{5}})e^{-\frac{3-\sqrt{5}}{2}\lambda t}$

ちなみに、$P_0+P_1+P_2=1$となっていませんから、定常状態にはならないんでしょうね。

アベイラビリティ A(t)は

動作できる状態の確率をアベイラビリティとすると、すべて故障するP_2以外の確率がアベイラビリティと定義できます。
A=P_0+P_1=1$-P_2$　と定義できます。

よって、アベイラビリティA(t)は

$A(t)$= $P_0(t)$+ $P_1(t)$

$A(t)$=$\frac{3-\sqrt{5}}{10}\lambda e^{-\frac{3+\sqrt{5}}{2}\lambda t}$+$\frac{3+\sqrt{5}}{10}\lambda e^{-\frac{3-\sqrt{5}}{2}\lambda t}$

(3)の答えをまとめると、

各確率$P_i(t)$は

•$P_0(t)$=$\frac{5-\sqrt{5}}{10}\lambda e^{-\frac{3+\sqrt{5}}{2}}\lambda t$+$\frac{5+\sqrt{5}}{10}\lambda e^{-\frac{3-\sqrt{5}}{2}}\lambda t$

•$P_1(t)$=$\frac{\lambda}{\sqrt{5}}(e^{-\frac{3-\sqrt{5}}{2}\lambda t}-e^{-\frac{3+sqrt5}{2}\lambda t}$

•$P_2(t)$=λ^2+$\lambda^2(-\frac{1}{2}+\frac{3}{2\sqrt{5}})e^{-\frac{3+\sqrt{5}}{2}\lambda t}$-

$\lambda^2(\frac{1}{2}+\frac{3}{2\sqrt{5}})e^{-\frac{3-\sqrt{5}}{2}\lambda t}$

◎$A(t)$=$\frac{3-\sqrt{5}}{10}\lambda e^{-\frac{3+\sqrt{5}}{2}\lambda t}$+$\frac{3+\sqrt{5}}{10}\lambda e^{-\frac{3-\sqrt{5}}{2}\lambda t}$

できましたね。

【4】並列系のメリットをアベイラビリティから考える
問を再掲します。計算した確率とアベイラビリティの時刻 t における極限値を考えます。

(4) (3)の結果を t⇒∞にしたときの各状態の確率$P_i(t)$とアベイラビリティ A を計算せよ。

<div class="pre">
t⇒∞にしたときの各状態の確率¥(P_i(t)¥)とアベイラビリティ¥(A(t)¥)を計算すると、

●P_0 =0
●P_1 =0
●$P_2 = \lambda^2$
●$A = 0$

となり、$P_0 + P_1 + P_2 = 1$となりません。定常状態にならないんでしょうね。

以上、「並列系のアベイラビリティがよくわかる(修理系の一部が無い場合)」を解説しました。

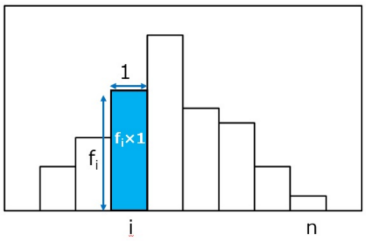
信頼性工学がよくわかる(離散系と連続系まとめて理解できる)

【1】離散系と連続系があるけど、連続系で勉強すべき

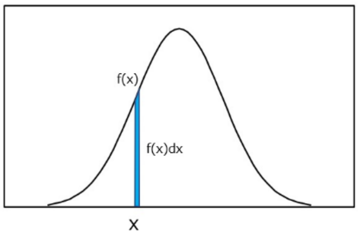
(1) 初心者は離散系の方が理解しやすい

離散系とは

ヒストグラムで表現され、個数と度数を掛け算して合計するやり方。
初心者向け。



$$\sum_{i=1}^{n} f_i \times 1$$



$$\int_0^x f(x)dx$$

＜離散系＞　＜連続系＞

よくヒストグラムが出て、個別の度数を長方形の面積で計算すればわかる！
程度なので、計算も簡単で、理解しやすい！

(2) 連続系は初心者には難しい

連続系とは

関数で表現され、積分して計算するやり方。高度な数学を使うので難しい。

苦手な積分が出て来るし、関数も複雑な式になるから計算が難しく、理解できない！

(3) 信頼性工学は連続系が学びやすい

実は、信頼性工学をマスターするには、

連続系を主として理解して、その一例を離散系で学ぶスタンスが必要です。

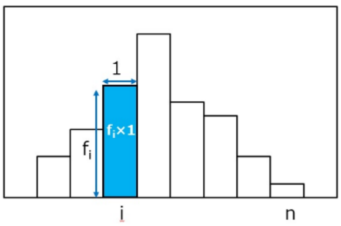
なぜなら、離散系と連続系にはそれぞれの良し悪しがあります。

-	離散系	連続系
わかりやすさ	すぐ理解できる	理解が難しい
強み	実データ向き	理論向き
弱み	一般化、抽象化しにくい	一般化、抽象化しやすく 理論が体系的に学べる
信頼性工学をマスターするには	後でもいい	先に理解する

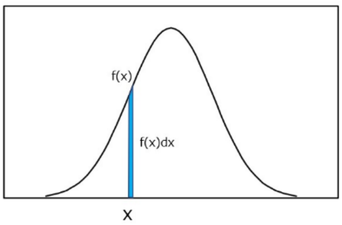
(4) ポイントは　Σと積分の違いだけ

離散系と連続系の関係性が見えないから、別々に理解しがち。でも、まとめて理解したい！

やってみましょう。



$$\sum_{i=1}^{n} f_i \times 1$$

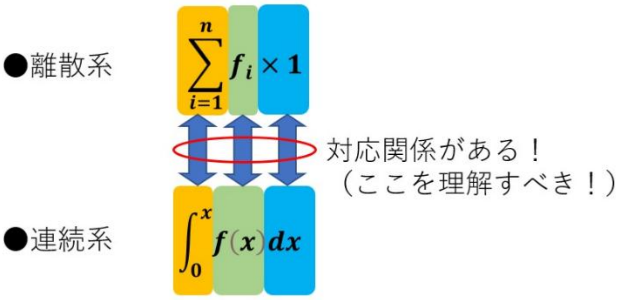


$$\int_0^x f(x)dx$$

離散系と連続系は図を見ると考え方は同じで、Σか積分∫かの違いだけです。

Σか積分∫かの違いだけで
●不良率、信頼度
●MTTF,MTBF,MTTR
と信頼性工学の基本セットがまとめて理解できます。

式でいうと具体的には、下図のとおりです。



では、個々に解説していきます。

【2】離散系、連続系の不良率、信頼度をまとめて理解する

(1) 離散系、連続系の不良率をまとめて理解する

●離散系： $F(n)=\sum_{i=1}^{n} f_i$

●連続系： $F(x)=\int_0^x f(x)dx$

上図を見て、式は基本同じであることを理解しましょう。

(2) 離散系、連続系の信頼度をまとめて理解する

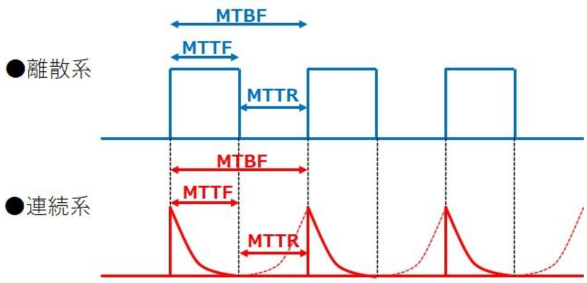
信頼度 R は、基本 R=1-F です。

●離散系： $R(n)=1-F(n)$
●連続系： $F(x)=1-F(x)$

【3】離散系、連続系の MTTF,MTBF,MTTR をまとめて理解する

(1) MTTF,MTBF,MTTR を図でまとめて理解する

離散系、連続系の MTTF,MTBF,MTTR を図でまとめて理解すると下図になります。



(2) 離散系、連続系の MTTF,MTBF をまとめて理解する

離散系と連続系の式は基本、同じであることを意識して確認しましょう。

●離散系：MTTF(MTBF)= $\sum_{i=1}^{n} t_i f_i (\times 1)$

●連続系：MTTF(MTBF)= $\int_0^{\infty} xf(x)dx$

Σと積分∫、t_iとx、$f_i(\times 1)$ と$f(x)dx$ が対応していますね。

本冊子「【必読】MTTF,MTBF と MTTR が導出できる」にもあるように、よく MTTF,MTBF=$\frac{1}{\lambda}$を使います。導出していますので、確認ください。

(3) 離散系、連続系の MTTR をまとめて理解する

離散系、連続系の MTTF,MTBF,MTTR の図を確認します。

●離散系：MTTR= $\sum_{i=1}^{n} t_i g_i (\times 1)$

●連続系：MTTR= $\int_{0}^{\infty} x g(x) dx$

(gは修理に関する関数)

Σと積分∫、t_iとx、$g_i(\times 1)$ と$g(x)dx$ が対応していますね。

本冊子「【必読】MTTF,MTBF と MTTR が導出できる」、よく MTTR=$\frac{1}{\mu}$を使います。

これで、離散系と連続系が混乱せず整理して理解できました。

以上、「信頼性工学がよくわかる(離散系と連続系まとめて理解できる)」を解説しました。

信頼性工学ができる(離散系と連続系まとめて演習)

—	離散系	連続系
非修理系	Ⅰ	Ⅱ
修理系	Ⅲ	Ⅳ

「離散系、連続系」と「非修理系、修理系」の4パターンをまず区別してマスターしましょう。整理して理解しましょう。非修理系の離散系と連続系の演習問題をやってみましょう。

【1】非修理系の離散系の演習問題

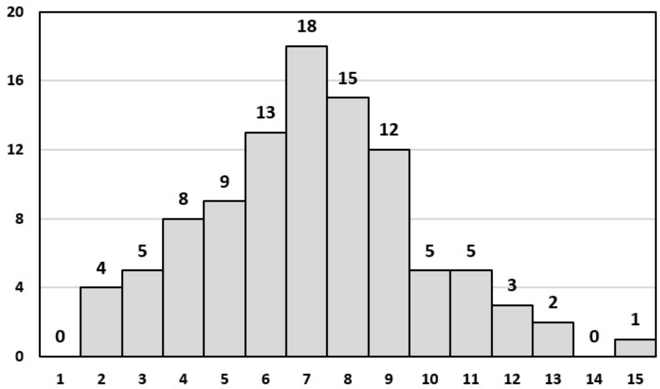
(1) 例題

ある電子部品(サンプル数100)の寿命値を下図のようにヒストグラムにまとめた。

① 時間2における信頼度R(2)はいくらか。

② B_{10}はいくらか。

③ MTTFはいくらか。



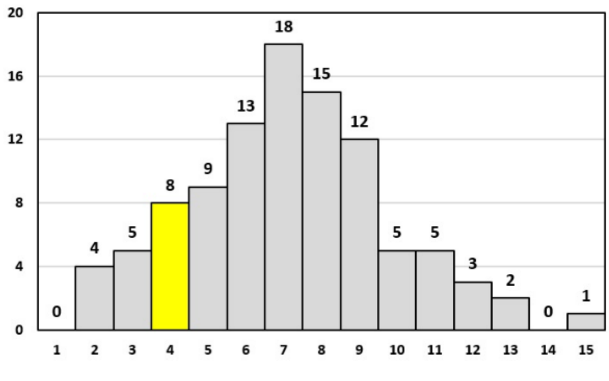
(2) 解法

①は、時刻2以上で壊れていないサンプル数を考えれば信頼度Rが計算できます。

R(2)=(100-4)/100=96%

②はサンプル数100のうちの10%の10個が壊れる時間なので、時刻4～5の間にB_{10}が来ます。よって、

B_{10}=3+(4-3)×(1/8)=3.125



③　MTTFはヒストグラムの長方形の面積の合計でしたね。

●離散系：MTTF(MTBF)=$\sum_{i=1}^{n} t_i f_i(\times 1)$

よって、

MTTF=1×0+2×4+3×5+4×8+5×9+6×13+7×18+8×15+9×12+10×5+11×5+12×3+13×2+14×0+15×1=714

となります。同じことを、連続系でも解いてみましょう。

【2】非修理系の連続系の演習問題

(1) 例題

ある部品の寿命は次式の指数分布　$f(t) = \lambda e^{-\lambda t} (\lambda = 0.01)$　に従っている。 ① 時間 2 における信頼度 R(2)はいくらか。 ② B_{10} はいくらか。 ③ MTTF はいくらか。

(2)解法

①は、時刻 2 以上で壊れていないサンプル数を考えれば信頼度 R が計算できます。

R(2)=$\int_2^\infty f(t)dt = \int_2^\infty \lambda e^{-\lambda t}dt = -\left[e^{-\lambda t}\right]_2^\infty = e^{-2\lambda} = e^{-0.02}$=98%

(2)はサンプル数 100 のうちの 10%の 10 個が壊れる時間なので、

0.1=$\int_0^{B_{10}} f(t)dt = -\left[e^{-\lambda t}\right]_0^{B_{10}}$　から　0.09=$e^{-0.01B_{10}}$　より　B_{10}=10.54

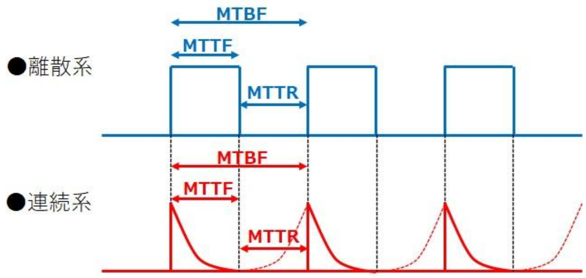
(3)MTTF は積分でしたね。

●連続系：　MTTF= $\int_0^\infty tf(t)dt = \lambda\int_0^\infty te^{-\lambda t}dt = -\lambda\left[\frac{1}{\lambda}te^{-\lambda t} + \frac{1}{\lambda^2}e^{-\lambda t}\right]_2^\infty = \frac{1}{\lambda}$=100

離散系も連続系も問いが同じなので、解き方は同じです。 でも連続系の積分が、しんどく感じるかもしれませんが、そこは慣れです。

【2】修理系の離散系と連続系の演習問題

MTBF,MTTR,アベイラビリティを計算する演習問題です。離散系と連続系の違いは下図で確認しましょう。



これから解く、問題は離散系も連続系も同じです。

(1)離散系

①例題

【問】次の表はある工場機械の稼働と故障・修理の時間を表している。なお、 操業時間＝稼働時間＋故障・修理時間とみること。 (1)月あたりの MTBF はいくらか。 (2)月あたりの MTTR はいくらか。 (3)月あたりのアベイラビリティ A はいくらか。

月	操業時間	故障回数	修理時間/回
1	744	2	6
2	672	2	9
3	744	0	0
4	720	1	12
5	600	2	15
6	720	3	6
計	4200	10	–

②解法
稼働時間と故障・修理時間を計算して表にするとMTTF,MTTRはすぐ計算できます。

月	操業時間	故障回数	修理時間/回	非稼働時間	稼働時間
1	744	2	6	12	732
2	672	2	9	18	654
3	744	0	0	0	744
4	720	1	12	12	708
5	600	2	15	30	570
6	720	3	6	18	702
計	4200	10	–	90	4110
–	–	–	平均	15	685

(1) 上の表の平均稼働時間がMTBFです。よって、MTBF=685
(2) 上の表の平均非稼働時間がMTTRです。よって、MTTR=15
(3) アベイラビリティAは

A=$\frac{MTBF}{MTBF+MTTR}=\frac{685}{685+15}$=97.9%

と計算できました。

(2)連続系
①例題

ある工場機械は故障率と修理率が次の指数分布関数に従っているとする。
故障率： $f(t)=\lambda e^{-\lambda t}$ （λ =0.001(月あたり)）
修理率： $g(t)=\mu e^{-\mu t}$ （μ =0.01(月あたり)）
(1)月あたりのMTBFはいくらか。
(2)月あたりのMTTRはいくらか。
(3)月あたりのアベイラビリティAはいくらか。

②解法
指数分布に従うときは、

実は、

(1)MTBF= $\frac{1}{\lambda}$

(2)MTTR= $\frac{1}{\mu}$

(3)A=$\frac{MTBF}{MTBF+MTTR}$= $\frac{\mu}{\mu+\lambda}$

と公式当てはめて終わりです。

導出については、本冊子の【【必読】MTTF,MTBFとMTTRが導出できる】にまとめています。

(1)MTBF= $\frac{1}{\lambda}$ より、MTBF=100

(2)MTTR= $\frac{1}{\mu}$ より、MTTR=100

(3)A=$\frac{MTBF}{MTBF+MTTR}$= $\frac{\mu}{\mu+\lambda}$=90.9%

と計算できました。

以上、「信頼性工学ができる(離散系と連続系まとめて演習)」を解説しました。

カプランマイヤー法が理解できる

【1】カプランマイヤー法とは

(1) カプランマイヤー法

教科書によっては、若干書き方が異なりますが、カプランマイヤー法とは

信頼度$R(t)=\prod_{i=1}^{n}\left(1-\frac{D_i}{Y_i}\right)$ ・D_i：故障数 ・Y_i：全体の個数

ポイントは、

$\prod_{i=1}^{n}\left(1-\frac{D_i}{Y_i}\right)$ 故障数/全体数　の累積掛け算の形であること！ シンプルで使いやすい

具体的は

信頼度信頼度$R(t)=\prod_{i=1}^{n}\left(1-\frac{D_i}{Y_i}\right)=\frac{5}{5}\times\frac{4}{5}\times\frac{2}{3}$

と分数の掛け算で信頼度が計算できるので、シンプルです。

$\prod_{i=1}^{n}\left(1-\frac{D_i}{Y_i}\right)$ どうやって、この式ができるかを解説していきます。

(2) カプランマイヤー法の導出ストーリー

難しい式は、「導出ストーリ」が必要です。

①　実測データを扱う関数は、経験分布関数と別物である ②　しかし、経験分布関数は「打切りデータ」は扱えない ③　そこで、「打切りデータ」も扱える「いい感じ」の関数を作る ④　それが、生存関数、ハザード関数、累積ハザード関数 ⑤　条件付き確率の公式を使って「打切りデータ」も扱えるようにする ⑥　生存関数から一旦「Nelson-Aalen 推定量」を作る ⑦　Nelson-Aalen 推定量の式を変形して、カプランマイヤー法を導出

と、結構、道のりが長いです。だから、暗記して公式を使えばよいですが、理解せずに式は使ってはいけません！では１つずつ解説していきます。

【2】実測データで扱う経験分布関数は「打切りデータ」が扱えない

(1) 実データは経験分布関数から入る

故障数を測定するときは、

●横軸が時間(t)

●縦軸は故障数で、

縦軸 y の値は、階段状のデータになり、連続性がない特徴になります。

この特徴にぴったり合う関数が、「経験分布関数」です。

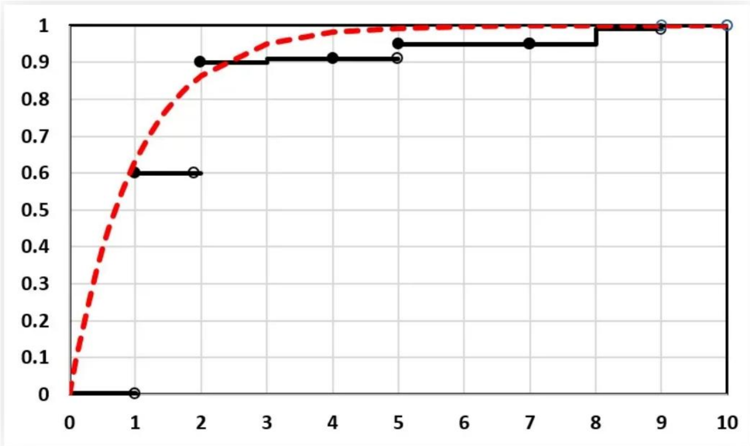
(2) 経験分布関数とは

経験分布関数については、本冊子の【信頼性工学に使う経験分布関数がわかる】にまとめていますので、ご確認ください。経験分布関数の式は、以下です。

●経験分布関数

$$F_n(x) = \frac{x\text{以下となる}X_i\text{の個数}}{n} = \begin{cases} 0 & (x < X_1) \\ \frac{i}{n} & (X_i < x < X_{i+1}, i = 1,2,\dots,n-1) \\ 1 & (x > X_n) \end{cases}$$

グラフを見て、こんな感じと理解しましょう。



(3) 経験分布関数は「打切りデータ」は扱えない
グラフを見てわかるように、時刻 t は故障する時間なので、故障するまで待つのが前提です。
別に、経験分布関数を使って「打切りデータ」を含めても良いと思いますが、精度を上げたいために、「打切りデータ」もうまく扱える関数が必要としましょう。

【3】生存関数、ハザード関数、累積ハザード関数を作る
経験分布関数では「打切りデータ」が扱えないので、どこかの頭のいい数学者が
●生存関数
●ハザード関数
●累積ハザード関数
という聞きなれない関数を持ってきて、うまく式を作ったので、それを解説します。

(1) 生存関数とは
ある時刻 t まで、「故障しない」確率をして定義します。信頼度 R(t)と同じ意味ですね。
生存関数を数式で定義します。

●生存関数
$S(t) = \Pr(T > t) = 1 - \Pr(T \leqq t) = 1 - F(t)$
$S(0)=1$ $(t \leqq 0)$

$S(\infty)=0$

(2) ハザード関数とは
ハザード関数とは、ある時刻 t 瞬間の故障確率と定義します。故障率 λ と同じ意味ですね。
ハザード関数を定義します。

●ハザード関数

$$\lambda(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t}(\Pr(t \leqq T \leqq t + \Delta t \mid T \geqq t))$$

ポイントは、時刻tから時刻$t + \Delta t$の間に発生する故障確率
$\Pr(t \leqq T \leqq t + \Delta t \mid T \geqq t)$が<u>条件付き確率で定義している点がポイント</u>です。

ここが、「打切りデータ」でも扱ってよいとするトリックになるので、注視ください。

条件付き確率　$\Pr(t \leqq T \leqq t + \Delta t \mid T \geqq t)$　は、生存関数$S(t)$で見ると、
・$\Pr(\circ \mid T \geqq t)$→時刻 t 以上の場合のうち、
・$\Pr(t \leqq T \leqq t + \Delta t \ \mid \bigcirc)$→時刻 t から t+Δt の間に発生した確率
と見る事ができるので、

$\Pr(t \leqq T \leqq t + \Delta t \mid T \geqq t)=\frac{S(t)-S(t+\Delta t)}{S(t)}$　と書けます。

まとめると、次式となります。

$\lambda(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t}(\Pr(t \leqq T \leqq t + \Delta t \mid T \geqq t))=\lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t}\frac{S(t)-S(t+\Delta t)}{S(t)}=\lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{S(t)}\frac{S(t)-S(t+\Delta t)}{\Delta t}=-\frac{dS(t)}{dt}\frac{1}{S(t)}$ $(=-\frac{(S(t))'}{S(t)})$

生存関数$S(t)$≡信頼度$R(t)$なので、

$-\frac{dS(t)}{dt}=-\frac{dR(t)}{dt}=f(t)$（確率密度関数）　となるので、

まとめると、　$\lambda(t)=-\frac{dS(t)}{dt}\frac{1}{S(t)}=f(t)\frac{1}{S(t)}$　となります。この関係式もあとで使います。

(3) 累積ハザード関数とは</h3>
単純にハザード関数を時刻 t で積分した関数です。

●累積ハザード関数

$\Lambda(t)=\int_0^t \lambda(s)ds$　（Λはラムダの大文字です）

先ほど計算した、$\lambda(s)=-\frac{(S(t))'}{S(t)}$ 代入すると

$\Lambda(t)=\int_0^t -\frac{(S(t))'}{S(t)}ds$ なり、置換積分によって、 $\Lambda(t)=-\log S(t)$ なり、

生存関数$S(t)$は $S(t)=exp(-\Lambda(t))$ という関係式が作れます。
3 つの関数を定義して、カプランマイヤー法の下ごしらえが出来ました。ここから調理開始です！

【4】「打切りデータ」も考慮できるポイント
(1) ハザード関数がポイント！

●ハザード関数　$\lambda(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t}(\Pr(t \leqq T \leqq t + \Delta t \mid T \geqq t))$

ここで、２つの独立した確率分布 T,U を用意します。

●T：生存時間確率分布(打切りなし)

●U：打切り時間確率分布（打切りあり）

「打切りデータ」も考慮できるポイントを説明します。

●$\Pr(t \leqq T \leqq t+\Delta t \mid T \geqq t)$ は条件付き確率なので、

$\Pr(t \leqq T \leqq t+\Delta t \mid T \geqq t)=\frac{\Pr(t \leqq T \leqq t+\Delta t, T \geqq t)}{\Pr(T \geqq t)}$ となりますね。

●この式の分母分子に確率変数 U について、$\Pr(U \geqq t)$を掛け算します。

$\frac{\Pr(t \leqq T \leqq t+\Delta t, T \geqq t)}{\Pr(T \geqq t)} \times \frac{\Pr(U \geqq t)}{\Pr(U \geqq t)}$

●分子は $\Pr(t \leqq T \leqq t+\Delta t, T \geqq t) \times \Pr(U \geqq t)$ となり、独立した確率の積になるので、
$\Pr(t \leqq T \leqq t+\Delta t, T \geqq t, U \geqq t)$ と合成することができます。

●分母は $\Pr(T \geqq t) \times \Pr(U \geqq t)$ となり、独立した確率の積になるので、
$\Pr(T \geqq t) \times \Pr(U \geqq t) = \Pr(T \geqq t, U \geqq t)$

●まとめると、

$\Pr(t \leqq T \leqq t+\Delta t \mid T \geqq t)= \frac{\Pr(t \leqq T \leqq t+\Delta t, T \geqq t, U \geqq t)}{\Pr(T \geqq t, U \geqq t)}$となります。

●さらに、よくみると　T≡T+U として T、U を合成すると、

$\frac{\Pr(t \leqq T \leqq t+\Delta t, T \geqq t, U \geqq t)}{\Pr(T \geqq t, U \geqq t)} = \frac{\Pr(t \leqq T \leqq t+\Delta t, T \geqq t)}{\Pr(T \geqq t)}$とできるので、元の式に戻ります。

ハザード関数は、打切りしない T と打切りする U の独立した変数を合成することができる。
ハザード関数は、打切りする場合も考慮できるということが分かります!</mark></div>

(2) 累積ハザード関数の近似

ハザード関数$\lambda(t)$は $\lambda(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t}(\Pr(t \leqq T \leqq t+\Delta t \mid T \geqq t))$ と難しい式ですが、よく見ると

$$\frac{\Pr(t \leqq T \leqq t+\Delta t, T \geqq t)}{\Pr(T \geqq t)} = \frac{d/n}{y/n}$$

・d：単位時間当たりの故障数
・y：時刻 t でまだ故障していない個数
・n：全体の個数
という条件付き確率で表現できます。

つまり、 $\lambda(t) \equiv \frac{d}{y}$ 　として考えることができるので、この式を使ってみましょう。

【5】Nelson-Aalen 推定量を一旦作る
(1) Nelson-Aalen 推定量とは

ハザード関数を $\lambda(t) \equiv \frac{d}{y}$として考えることができるので、この式を使って、累積ハザード関数を作ってみます。

累積ハザード関数はハザード関数の積分ですが、積分の代わりにΣ(和)で表現してみます。

$\Lambda(t)=\sum_{i=1}^{n} \frac{D}{Y}$

この形の式を Nelson-Aalen 推定量と呼びます。カプランマイヤー法の導出に必要なので、一旦式を作ります。

●次に、生存関数を作りましょう。
生存関数 $S(t)$= $exp(-Λ(t))$ より、

$S(t)$= $exp(-\sum_{i=1}^{n}\frac{D}{Y})$

指数部分にΣがあると、掛け算になるので、

$S(t)$= $exp(-\sum_{i=1}^{n}\frac{D}{Y})$=$\prod_{i=1}^{n}\exp\left(-\frac{D}{Y}\right)$

となり、だんだんカプランマイヤー法の式に近づいてきました。

【6】カプランマイヤー法が導出できる

Nelson-Aalen 推定量から生存関数 $S(t)$は $S(t)$= $\prod_{i=1}^{n}\exp\left(-\frac{D}{Y}\right)$ を使っても良いですが、

もう少し式が簡単にならないか考えましょう。

●ここで、テーラー展開を思い出しましょう。

$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots$ ですね。

$\exp\left(-\frac{D}{Y}\right)$をテーラー展開すると、

$\exp\left(-\frac{D}{Y}\right)=1+(-1)\frac{D}{Y}+(-1)^2\frac{\left(\frac{D}{Y}\right)^2}{2!}+\cdots$となり、１次式まで取り出すと、

$\exp\left(-\frac{D}{Y}\right)$=$1-\frac{D}{Y}$ となります。

●まとめると、

$S(t)$= $\prod_{i=1}^{n}\exp\left(-\frac{D}{Y}\right)$=$\prod_{i=1}^{n}\left(1-\frac{D}{Y}\right)$

と変形できます。これがカプランマイヤー法で使う生存関数の式です。ゴール到達できました！。

信頼度$R(t)=\prod_{i=1}^{n}\left(1-\frac{D_i}{Y_i}\right)$

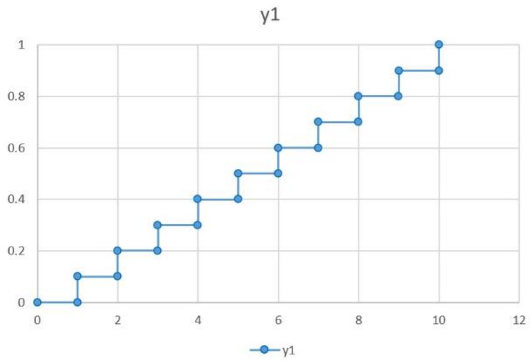
・D_i：故障数
・R_i：全体の個数
の式に一致しました！

以上、「カプランマイヤー法が理解できるが理解できる」を解説しました。

打切りデータがある場合の信頼度の計算がわかる

【1】カプランマイヤー法で計算する
故障試験は、本来は故障するまで待つべきですが、その時間が数カ月と数年になると、故障試験は現実的ではありません。そこで、どこかで打ち切って推測する必要があります。

(1) 打切りデータが無い場合の信頼度の計算
最初は、打切りデータが無い場合、どうやって実測から信頼度を計算するか？を考えます。
下のグラフのように、横軸を時間、縦軸を故障率とすると、階段状に上がっていくのが分かります。



この階段状を表現するのが経験分布関数ですね。
経験分布関数については、本冊子【信頼性工学に使う経験分布関数がわかる】で確認ください。

(2) 打切りデータが有る場合の信頼度の計算
実際は、有限な時間内で故障試験をするので、打ち切ります。そのときの信頼度を次の式から求めます。

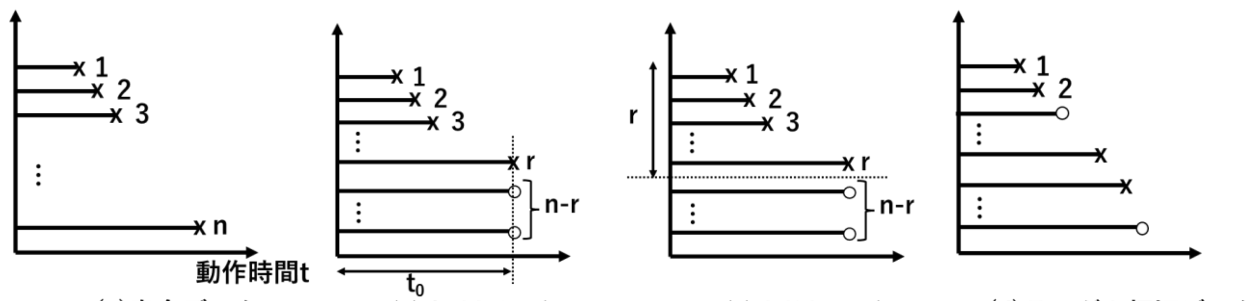
1. 中途打切りデータも含めた観測データを、$t_1 > \ t_2 > \cdots > t_n$ で並べる
2. i番目のデータt_iが故障データか、中途打切りデータによって、変数δ_iを以下とする。
δ_i=1 (故障データの時)
δ_i=0 (中途打切りデータの時)
3. 信頼度$R(t)$を以下の式とする。

$$R_n(t) = \prod_{l=1}^{i} \left(\frac{n-l}{n-l+1} \right)^{\delta_l}$$

この上式をカプランマイヤー法と言って、分数の掛け算で簡単に計算できるので、公式となっていますね。

(3) カプランマイヤー法の導出
公式は使う前に、導出過程を見て、どういうものなのか？　くらいは見ておきましょう。本冊子、【カプランマイヤー法が理解できる】にありますので、ご確認ください。

【2】打切り方は 4 つある
教科書的には、次の 4 つのパターンがあります。
①完全データ　②定時打切データ　③定数打切データ　④ランダム打切データ



(a)完全データ　(b)定時打切データ　(c)定数打切データ　(d)ランダム打切データ

特徴をまとめると、

1. 完全データは、打切りしない場合
2.定時打切データは、ある一定の時間が経過したら打ち切る場合
3.定数打切データは、ある故障数まで行ったら打ち切る場合
4.ランダムは時と場合によって打切りを判断する場合

４つ方法がありますが、実は、

計算方法は同じ１つの方法で OK
時間と個数で打ち切るが、信頼度の計算式に直接関与しないので、１つの式で計算できる！

ならば、プログラム作れば簡単に計算ができる！ので、作ってみました！ Excel VBA ですが。

【3】信頼度が計算できるプログラムを公開！

(1) １つの計算方法で信頼度は計算できる

1 つの方法で計算できるので、プログラムでいろいろ計算して理解を深めましょう。

(2) 信頼度が計算できるプログラム

$R_n(t)=\prod_{l=1}^{i}\left(\frac{n-l}{n-l+1}\right)^{\delta_l}$ をそのままプログラムに入れます。入力は n,i,l で、出力は R(t)です。

B	C	D	E
	n	10	
		1：故障、0：打切り	
	i	打切り	信頼度
	0	-	1
	1	0	1
	2	1	0.889
	3	0	0.889
	4	1	0.762
	5	0	0.762
	6	1	0.610
	7	1	0.457
	8	0	0.457
	9	1	0.229
	10	1	0

<VBA プログラム>

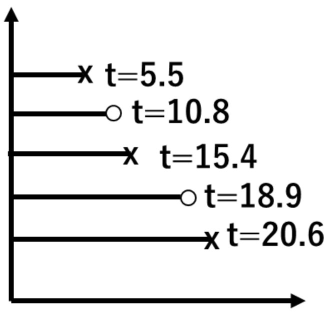
```
Sub R_t()
Dim num As Long, delta(1 To 100) As Variant
num = Cells(1, 4)
seki = 1

For i1 = 1 To num '打切り有=0,打切り無=1
delta(i1) = Cells(5 + i1, 4)
Next i1

For i1 = 1 To num '信頼度 R(t)の計算
 For k1 = 1 To i1
seki = seki * ((num - k1) / (num - k1 + 1)) ^ delta(k1)
Next k1
Cells(5 + i1, 5) = seki 'R(t)の出力
seki = 1
Next i1

End Sub
```

これを使って、打切りデータが有る場合の信頼度を計算してみましょう。

【4】打切りデータの有無による信頼度の影響

(1) 例題

次の下図のような、ランダム打切りデータにおける信頼度を計算せよ。



(2) 解法

プログラムでは一瞬で出て、下表のように出ますが、計算式も書いておきます。

t	i	打切り	信頼度
0≦t<5.5	0	-	1
5.5≦t<10.8	1	1	0.8
10.8≦t<15.4	2	0	0.8
15.4≦t<18.9	3	1	0.533
18.9≦t<20.6	4	0	0.533
20.6≦t	5	1	0

と出ますが、計算式も書いておきます。

●0≦t<5.5： $R(t)=1$

●5.5≦t<10.8： $R(t)=1\times\left(\frac{4}{5}\right)^1=0.8$

●10.8≦t<15.4： $R(t)=1\times\left(\frac{4}{5}\right)^1\times\left(\frac{3}{4}\right)^0=0.8$

●15.4≦t<18.9： $R(t)=1\times\left(\frac{4}{5}\right)^1\times\left(\frac{3}{4}\right)^0\times\left(\frac{2}{3}\right)^1=0.533$

●18.9≦t<20.6： $R(t)=1\times\left(\frac{4}{5}\right)^1\times\left(\frac{3}{4}\right)^0\times\left(\frac{2}{3}\right)^1\times\left(\frac{1}{2}\right)^0=0.533$

●20.6≦t： $R(t)=1\times\left(\frac{4}{5}\right)^1\times\left(\frac{3}{4}\right)^0\times\left(\frac{2}{3}\right)^1\times\left(\frac{1}{2}\right)^0\times\left(\frac{0}{1}\right)^1=0.0$

分数の長い掛け算で計算できますね。

【5】打切りデータの有無による信頼度の影響

プログラムを作ると次の疑問が沸いたので、一緒に解いてみましょう。

(1) 疑問

打切りデータが多い場合と、少ない場合では信頼度 R(t)の変化はどう変わるか？
打切りデータが多いと R(t)の精度は低下するんだろうか？

どう思いますか？

(2) 例題を使って確かめる

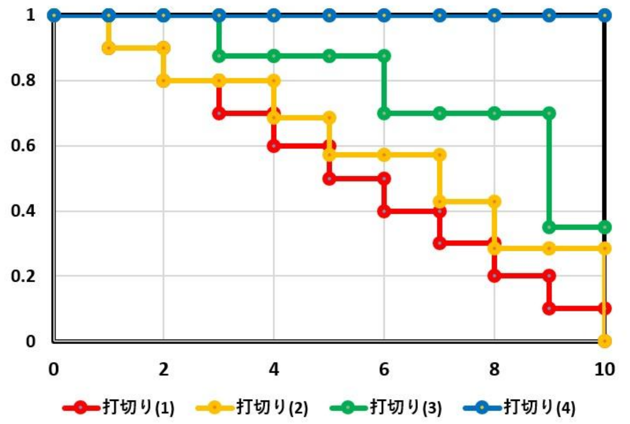
次のような例題を使って、この疑問を調べてみましょう。

サンプルデータ n=10 がある。以下の 4 つの場合における信頼度 R(t)を計算せよ。表で 1 は故障データ(打切り無し),0 は打ち切りデータ(打切り有り)とする。

i	打切り(1)	打切り(2)	打切り(3)	打切り(4)
1	1	1	0	0
2	1	1	0	0
3	1	1	0	0
4	1	1	0	0
5	1	1	0	0
6	1	0	1	0
7	1	1	0	0
8	1	1	0	0
9	1	0	1	0
10	1	1	0	0

打切り(1)は打ち切り無し場合で、(2)(3)(4)に連れて打ち切りを増やしていきます。

(3) 計算結果
プログラムから計算させて、グラフにすると下図になります。



結果は以下の通りです。

i	打切り(1)	打切り(2)	打切り(3)	打切り(4)
0	1	1	1	1
1	0.9	0.9	1	1
2	0.8	0.8	1	1
3	0.7	0.8	0.875	1
4	0.6	0.686	0.875	1
5	0.5	0.571	0.875	1
6	0.4	0.571	0.7	1
7	0.3	0.429	0.7	1
8	0.2	0.286	0.7	1
9	0.1	0.286	0.35	1
10	0	0	0.35	1

グラフからわかることは、

打切りがあると、信頼度は低下しないが、次故障すると、信頼度は一気に低下する。
打切りが多くなると信頼度は高く、過大評価される傾向がある。
打切りデータが有る場合、信頼度は甘めに出ると考えておく必要がある。

打切りデータを含むと、信頼度の精度は低下することを理解しておきましょう。

以上、「打切りデータがある場合の信頼度の計算がわかる」を解説しました。

ヒストグラムから信頼度が計算できる

【1】ヒストグラムから信頼度を計算する方法
(1) 計算方法

1. データを用意する
2. データを用意した級数で区分してヒストグラムを描く
3. 各区分の故障数から故障率を計算する
4. 信頼度 R を計算する

(2)ヒストグラムの級の幅をいくつにするか？
これが、肝ですが、教科書はこう書いてますね。
「目安はデータ数の平方根」でも「数学的な根拠はない」
じゃー、どうしたらいいの？　これを後で実験して確認しましょう。

【2】ヒストグラムから信頼度を計算してみる
教科書に従って、データ数の平方根となるようにヒストグラムを描いて、故障率と信頼度を計算しましょう。
(1) データ 100 個用意
以下のような、ある製品の故障時間データ 100 個を用意しました。データは正規分布に従うように乱数を振って準備しました。正規分布による結果の影響は気にしないとしましょう。

115.19	33.07	103.4	150.85	113.44	88.24	78.51	86.19	41.53	106.04
79.07	119.66	132.79	113.78	90.52	59.17	70.13	69.37	139.33	110.47
172.12	144.7	94.1	83.81	146.6	142.28	136.85	48.63	114.95	105.43
119.82	93.9	51.86	63.26	107.4	105.1	133.48	125.02	105.74	139.48
129.5	62.31	100.62	123.5	108.32	27.22	122.19	79.14	142.26	64.03
114.05	61.25	146.26	125.27	77.8	60.31	138.75	125.31	88.39	81.67
113.5	119.63	120.79	81.66	107.83	97.34	93.97	71.63	101.11	110.59
73.05	102.31	107.48	86.98	140.59	124.12	109.67	132.65	86.09	85.98
51.17	104.51	122.61	117.38	99.3	104.01	115.8	140.64	126.4	92.3
101.39	152.79	103.67	145.62	142.66	118.91	75.91	131.25	114.86	68.94

(2) データを用意した級数で区分してヒストグラムを描く
目安はデータ数 100 個の平方根なので、10 に区分します。なお、データにおいて、以下の通りですね。これは簡単に解けるハズ。区分にわけた表を作ります。

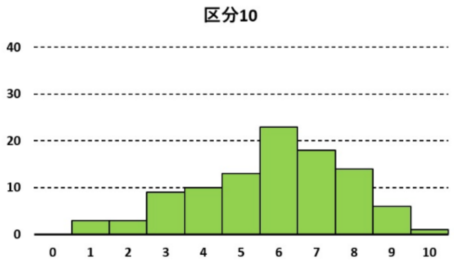
●最大値 max=172.12　●最小値 min=27.22
●範囲 R=max-min=144.90　●区分 R/10=14.49

区分	区分10	故障数f_i	残存数n_i	故障確率 $\lambda_i=f_i/n_i$	信頼度R
1	27.22～41.71	??	??	??	??
2	41.71～56.2	??	??	??	??
3	56.2～70.69	??	??	??	??
4	70.69～85.18	??	??	??	??
5	85.18～99.67	??	??	??	??
6	99.67～114.16	??	??	??	??
7	114.16～128.65	??	??	??	??
8	128.65～143.14	??	??	??	??
9	143.14～157.63	??	??	??	??
10	157.63～172.12	??	??	??	??

ここで、上表の
●故障数 f_i →その区分内にいるデータ数
●故障確率(故障率) $\lambda_i=f_i/n_i$
●残存数 n_i→1 つ前の区分の残存数
●信頼度 $R=1-(\Sigma fi)/n$ (n=100)
で計算しましょう。結果は、

区分	区分10	故障数f_i	残存数n_i	故障確率 $\lambda_i=f_i/n_i$	信頼度R
1	27.22～41.71	3	100	0.030	0.970
2	41.71～56.2	3	97	0.031	0.940
3	56.2～70.69	9	94	0.096	0.850
4	70.69～85.18	10	85	0.118	0.750
5	85.18～99.67	13	75	0.173	0.620
6	99.67～114.16	23	62	0.371	0.390
7	114.16～128.65	18	39	0.462	0.210
8	128.65～143.14	14	21	0.667	0.070
9	143.14～157.63	6	7	0.857	0.010
10	157.63～172.12	1	1	1.000	0.000

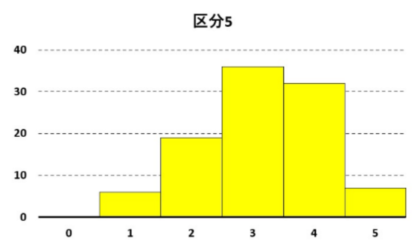
ヒストグラムを描きます。

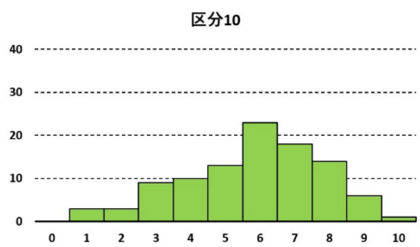


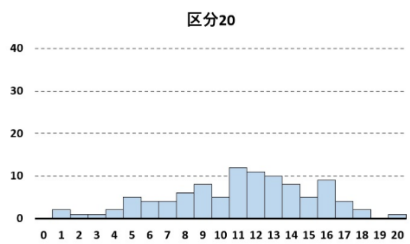
これで、●ヒストグラム ●信頼度 が計算できましたね。

【3】ヒストグラムの区分間隔はいくらが妥当か？
試験対策なら、これで十分ですが、
「目安はデータ数の平方根」でも「数学的な根拠はない」
じゃー、どうしたらいいの？　なので、区分間隔を 3 つの場合に振って、調査しましょう。

(1) 区分間隔を 3 つ振って調査
区分を 10 から 5,10,20 の 3 パターンに振って、●ヒストグラム ●故障率 を求めてみましょう。
(2) 計算結果
計算方法は上と同じで、それを 3 回繰返すので、計算結果表は割愛します（が、是非やってみてください。Excel 使った方が速く計算できますね)。
●区分 5 の場合　●区分 10 の場合　●区分 20 の場合







３つとも、似たような分布になりましたが、ヒストグラムで取る間隔幅によっては、グラフの見え方、形が変わる事があるので要注意です！
故障率がどの程度になるかを吟味しながら、ヒストグラムの区分間隔を調整する必要がありますね。
以上、「ヒストグラムから信頼度が計算できる」を解説しました。

信頼性(指数分布)における計数抜取検査がよくわかる

【1】指数分布の計数抜取検査がわかる
(1) ポアソン分布型を使うのが前提
指数関数で表現する信頼性工学において、抜取検査はポアソン分布型を使います。その理由は関連記事で解説していますので、導出過程をご確認ください。

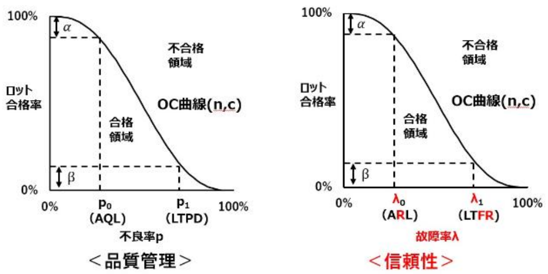
【関連記事】信頼性における抜取検査はポアソン分布を使う理由がわかる
https://qcplanets.com/method/reliability/sampling-inspection-case/

(2) OC 曲線を作る
抜取検査は OC 曲線が基本ですが、信頼性工学で応用するには、以下のように式を使います。

$$L(\lambda T) = \sum_{r=0}^{c} e^{-\lambda T}\frac{(\lambda T)^r}{r!}$$

・Lはロット合格率
・Tは総試験時間で、$T = nt$　(サンプル数nと 1 サンプルの試験時間t

OC 曲線を描くと



抜取検査を復習したい場合は、関連記事でご確認ください。最も詳しく、網羅性の高い QC プラネッツの抜取検査記事です。

【関連記事】究める！抜取検査
https://qcplanets.com/method/sampling-inspection/all/

(3) 基本例題
例題で計数抜取検査を理解しましょう。

故障率λ=5×10^{-5}で、β=0.1、故障数 c=1 まで合格とする抜取検査を考える。
(1) 総試験時間Tはいくらか？
(2) 1 サンプルあたり 2000 時間とすると、サンプルは何個必要か？

さっと解けますか？

(4) 解法
①条件式を考える
問題文を式にすると、

$$L(\lambda T) = \sum_{r=0}^{c=1} e^{-\lambda T}\frac{(\lambda T)^r}{r!} = e^{-\lambda T}\frac{(\lambda T)^0}{0!} + e^{-\lambda T}\frac{(\lambda T)^1}{1!} = \beta = 0.1$$

を満たすTを求めたら OK ですね。計算すると
(λT +1) $e^{-\lambda T}$=0.1(=β)
とシンプルになりますが、ここからの計算が大変ですね。それと、計算だけだとイメージしにくいですね。

②OC 曲線を描こう！
Excel で書いてみましょう。下図のように、変数λTに対して、

$L(\lambda T)=\sum_{r=0}^{c=1} e^{-\lambda T}\frac{(\lambda T)^r}{r!}$を計算します。色枠と、色の式が対応していますので、確認ください。

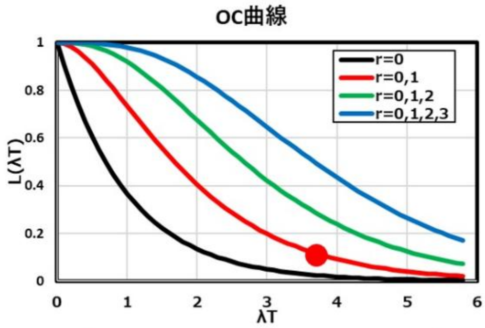
c	0	1	2	3

λT	L0	L1	L2	L3
0	1	0	0	0
0.1	0.905	0.090	0.005	0.000
0.2	0.819	0.164	0.016	0.001
0.3	0.741	0.222	0.033	0.003
0.4	0.670	0.268	0.054	0.007
0.5	0.607	0.303	0.076	0.013
0.6	0.549	0.329	0.099	0.020
0.7	0.497	0.348	0.122	0.028
0.8	0.449	0.359	0.144	0.038
0.9	0.407	0.366	0.165	0.049
1	0.368	0.368	0.184	0.061
1.1	0.333	0.366	0.201	0.074

λT	L0	L0+L1	L0+L1+L2	L0+L1+L2+L3
0	1	1	1	1
0.1	0.905	0.995	1.000	1.000
0.2	0.819	0.982	0.999	1.000
0.3	0.741	0.963	0.996	1.000
0.4	0.670	0.938	0.992	0.999
0.5	0.607	0.910	0.986	0.998
0.6	0.549	0.878	0.977	0.997
0.7	0.497	0.844	0.966	0.994
0.8	0.449	0.809	0.953	0.991
0.9	0.407	0.773	0.937	0.987
1	0.368	0.736	0.920	0.981
1.1	0.333	0.699	0.901	0.974

$L(\lambda T)=e^{-\lambda T}\frac{(\lambda T)^0}{(0)!}$　$L(\lambda T)=e^{-\lambda T}\frac{(\lambda T)^2}{(2)!}$　$L(0)+L(1)+L(2)$

ついでに、OC 曲線も描いてみましょう。イメージしやすいので！



$$L(\lambda T)=\sum_{r=0}^{c} e^{-\lambda T}\frac{(\lambda T)^r}{r!}$$

で、問題は、c=1 のとき　$L(\lambda T)$=0.1(=β)より、上図の OC 曲線の赤丸部分ですね。
Excel でλTを 3.5～4 の間で 0.001 くらい細かく刻んでいくと、λT =3.89 が答えとなります。
問題文を再掲しましょう。

故障率λ=5×10^{-5}で、β=0.1、故障数 c=1 まで合格とする抜取検査を考える。
(1) 総試験時間Tはいくらか？
(2) 1 サンプルあたり 2000 時間とすると、サンプルは何個必要か？

(1)でλT =3.89、λ=5×10^{-5}より T=3.89×10^5時間(=44 年)とわかります。それだけ試験時間がかかるってことですね。
(2)は簡単ですね。
$T=nt$より
3.89×10^5=n×2000　n=194.5
と 200 個くらいサンプル数が必要とわかります。

【2】加速試験するとサンプル数減らせる理由がわかる
上の例題のように、時間がかかるんですよ！だから早く結果を出したい！　そのために加速試験をやります。
加速試験するとサンプル数が減るかどうか例題で確認しましょう。

(1) 例題
加速試験とは、数式でいうと

$L(\lambda T)=\sum_{r=0}^{c=1} e^{-\lambda T}\frac{(\lambda T)^r}{r!}$の

λの値を例えば 10 倍とか一気に上げるようなことをします。上の例題でλを 10 倍にしたら、サンプル数はどうなるか計算してみましょう。

加速試験で 10 倍の故障率λ=5×10^{-4}で、β=0.1、故障数 c=1 まで合格とする抜取検査を考える。 (1) 総試験時間Tはいくらか？ (2) 1 サンプルあたり 2000 時間とすると、サンプルは何個必要か？

実際に解いてみましょう。

(2) 解法

λの値を変えても $L(\lambda T)=\sum_{r=0}^{c=1} e^{-\lambda T}\frac{(\lambda T)^r}{r!}=\beta$ の式は変わらない

なので、λT=3.89 と同じです。
で、λが 10 倍になったので、T は 1/10 になります。よって、
(1)は、
T=3.89×10^4時間(=4.4 年)
となります。

(2)T=nt で t=2000 とですから、
n=19.4=20 個と先の例題の 200 個から 20 個に減っています。

【3】試験時間とサンプル数の関係がわかる
(1) 例題
試験時間を変えると、必要なサンプル数はどう増減するかやってみましょう。一度解けば簡単な例題です。

故障率λ=5×10^{-5}で、β=0.1、故障数 c=1 まで合格とする抜取検査を考える。　総試験時間 T は上の例題で 3.89×10^5時間とわかっている。 (1) 1 サンプルあたり 200 時間とすると、サンプルは何個必要か？ (2) 1 サンプルあたり 2000 時間とすると、サンプルは何個必要か？ (3) 1 サンプルあたり 20000 時間とすると、サンプルは何個必要か？

3 条件振って、調べてみましょう。

(2) 解法

λの値を変えても $L(\lambda T)=\sum_{r=0}^{c=1} e^{-\lambda T}\frac{(\lambda T)^r}{r!}=\beta$ の式は変わらない

なので、λT=3.89 と同じです。T=3.89×10^5　でしたね。

●T=nt ですから、
(1) t=200 のときは、　　n=T/t=1945 個
(2) t=2000 のときは、　n=T/t=194.5 個
(3) t=20000 のときは、 n=T/t=19.45 個
と試験時間が増えるに従い、サンプル数減ります。反比例の関係です。

【4】指数分布の計数抜取検査の変数の関係をまとめる
いろいろ変数を振ってみて練習しましたが、まとめましょう。

①　OC 曲線から　$L(\lambda T)=\sum_{r=0}^{c=1} e^{-\lambda T}\frac{(\lambda T)^r}{r!}=\beta$ を満たす変数λTを求める。
②　$\lambda T=\lambda nt$　関係式でλ,n,t の値を求める。
③　λT =(一定)なので、それぞれの変数が反比例の関係になる

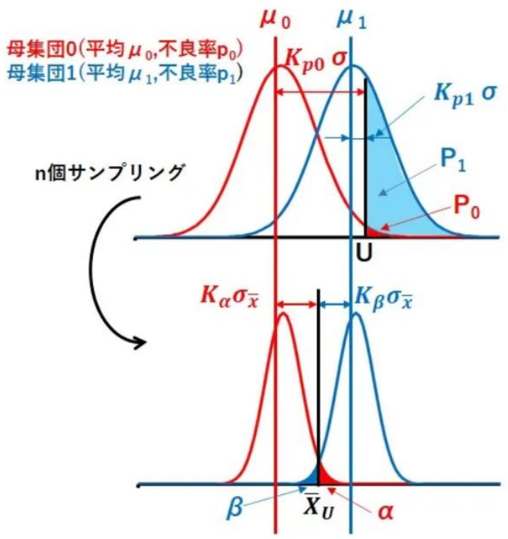
これが、信頼性の計数抜取検査の考え方です。

以上、「信頼性(指数分布)における計数抜取検査がよくわかる」を解説しました。

信頼性(指数分布)における計量抜取検査がよくわかる

【1】指数分布の計量抜取検査の基礎
ポアソン分布型を使った OC 曲線、信頼性工学で応用する場合については、本冊子の【信頼性(指数分布)における計数抜取検査がよくわかる】の【1】指数分布の計数抜取検査がわかる　にまとめていますので、確認ください。

【2】計量抜取検査の基本的な解法
(1) 計量抜取検査は変数を扱う
計量抜取検査は、変数xに対して、下限値と上限値との距離を$\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$で割った割合を使って検査の合否を決めます。
イメージ図で確認しましょう。



品質管理の計量抜取検査は関連記事で確認しましょう。

【関連記事】計量抜取検査がすべてわかる【まとめ】
https://qcplanets.com/method/sampling-inspection/variables/

(2) 変数は MTBF を扱う
信頼性の計量抜取検査では MTBF を使います。MTBF は 2 つの式を使って表現できます。

MTBF=$\frac{T}{r}=\frac{2T}{\chi^2(2n,\alpha)}$

MTBF=$\frac{T}{r}$は総試験時間を故障数で割ったもので、MTBF は 1 故障数あたりの時間と定義通りですね。

また、MTBF の信頼区間を計算する時は、χ2 乗分布を使って
MTBF=$\frac{2T}{\chi^2(2n,\alpha)}$
となりますね。この式の導出について、関連記事で確認しましょう。

【関連記事】【必読】MTBF,MTTF の点推定と推定区間の式がよくわかる
https://qcplanets.com/method/reliability/mtbf-estimation-process/

(3) 信頼性の計量抜取検査の基本的な解き方
χ2 乗分布にある、α、βが OC 曲線のα、βとして合否基準に使います。次の式を作って、検査基準を考えます。

●2 つの MTBF を定義します。

$\mathrm{MTBF}_0=\frac{2T}{\chi^2(2n,\alpha)}$

$\mathrm{MTBF}_1=\frac{2T}{\chi^2(2n,\alpha)}$

●比を取ります。

$\frac{\lambda_1}{\lambda_0}=\frac{MTBF_0}{MTBF_1}=\frac{\chi^2(2n,\beta)}{\chi^2(2n,1-\alpha)}$

判別比$\frac{\lambda_1}{\lambda_0}$を使って、検査判別します。基本は、χ2 乗分布の値と、自由度 2r、α、βの 4 つの値で判断します

●定時打切り、定数打切りの 2 パターンがあるので、それぞれの例題を解説します。

【3】定時打切りの場合
(1) 例題

MTBF_0=900 時間、MTBF_1=300 時間、α=0.05、β=0.1 を検査基準とする定時打切りの場合を考える。 (1)この場合の定時打切りの打切り数 r を求めよ。 (2) 定時打切りの打切時間はいくらか。

実際に解いてみましょう。

(2) 解法
①(1)の解法

判別比$\frac{\lambda_1}{\lambda_0}$は、900/300=3 です。α=0.05、β=0.1 なので、

$3=\frac{\chi^2(2r,0.1)}{\chi^2(2r,0.95)}$を満たす自然数 r を、χ2 乗分布表や Excel から探します。手計算はできません！

Excel では、セルに、CHISQ.INV.RT(確率 P,自由度 r)を入れてください。計算してくれますよ！

x2乗分布	(A)	(B)	比
2r/P(確率)	0.95	0.1	(B)/(A)
1	0.004	2.706	688.059
2	0.103	4.605	44.891
3	0.352	6.251	17.767
4	0.711	7.779	10.946
5	1.145	9.236	8.063
6	1.635	10.645	6.509
7	2.167	12.017	5.545
8	2.733	13.362	4.89
9	3.325	14.684	4.416
10	3.94	15.987	4.057
11	4.575	17.275	3.776
12	5.226	18.549	3.549
13	5.892	19.812	3.363
14	6.571	21.064	3.206
15	7.261	22.307	3.072
16	7.962	23.542	2.957
17	8.672	24.769	2.856

判別比が 3 に最も近い偶数な自由度は、表から 16 ですね。だから r=8 となります。

② (2)の解法
打切り時間 T は

●$MTBF_0=\frac{2T}{\chi^2(2r,1-\alpha)}$

●$MTBF_1=\frac{2T}{\chi^2(2r,\beta)}$

の 1 つの式で出せます。両方計算しても T は同じ結果になります。

●MTBF_{_0}=¥(¥frac{2T}{χ^2(2r,1-α)}¥)

$300=\frac{2T}{\chi^2(16,0.95)}=\frac{2T}{7.962}$

T=1194.3 時間
となります。できましたね！

【4】定数打切りの場合
定時打切りと同じ感じで例題を解説します。
(1) 例題

$MTBF_0$=300 時間、打切り回数 r=10、α=0.05、β=0.1 を検査基準とする定 c 打切りの場合を考える。 (1) 定数打切りの打切時間はいくらか。 (2) $MTBF_1$ はいくらか。

実際に解いてみましょう。

(2) 解法
①(1)の解法
実際に解いてみましょう。定時打切りの場合と少し問いが変わっていますね。

●$MTBF_0=\frac{2T}{\chi^2(2r,1-\alpha)}$

$300=\frac{2T}{\chi^2(20,0.95)}=\frac{2T}{10.851}$　　T=1627.65 時間

となります。上の例題より時間が長くなった感じですね。

②(2)の解法

●$MTBF_1=\frac{2T}{\chi^2(2r,\beta)}=\frac{2\times1627.65}{\chi^2(20,0.10)}=\frac{2\times1627.65}{28.412}$ =114.57 時間

となります。上の例題より時間が短くなった感じですね。

単純に公式代入で計算できますが、この式と計量抜取検査を関連付けて理解することが結構難しいです。計算だけなら、値が出ても何をやっているのかがわからない！とならないよう注意してください。

以上、「信頼性(指数分布)における計量抜取検査がよくわかる」を解説しました。

信頼性(指数分布)における逐次抜取検査がよくわかる

【1】指数分布の計量抜取検査の基礎
ポアソン分布型を使った OC 曲線、信頼性工学で応用する場合については、本冊子の【信頼性(指数分布)における計数抜取検査がよくわかる】の【1】指数分布の計数抜取検査がわかる　にまとめていますので、確認ください。

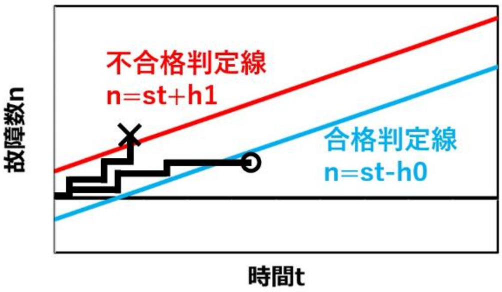
【2】品質管理の逐次抜取検査を復習
(1) 関連記事で確認！
品質管理の逐次抜取検査をまず復習してましょう。逐次抜取検査は何をやるのかを理解するのが先です。

【関連記事】【まとめ】逐次抜取検査がわかる
https://qcplanets.com/method/sampling-inspection/sequential-sampling-all/

(2) 逐次抜取検査で理解すべきポイント
関連記事にあるように、逐次抜取検査で理解すべきポイントは、

検査結果の良し悪しを見ながら、検査続行か、終了かが見やすく判断できるものがあると便利ですよね。それが合格判定線です。

合格判定線、不合格判定線を下図に描きます。



青線は、不良個数が検査で増加しても、合格判定領域に入ったため、合格と判断できます。一方、
赤線は、不合格領域に入ったため、不合格と判断できます。
合格、不合格の領域線が直線であるため、検査続行、検査終了の判断がしやすいですね。
指数分布の場合も合格判定線を作ります！

【3】逐次抜取検査の判定条件式を導出
(1) 指数分布関数を用意
逐次抜取検査を指数分布関数で扱うとき、次の式で考えます。

$$P_n = e^{-\frac{t}{T}} \frac{\left(\frac{t}{T}\right)^n}{n!}$$

ポアソン分布の式ですが、あえて$t \to \frac{t}{T}$に変形しています。ここがポイントになります！

(2) 2 つの時刻を定義する
ここで、2 つの時刻を定義します。
●T_1：合格判定寿命　⇒確率$P_n(T_1)$
●T_2：許容平均寿命　⇒確率$P_n(T_2)$

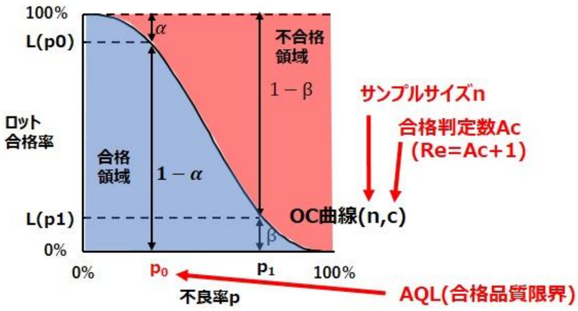
(3) 確率比Prを定義する
次に確率比Prを定義します。

$$P_n = \frac{P_n(T_2)}{P_n(T_1)}$$

少し式を代入して変形しておきます。

$$P_n = \frac{P_n(T_2)}{P_n(T_1)} = \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^n \frac{e^{-\frac{t}{T_2}}}{e^{-\frac{t}{T_1}}} = \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^n e^{-\left(\frac{1}{T_2}-\frac{1}{T_1}\right)t}$$

(4)合格判定条件を式で表現
OC 曲線から逐次抜取検査の合否判定条件を作ります。



OC 曲線にある、α、βと 2 つの定義した時刻との関係を入れます。

●逐次抜取検査の合否判定条件

$$\frac{\beta}{1-\alpha} < \mathrm{Pr} < \frac{1-\beta}{\alpha}$$

(5) 逐次抜取検査の合否判定条件をまとめる
計算していきましょう。

● $\frac{\beta}{1-\alpha} < \mathrm{Pr} < \frac{1-\beta}{\alpha}$

$$\frac{\beta}{1-\alpha} < \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^n e^{-\left(\frac{1}{T_2}-\frac{1}{T_1}\right)t} < \frac{1-\beta}{\alpha}$$

$$\log\left(\frac{\beta}{1-\alpha}\right) < n log\left(\frac{T_1}{T_2}\right) - \left(\frac{1}{T_2}-\frac{1}{T_1}\right)t < \log\left(\frac{1-\beta}{\alpha}\right)$$

●ここで、値の大小関係を確認します。
★ $T_1 > T_2$
★ $1-\alpha > \beta$
★ $1-\beta > \alpha$
(α =0.05、β =0.1 を代入するとよくわかりますね。)

●(左辺)と(中辺)から、故障数nについてまとめます。

$$n log\left(\frac{T_1}{T_2}\right) > \left(\frac{1}{T_2}-\frac{1}{T_1}\right)t + \log\left(\frac{\beta}{1-\alpha}\right)$$

$$n log\left(\frac{T_1}{T_2}\right) > \left(\frac{1}{T_2}-\frac{1}{T_1}\right)t - \log\left(\frac{1-\alpha}{\beta}\right)$$

よって、

$$n > \frac{\left(\frac{1}{T_2}-\frac{1}{T_1}\right)}{\log\left(\frac{T_1}{T_2}\right)} - \frac{\log\left(\frac{1-\alpha}{\beta}\right)}{\log\left(\frac{T_1}{T_2}\right)}$$

●同様に(中辺)と(右辺)から、故障数nについてまとめます。

$$n < \frac{\left(\frac{1}{T_2}-\frac{1}{T_1}\right)}{\log\left(\frac{T_1}{T_2}\right)} + \frac{\log\left(\frac{1-\beta}{\alpha}\right)}{\log\left(\frac{T_1}{T_2}\right)}$$

以上、結果をまとめると

$$\frac{\left(\frac{1}{T_2}-\frac{1}{T_1}\right)}{\log\left(\frac{T_1}{T_2}\right)} - \frac{\log\left(\frac{1-\alpha}{\beta}\right)}{\log\left(\frac{T_1}{T_2}\right)} < n < \frac{\left(\frac{1}{T_2}-\frac{1}{T_1}\right)}{\log\left(\frac{T_1}{T_2}\right)} + \frac{\log\left(\frac{1-\beta}{\alpha}\right)}{\log\left(\frac{T_1}{T_2}\right)}$$

(6) 別の変数に置き換えて、見やすくしましょう。

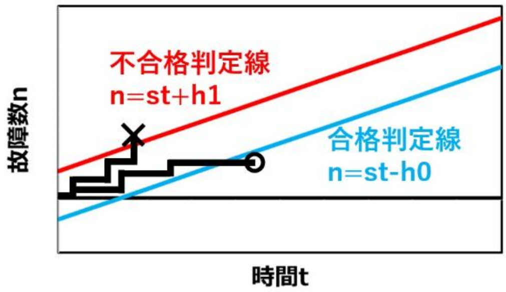
●傾きs=$\frac{\left(\frac{1}{T_2}-\frac{1}{T_1}\right)}{\log\left(\frac{T_1}{T_2}\right)}$

●y 切片h_o =$\frac{\log\left(\frac{1-\alpha}{\beta}\right)}{\log\left(\frac{T_1}{T_2}\right)}$

●y 切片h_1 =$\frac{\log\left(\frac{1-\beta}{\alpha}\right)}{\log\left(\frac{T_1}{T_2}\right)}$ややこしい式ですが、大事なのは、どれも正の値である点です。

$st - h_o < n < st + h_1$
こう書くと、２つの直線の間の領域ってことが良くわかますね。

図にすると、よくわかりますね。



2 つの判定線の間に、逐次検査すると故障数が増えていき、
●ある時間で、合格判定線内に入ると検査は合格
●ある時間で、不合格判定線外に出ると検査は不合格
が視覚的にわかる！

以上、「信頼性(指数分布)における逐次抜取検査がよくわかる」を解説しました。

一様分布のメジアンランク法がよくわかる

【1】確率 F は順序統計量から求める
(1) 何で、小さい順にデータを並べるの？
正規確率紙やワイブル確率紙を使う場合、データを大きさ順に並び替えますよね！

何で、データを大きさ順に並び替える必要があるか説明できますか？

(2) 順序統計量の性質を活用するため

答えはデータを大きさ順に並び替える理由は、順序統計量の性質を活用するため

ところが、

教科書などは、確率分布がメインで、
「確率紙はデータを大きさ順に並び替えます(順序統計量という)」くらいの一言で、
「$F=\frac{i-0.3}{n+0.4}$を使う」といきなり式が出て来ますよね！

何じゃこりゃ！順序統計量って何？
でも試験には出題されないから、無視してワイブル確率紙を勉強しよう！となりがち

ちゃんと勉強すると、順序統計量の壁にぶちあたります。

順序統計量を復習しながら確率紙を理解しましょう。

(3) 順序統計量の復習
順序統計量を使って、確率を算出する式を使います。この解説は関連記事にありますので、ご確認ください。

【関連記事】順序統計量の同時確率密度関数の導出がよくわかる
https://qcplanets.com/method/statistics-method/order-statistics-base5/

$$g(F)dF=\frac{n!}{(i-1)!\,(n-i)!}F^{i-1}(1-F)^{n-i}dF$$

の式が、メジアンランク法やミーンランク法の出発点です！

【2】メジアンランク法を実際に解いてみる
(1) メジアンランク法とは
関連記事にまとめていますので、ご確認ください。

【関連記事】メジアンランク法がよくわかる
https://qcplanets.com/method/reliability/median-rank1/

(2)メジアンランク法のポイント

①順序統計量がベースであること

②確率 P=$\int_0^{\tilde{F}} g(F)dF=\int_0^{\tilde{F}}\frac{n!}{(i-1)!(n-i)!}F^{i-1}(1-F)^{n-i}dF$

③上の式は解析的に解けないので、$F=\frac{i-0.3}{n+0.4}$を使う

でも、

公式の鵜呑み、暗記は NG!　自分で導出できない公式は使うな！
ひょっとしたら、公式が間違っているかもしれませんよね！

ここでは、一様分布を使って解析してみます。

P=$\int_0^{\tilde{F}} g(F)dF=\int_0^{\tilde{F}}\frac{n!}{(i-1)!1!(n-i)!}F^{i-1}(1-F)^{n-i}dF$ を解いてみます。

【3】一様分布でメジアンランク法を実際に解いてみる

(1) 順序統計量の期待値の計算を応用する

実は、よくみると、

P=$\int_0^{\tilde{F}} g(F)dF = \int_0^{\tilde{F}} \frac{n!}{(i-1)!1!(n-i)!} F^{i-1}(1-F)^{n-i}dF$ は順序統計量の期待値の式と同じです。

順序統計量は一様分布と指数分布の期待値は手計算でできますが、他の分布関数はキツかったです。

順序統計量の期待値の計算は関連記事にあります。QC プラネッツここまで攻めます！

【関連記事】
●一様分布　　順序統計量の考え方がよくわかる
https://qcplanets.com/method/statistics-method/order-statistics-base1/
●指数分布　　順序統計量(指数関数)がよくわかる
https://qcplanets.com/method/statistics-method/order-statistics-base2/

(2) 一様分布でメジアンランク法を実際に解いてみる

では、一様分布の式を F に代入しましょう。

(3) 不完全ベータ関数の壁にぶちあたる！

不完全ベータ関数の積分は手計算が激ムズなので、関連記事にあるように、プログラムを使う方がベターです。

【関連記事】不完全ベータ関数が計算できる
https://qcplanets.com/method/statistics-method/incomplete-beta/

【4】プログラムを使って一様分布のメジアンランクを計算

(1) 二項定理を使って、プログラムの式を作る！

上の不完全ベータ関数の関連記事に詳細解説していますので、ここではエッセンスだけ解説します。

手を動かして導出過程を確認すると理解度は一気に上がります。

P=$\int_0^{\tilde{F}} g(F)dF = \int_0^{\tilde{F}} \frac{n!}{(i-1)!1!(n-i)!} F^{i-1}(1-F)^{n-i}dF$

二項定理から　$(1-F)^{n-i} = \sum_{r=0}^{n-i} {}_{n-i}C_r\, 1^r(-x)^{n-i-r}$

これを積分式に代入します。ちょっと難しいけど、頑張りましょう。

P= $\int_0^{\tilde{F}} \frac{n!}{(i-1)!1!(n-i)!} F^{i-1}(1-F)^{n-i}dF = \int_0^{\tilde{F}} \frac{n!}{(i-1)!1!(n-i)!} \sum_{r=0}^{n-i} {}_{n-i}C_r\, 1^r(-x)^{n-i-r}\, dF$

計算すると、(ここは自力で確認してみてください。)

P=$\sum_{r=0}^{n-i} n \times {}_{n-1}C_{i-1} \times {}_{n-i}C_r\, (-1)^{n-i-r} \frac{1}{n-r} \tilde{F}^{n-r}$

(2)プログラムの紹介

上式をプログラム化します。関連記事と同様に Excel VBA で書きます。

```
Sub gam()
gok = 0

For i1 = 1 To 10 'n
Cells(i1 + 3, 2) = i1
For j1 = 1 To i1 'i
Cells(3, j1 + 2) = j1
gok = 0 '初期化
For k1 = 0 To i1 - j1 'r
gok = gok + i1 * WorksheetFunction.Combin(i1 - 1, j1 - 1)
* WorksheetFunction.Combin(i1 - j1, k1)
* ((-1) ^ (i1 - j1 - k1))
/ (i1 - k1) * (Cells(1, 2) ^ (i1 - k1))
Next k1
Cells(i1 + 3, j1 + 2) = gok
Next j1
Next i1
End Sub
```

(3)解析結果

計算結果は下図のようになります。なお、不完全ベータ関数において、$\tilde{F}$=0.5 としています。

n/i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1/2	-	-	-	-	-	-	-	-	-
2	3/4	1/4	-	-	-	-	-	-	-	-
3	7/8	4/8	1/8	-	-	-	-	-	-	-
4	15/16	11/16	5/16	1/16	-	-	-	-	-	-
5	31/32	26/32	16/32	6/32	1/32	-	-	-	-	-
6	63/64	57/64	42/64	22/64	7/64	1/64	-	-	-	-
7	127/128	120/128	99/128	64/128	29/128	8/128	1/128	-	-	-
8	255/256	247/256	219/256	163/256	93/256	37/256	9/256	1/256	-	-
9	511/512	502/512	466/512	382/512	256/512	130/512	46/512	10/512	1/512	-
10	1023/1024	1013/1024	968/1024	848/1024	638/1024	386/1024	176/1024	56/1024	11/1024	1/1024

よく見ると、

●$i = 1$のとき、F=1−$\left(\frac{1}{2}\right)^{n}$

●$i = n$のとき、F=$\left(\frac{1}{2}\right)^{n}$

黄色、緑色枠からわかります。

でも、メジアンランク法では、

●$i = 1$のとき、$\tilde{F}$=1−$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n}}$

●$i = n$のとき、$\tilde{F}$=$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n}}$

と比較すると、乗数がビミョウに合っていませんね。

自分で計算すると、一致する・しないの知見が得られますし、
自力で計算すると、メジアンランク法の理解が一気に高まります。

一様分布の場合は、自力で計算できますが、他の分布の場合は複雑なので、教科書などが提示している式を活用してもよいです。でも、完全に正しいと鵜呑みしないよう注意してください。

以上、「一様分布のメジアンランク法がよくわかる」を解説しました。

カプランマイヤー法と累積ハザード法の違いがよくわかる

累積ハザード法がわかると ワイブル確率紙と累積ハザード法の違いは何か？ カプランマイヤー法と累積ハザード法の違い何か？ がわからなくなるので解説します！

【1】累積ハザード法の基礎を理解する

まずは、関連記事を読んでください。この記事をベースに本記事は解説しています。

【関連記事】累積ハザード法がよくわかるし、自分で作れる！ https://qcplanets.com/method/reliability/cumulative-hazard1/

【2】カプランマイヤー法と累積ハザード法の違いを理解する

(1) 違いは何か？

両者とも、計算方法の雰囲気がよく似ています。だから、違いが何かがわかりにくい！

(2) カプランマイヤー法

本冊子【ヒストグラムから信頼度が計算できる】の例題で解説したように、以下の表を使って、信頼度 R(t) を計算します。

i	打切り	$R(t)=\prod_{l=1}^{i}(\frac{n-l}{n-l+1})^{\delta_i}$
0	-	1
1	1	$1\times(\frac{4}{5})^1$=0.8
2	0	$1\times(\frac{4}{5})^1\times(\frac{3}{4})^0$=0.8
3	1	$1\times(\frac{4}{5})^1\times(\frac{3}{4})^0\times(\frac{2}{3})^1$=0.533
4	0	$1\times(\frac{4}{5})^1\times(\frac{3}{4})^0\times(\frac{2}{3})^1\times(\frac{1}{2})^0$=0.533
5	1	$1\times(\frac{4}{5})^1\times(\frac{3}{4})^0\times(\frac{2}{3})^1\times(\frac{1}{2})^0\times(\frac{0}{1})^1$=0

(3) 累積ハザード法

上の例題を累積ハザード法を使って信頼度 R(t)を計算します。

i	打切り	ハザードλ(t)	累積ハザード法H(t)	$R(t)=exp(-H(t))$
0	-	0	0	1
1	1	$(\frac{1}{5})$	$(\frac{1}{5})$=0.2	exp(-0.2)=0.819
2	0	$(\frac{0}{4})$	$((\frac{1}{5})+(\frac{0}{4}))$	-
3	1	$(\frac{1}{3})$	$(\frac{1}{5})+(\frac{0}{4})+(\frac{1}{3})$=0.53	exp(-0.53)=0.589
4	0	$(\frac{0}{2})$	$((\frac{1}{5})+(\frac{0}{4})+(\frac{1}{3})+(\frac{0}{2}))$	-
5	1	$(\frac{1}{1})$	$(\frac{1}{5})+(\frac{0}{4})+(\frac{1}{3})+(\frac{0}{2})+(\frac{1}{1})$=1.53	exp(-1.53)=0.217

よく見ると、解き方がよく似ていますよね!　違いはわかりますか？

違いは、あまりありません！打切り有無の両ケースを使って、2 つの手法の計算結果をこれから比較しますが、ほぼ同じ結果になります。あえて、違いをいえば、 ●カプランマイヤー法の解き方は、指数分布を意識している ●累積ハザード法はワイブル分布などを意識している くらいで、ほぼ同じと見てよいでしょうね。

【3】同じ問題をカプランマイヤー法と累積ハザード法それぞれで解いてみる
(1)例題
関連記事にもある、例題を使ってみましょう。同じ問いを使うことで、手法の違いが理解できます！

下の表データを　(1)カプランマイヤー法　(2)累積ハザード法　で、それぞれ信頼度Rを計算せよ。

サンプル番号	1	2	3	4	5
時間t	800	350	730	1770	390
サンプル番号	6	7	8	9	10
時間t	110	100	160	940	320
サンプル番号	11	12	13	14	15
時間t	40	190	590	1260	420
サンプル番号	16	17	18	19	20
時間t	250	490	1060	290	630

(2)手法、確率分布によらず、順序統計量に従って、データを小さい順に並べ替える
下表のようになります。これは、カプランマイヤー法、累積ハザード法両方とも同じです。

サンプル番号	1	2	3	4	5
時間t	40	100	110	160	190
サンプル番号	6	7	8	9	10
時間t	250	290	320	350	390
サンプル番号	11	12	13	14	15
時間t	420	490	590	630	730
サンプル番号	16	17	18	19	20
時間t	800	940	1060	1260	1770

【4】打切りデータが無い場合
まず、打切りが無い場合を解いてみましょう。
(1)カプランマイヤー法
結果を表にまとめると、

i	打切り	カプランマイヤー法 R(T)	i	打切り	カプランマイヤー法 R(T)
0	1	1	11	1	0.45
1	1	$1\times\left(\frac{19}{20}\right)^1=0.95$	12	1	0.4
2	1	$1\times\left(\frac{19}{20}\right)^1\times\left(\frac{18}{19}\right)^1=0.9$	13	1	0.35
3	1	$1\times\left(\frac{19}{20}\right)^1\times\left(\frac{18}{19}\right)^1\times\left(\frac{17}{18}\right)^1=0.85$	14	1	0.3
4	1	0.8	15	1	0.25
5	1	0.75	16	1	0.2
6	1	0.7	17	1	0.15
7	1	0.65	18	1	0.1
8	1	0.6	19	1	0.05
9	1	0.55	20	1	$1\times\left(\frac{19}{20}\right)^1\times\ldots\times\left(\frac{0}{1}\right)^1=0$
10	1	0.5	-	-	-

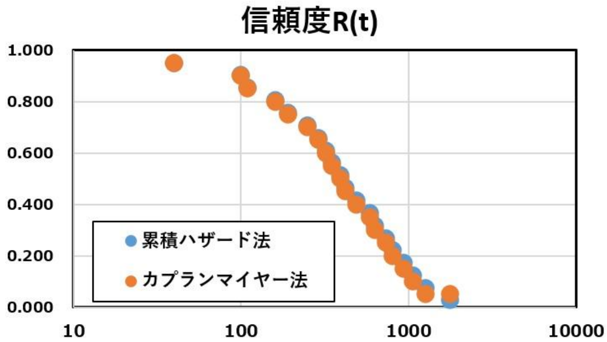
(2) 累積ハザード法
関連記事で復習しましょう。

【関連記事】累積ハザード法がよくわかるし、自分で作れる！
https://qcplanets.com/method/reliability/cumulative-hazard1/

累積ハザードを計算すると、下表になります。

i	打切り	ハザードλ	累積ハザードH(t)=Σλ	信頼度R(t)=exp(-H(t))	i	打切り	ハザードλ	累積ハザードH(t)=Σλ	信頼度R(t)=exp(-H(t))
0	1	0	0	1	11	1	$\left(\frac{1}{10}\right)^1$=0.1	0.769	0.464
1	1	$\left(\frac{1}{20}\right)^1$=0.05	0.05	0.951	12	1	$\left(\frac{1}{9}\right)^1$=0.111	0.88	0.415
2	1	$\left(\frac{1}{19}\right)^1$=0.053	0.103	0.902	13	1	$\left(\frac{1}{8}\right)^1$=0.125	1.005	0.366
3	1	$\left(\frac{1}{18}\right)^1$=0.056	0.158	0.854	14	1	$\left(\frac{1}{7}\right)^1$=0.143	1.148	0.317
4	1	$\left(\frac{1}{17}\right)^1$=0.059	0.217	0.805	15	1	$\left(\frac{1}{6}\right)^1$=0.167	1.314	0.269
5	1	$\left(\frac{1}{16}\right)^1$=0.063	0.28	0.756	16	1	$\left(\frac{1}{5}\right)^1$=0.2	1.514	0.22
6	1	$\left(\frac{1}{15}\right)^1$=0.067	0.346	0.707	17	1	$\left(\frac{1}{4}\right)^1$=0.25	1.764	0.171
7	1	$\left(\frac{1}{14}\right)^1$=0.071	0.418	0.659	18	1	$\left(\frac{1}{3}\right)^1$=0.33	2.098	0.123
8	1	$\left(\frac{1}{13}\right)^1$=0.077	0.495	0.61	19	1	$\left(\frac{1}{2}\right)^1$=0.5	2.598	0.074
9	1	$\left(\frac{1}{12}\right)^1$=0.083	0.578	0.561	20	1	$\left(\frac{1}{1}\right)^1$=1	3.598	0.027
10	1	$\left(\frac{1}{11}\right)^1$=0.091	0.669	0.512	-	-	-	-	-

(3) カプランマイヤー法と累積ハザード法を比較
グラフで比較すると両者とも、結果はほぼ同じとわかりました。



次に、打ち切りデータが有る場合を調べます。

【5】打切りデータが有る場合

まず、打切りが有る場合を解いてみましょう。

(1) 打切りデータ有りの例題

打切りデータが無い場合のデータからいくつか、打切り有りのデータに変えましょう。

サンプル番号(A)	順位i(B)	時間ti(D)	打切り有無 ○：未故障(打切り有) ×故障(打切り無)	サンプル番号(A)	順位i(B)	時間ti(D)	打切り有無 ○：未故障(打切り有) ×故障(打切り無)
11	1	800	○	15	11	40	×
7	2	350	×	17	12	190	×
6	3	730	×	13	13	590	×
8	4	1770	○	20	14	1260	○
12	5	390	×	3	15	420	×
16	6	110	○	1	16	250	×
19	7	100	×	9	17	490	×
10	8	160	×	18	18	1060	○
2	9	940	×	14	19	290	×
5	10	320	×	4	20	630	○

(2) カプランマイヤー法

結果を表にまとめると、

i	打切り	カプランマイヤー法R(T)
1	0	$1\times(\frac{19}{20})^0=1$
2	1	$1\times(\frac{19}{20})^0\times(\frac{18}{19})^1=0.947$
3	1	0.895
4	0	0.895
5	1	0.839
6	0	0.839
7	1	0.779
8	1	0.719
9	1	0.659
10	1	0.599
11	1	0.539
12	1	0.479
13	1	0.419
14	0	0.419
15	1	0.35
16	1	0.28
17	1	0.21
18	0	0.21
19	1	0.105
20	0	$1\times(\frac{19}{20})^0\times(\frac{18}{19})^1\times\ldots\times(\frac{1}{2})^0=0.105$

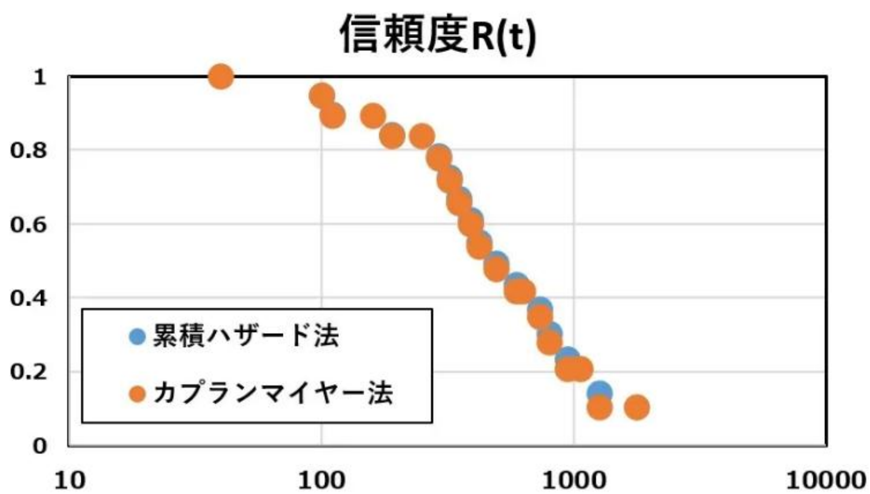
(3) 累積ハザード法

i	打切り	ハザードλ(t)	累積ハザード H(t)=Σλ(t)	信頼度R(t)= $exp(-H(t))$
0	1	0	0	1
1	0	$(\frac{0}{20})^1=0$	0	-
2	1	$(\frac{1}{20})^1$ $=0.0526$	0.053	0.949
3	1	$(\frac{1}{20})^1$ $=0.0556$	0.108	0.897
4	0	$(\frac{0}{20})^1=0$	0.108	-
5	1	$(\frac{1}{20})^1$ $=0.0625$	0.171	0.843
6	0	$(\frac{0}{20})^1=0$	0.171	-
7	1	$(\frac{1}{20})^1$ $=0.0714$	0.242	0.785
8	1	$(\frac{1}{20})^1$ $=0.0769$	0.319	0.727
9	1	$(\frac{1}{20})^1$ $=0.0833$	0.402	0.669
10	1	$(\frac{1}{20})^1$ $=0.0909$	0.493	0.611
11	1	$(\frac{1}{20})^1=0.1$	0.593	0.553
12	1	$(\frac{1}{20})^1=0.111$	0.704	0.494
13	1	$(\frac{1}{20})^1=0.125$	0.829	0.436
14	0	$(\frac{0}{20})^1=0$	0.829	-
15	1	$(\frac{1}{20})^1=0.167$	0.996	0.369
16	1	$(\frac{1}{20})^1=0.2$	1.196	0.302
17	1	$(\frac{1}{20})^1=0.25$	1.446	0.236
18	0	$(\frac{0}{20})^1=0$	1.446	-
19	1	$(\frac{1}{20})^1=0.5$	1.946	0.143
20	0	$(\frac{0}{20})^1=0$	1.946	-

(4) カプランマイヤー法と累積ハザード法を比較
結果は、

時間ti	累積ハザード法	カプランマイヤー法
40	–	1
100	0.949	0.947
110	0.897	0.895
160	–	0.895
190	0.843	0.839
250	–	0.839
290	0.785	0.779
320	0.727	0.719
350	0.669	0.659
390	0.611	0.599
420	0.553	0.539
490	0.494	0.479
590	0.436	0.419
630	–	0.419
730	0.369	0.35
800	0.302	0.28
940	0.236	0.21
1060	–	0.21
1260	0.143	0.105
1770	–	0.105

グラフで比較すると



両者とも、結果はほぼ同じとわかりました。

カプランマイヤー法も累積ハザード法も信頼度 R(t)はほぼ同じ結果になることがわかりましたね！

以上、「カプランマイヤー法と累積ハザード法の違いがよくわかる」を解説しました。

直列モデルを使った累積ハザード法がよくわかる

【1】累積ハザード法の基礎を理解する

(1) 関連記事で復習

まずは、関連記事を読んでください。この記事をベースに本記事は解説しています。

【関連記事】累積ハザード法がよくわかるし、自分で作れる！
https://qcplanets.com/method/reliability/cumulative-hazard1/

(2) 復習すべき大事なポイント

関連記事から、復習すべき大事なポイントは、

① 順序統計量に従って x 軸データを大きさ順に並べる
② ハザードλと、その和である累積ハザード H を計算
③ 累積ハザードHから信頼度 R を計算

の３つですね。さらに、

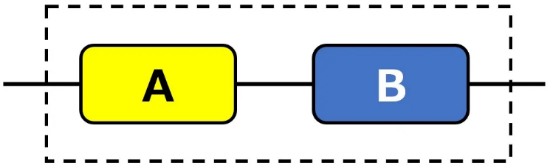
① ワイブル確率紙と累積ハザード法の違いがわかること
② カプランマイヤー法と累積ハザード法の違いがわかること

の 3 者の区別も大事ですね。

【2】直列モデルとは

(1) 図で理解する

不良原因が２つあり、それが直列につながったモデルを想定して、それを累積ハザード法で解析する方法です。



(2) 数式で理解する

指数分布でもワイブル分布でもよいですが、単体が次のモデルで表現できるとします。

信頼度 R を以下と定義する。$H(t)$は指数分布、ワイブル分布などが入る。
●単体 A： $R_A(t) = \exp(-H_A(t))$
●単体 B： $R_B(t) = \exp(-H_B(t))$

単体ＡとＢを直列につなぐと、信頼度は

信頼度$R_{AB}(t)$は、
$R_{AB}(t)= \exp(-H_A(t))\times\exp(-H_B(t))= \exp(-(H_A(t)+H_B(t)))$
$H_A(t)$と$H_B(t)$の和で考えればＯＫ！

なので、累積ハザード H のＡ，Ｂの和と、Ａ，Ｂそれぞれの累積ハザードHを求めてみましょう。

【3】直列モデルを使った累積ハザード法の例題>

直列モデルでかつ、打切り有る、全盛りパターンを解いてみましょう。

ある金属材料が破断するが、互いに独立な不良モデル A,B であることがすでに分かっているとする。そこで、試験材料 38 個をサンプルし、破断時間を測定した。不良モデル A,B 単体および直列モデル A+B について、累積ハザード法で解析せよ

<データ>
打切り有無（○：未故障(打切り有)、×故障(打切り無))

サンプル番号(A)	データti(D)	故障モードM	打切り有無	サンプル番号(A)	データti(D)	故障モードM	打切り有無
1	18	A	×	20	29	A	×
2	70	B	×	21	21	B	×
3	6	A	×	22	12	B	×
4	35	A	×	23	16	A	×
5	19	B	×	24	45	A	×
6	95	B	×	25	24	B	×
7	67	A	×	26	49	A	×
8	37	A	×	27	80	B	×
9	38	A	×	28	51	A	○
10	14	A	×	29	55	A	○
11	2	B	×	30	27	B	○
12	40	B	×	31	28	B	×
13	88	B	×	32	57	A	×
14	41	A	×	33	32	B	×
15	76	B	×	34	15	B	×
16	4	B	○	35	84	A	×
17	22	A	×	36	60	A	×
18	25	A	×	37	63	A	×
19	58	B	×	38	73	A	○

解いてみましょう。

【4】直列モデルを使って累積ハザード法を解いてみる
(1) 順序統計量に従って小さい順に並び替える
データを並び替えましょう。累積ハザード法の解法の基本ですね。

サンプル番号(A)	順位I(B)	逆順位K=n-i+1(n=20)(C)	データti(D)	故障モードM	打切り有無	サンプル番号(A)	順位I(B)	逆順位K=n-i+1(n=20)(C)	データti(D)	故障モードM	打切り有無
11	1	38	2	B	×	9	20	19	38	A	×
16	2	37	4	B	○	12	21	18	40	B	×
3	3	36	6	A	×	14	22	17	41	A	×
22	4	35	12	B	×	24	23	16	45	A	×
10	5	34	14	A	×	26	24	15	49	A	×
34	6	33	15	B	×	28	25	14	51	A	○
23	7	32	16	A	×	29	26	13	55	A	○
1	8	31	18	A	×	32	27	12	57	A	×
5	9	30	19	B	×	19	28	11	58	B	×
21	10	29	21	B	×	36	29	10	60	A	×
17	11	28	22	A	×	37	30	9	63	A	×
25	12	27	24	B	×	7	31	8	67	A	×
18	13	26	25	A	×	2	32	7	70	B	×
30	14	25	27	B	○	38	33	6	73	A	○
31	15	24	28	B	×	15	34	5	76	B	×
20	16	23	29	A	×	27	35	4	80	B	×
33	17	22	32	B	×	35	36	3	84	A	×
4	18	21	35	A	×	13	37	2	88	B	×
8	19	20	37	A	×	6	38	1	95	B	×

(2) 各モードについて累積ハザード H を計算する
単体については、その単体名がある行だけ計算し、直列モデルはまとめて計算します。式は下表のように計算していきます。

順位i (B)	逆順位 K=n-i+1 (n=38) (C)	故障モードM	打切り有無 ○：打切有 ×打切無	不良率hi 1/(逆順位) (E)	累積ハザード値 Hi(A)	累積 ハザード値 Hi(B)	累積 ハザード値 Hi(A+B)
1	38	B	×	1/38	−	1/38	1/38
2	37	B	○	−	−	1/38	1/38+1/37
3	36	A	×	1/36	1/36	−	1/38+1/37+1/36
4	35	B	×	1/35	−	1/38+1/35	1/38+…+1/35
5	34	A	○	−	1/36	−	1/38+…+1/34
6	33	B	×	1/33	−	1/38+1/35+1/33	1/38+…+1/33
7	32	A	×	1/32	1/36+1/32		1/38+…+1/32
・・・・・・	・・・・・・・・・・・					・・・	・・・

計算のポイントは、

① 各順位における不良率を計算するが、打切り有だと計算しない
② A,B 各モード単体に分けて計算する
③ 直列モード A+B は全順位について計算する

実際のデータは下表になります。一度計算すると理解が深まります。

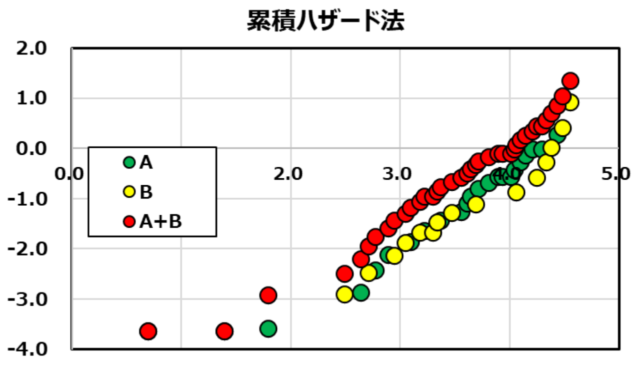
順位I (B)	逆順位 K=n-i+1 (n=20) (C)	故障モードM	打切り有無	不良率hi 1/(逆順位) (E)	累積ハザード値 Hi(A)	累積ハザード値 Hi(B)	累積ハザード値 Hi(A+B)	順位I (B)	逆順位 K=n-i+1 (n=20) (C)	故障モードM	打切り有無	不良率hi 1/(逆順位) (E)	累積ハザード値 Hi(A)	累積ハザード値 Hi(B)	累積ハザード値 Hi(A+B)
1	38	B	×	0.026	-	0.026	0.026	20	19	A	×	0.053	0.389	-	0.666
2	37	B	○	-	-	0.026	0.026	21	18	B	×	0.056	-	0.333	0.721
3	36	A	×	0.028	0.028	-	0.054	22	17	A	×	0.059	0.447	-	0.780
4	35	B	×	0.029	-	0.055	0.083	23	16	A	×	0.063	0.510	-	0.843
5	34	A	×	0.029	0.057	-	0.112	24	15	A	×	0.067	0.577	-	0.909
6	33	B	×	0.030	-	0.085	0.142	25	14	A	○	-	0.577	-	0.909
7	32	A	×	0.031	0.088	-	0.174	26	13	A	○	-	0.577	-	0.909
8	31	A	×	0.032	0.121	-	0.206	27	12	A	×	0.083	0.660	-	0.993
9	30	B	×	0.033	-	0.119	0.239	28	11	B	×	0.091	-	0.424	1.084
10	29	B	×	0.034	-	0.153	0.274	29	10	A	×	0.100	0.760	-	1.184
11	28	A	×	0.036	0.156	-	0.309	30	9	A	×	0.111	0.871	-	1.295
12	27	B	×	0.037	-	0.190	0.346	31	8	A	×	0.125	0.996	-	1.420
13	26	A	×	0.038	0.195	-	0.385	32	7	B	×	0.143	-	0.566	1.563
14	25	B	○	-	-	0.190	0.385	33	6	A	○	-	0.996	-	1.563
15	24	B	×	0.042	-	0.232	0.427	34	5	B	×	0.200	-	0.766	1.763
16	23	A	×	0.043	0.238	-	0.470	35	4	B	×	0.250	-	1.016	2.013
17	22	B	×	0.045	-	0.277	0.516	36	3	A	×	0.333	1.329	-	2.346
18	21	A	×	0.048	0.286	-	0.563	37	2	B	×	0.500	-	1.516	2.846
19	20	A	×	0.050	0.336	-	0.613	38	1	B	×	1.000	-	2.516	3.846

(3) 各モードにデータを分けてグラフ化する

A	データ ti (D)	累積 ハザード値 Hi(A)	logti	logHA	B	データ ti (D)	累積 ハザード値 Hi(B)	logti	logHB	A+B	データ ti (D)	累積 ハザード値 Hi(A+B)	logti	logHB
1	6	0.028	1.792	-3.584	1	2	0.026	0.693	-3.638	1	2	0.026	0.693	-3.638
2	14	0.057	2.639	-2.862	2	4	0.026	1.386	-3.638	2	4	0.026	1.386	-3.638
3	16	0.088	2.773	-2.426	3	12	0.055	2.485	-2.903	3	6	0.054	1.792	-2.917
4	18	0.121	2.891	-2.115	4	15	0.085	2.708	-2.463	4	12	0.083	2.485	-2.493
5	22	0.156	3.091	-1.855	5	19	0.119	2.945	-2.133	5	14	0.112	2.639	-2.189
6	25	0.195	3.219	-1.636	6	21	0.153	3.045	-1.877	6	15	0.142	2.708	-1.949
7	29	0.238	3.368	-1.434	7	24	0.190	3.178	-1.661	7	16	0.174	2.773	-1.751
8	35	0.286	3.556	-1.252	8	27	0.190	3.296	-1.661	8	18	0.206	2.891	-1.581
9	37	0.336	3.611	-1.091	9	28	0.232	3.333	-1.462	9	19	0.239	2.945	-1.431
10	38	0.389	3.638	-0.945	10	32	0.277	3.466	-1.283	10	21	0.274	3.045	-1.296
11	41	0.447	3.714	-0.804	11	40	0.333	3.689	-1.101	11	22	0.309	3.091	-1.173
12	45	0.510	3.807	-0.674	12	58	0.424	4.061	-0.859	12	24	0.346	3.178	-1.060
13	49	0.577	3.892	-0.551	13	70	0.566	4.249	-0.568	13	25	0.385	3.219	-0.955
14	51	0.577	3.932	-0.551	14	76	0.766	4.331	-0.266	14	27	0.385	3.296	-0.955
15	55	0.577	4.008	-0.551	15	80	1.016	4.382	0.016	15	28	0.427	3.333	-0.852
16	57	0.660	4.043	-0.416	16	88	1.516	4.478	0.416	16	29	0.470	3.368	-0.755
17	60	0.760	4.095	-0.275	17	95	2.516	4.554	0.923	17	32	0.516	3.466	-0.663
18	63	0.871	4.144	-0.138						18	35	0.563	3.556	-0.574
19	67	0.996	4.205	-0.004						19	37	0.613	3.611	-0.489
20	73	0.996	4.291	-0.004						20	38	0.666	3.638	-0.407
21	84	1.329	4.431	0.285						21	40	0.721	3.689	-0.327
										22	41	0.780	3.714	-0.248
										23	45	0.843	3.807	-0.171
										24	49	0.909	3.892	-0.095
										25	51	0.909	3.932	-0.095
										26	55	0.909	4.008	-0.095
										27	57	0.993	4.043	-0.007
										28	58	1.084	4.061	0.080
										29	60	1.184	4.095	0.169
										30	63	1.295	4.144	0.258
										31	67	1.420	4.205	0.350
										32	70	1.563	4.249	0.446
										33	73	1.563	4.291	0.446
										34	76	1.763	4.331	0.567
										35	80	2.013	4.382	0.699
										36	84	2.346	4.431	0.853
										37	88	2.846	4.478	1.046
										38	95	3.846	4.554	1.347

②結果をグラフ化

A,B 単体と、直列モデル A+B を累積ハザード法で計算しました。グラフはこうなります。



以上、「直列モデルを使った累積ハザード法がよくわかる」を解説しました。

【1】カプランマイヤー法を復習する
(1) 関連記事で復習
まずは、本冊子の【カプランマイヤー法が理解できる】を読んでください。

(2) カプランマイヤー法
教科書によっては、若干書き方が異なりますが、カプランマイヤー法とは

信頼度$S(t)=\prod_{i=1}^{n}\left(1-\frac{d_i}{n_i}\right)$

- d_i：故障数
- n_i：全体の個数

ポイントは、$\prod_{i=1}^{n}\left(1-\frac{d_i}{n_i}\right)$ の故障数/全体数　の累積掛け算の形であること！　シンプルで使いやすい！

【2】グリーンウッドの公式とは
信頼度$S(t)$の分散が、次式で表現できる。

$$V\bigl(S(t)\bigr)=S(t)^2\sum_i \frac{d_i}{n_i(n_i-d_i)}$$

【3】グリーンウッドの公式導出がわかる
信頼度$S(t)$はカプランマイヤー法では生存関数と言いますね。両辺を対数でとります。

$log\ S(t)=\sum_i\ log\left(1-\frac{d_i}{n_i}\right)$

となりますね。次に両辺について、分散 Var をつけてみましょう。

$Var(log\ S(t))=\sum_i\ Var\left(log\left(1-\frac{d_i}{n_i}\right)\right)$

ここから計算を進めるために、デルタ法を使います。強引な感じがしますが。

【4】デルタ法の力を借りる！
(1) デルタ法とは

確率変数Xの平均と分散が、
●$E[X]=\mu_X$
●$V[X]=\sigma_X^2$
とする正規分布に従うとして、$Y=g(X)$という変数変換をするときに、
$g(X)$をXの周りで 1 次式までテイラー展開をする方法である。

(2) デルタ法から導出できるもの
$Y=g(X)\fallingdotseq g(\mu_X)+\ (X-\mu_X)\ \ g'(\mu_X)$とテイラー展開できます。
ここに、両辺の分散を取ると 次式になります。
$V[Y=g(X)]\fallingdotseq \mathrm{V}[g(\mu_X)+\ (X-\mu_X)\ \ g'(\mu_X)]=\mathrm{V}[g(\mu_X)]+\ g'(\mu_X)^2V[X]+\mathrm{V}[-\mu_X g'(\mu_X)]$

ここで、
●(第 1 項)= V[$g(\mu_X)$]=0 (平均の分散はないので 0)
●(第 2 項)= $g'(\mu_X)^2V[X]=\ g'(\mu_X)^2\sigma_X^2$
●(第 3 項)= V[$-\mu_X g'(\mu_X)$]=0(平均の分散はないので 0))
より、式の結果は、

$V[Y=g(X)] \fallingdotseq g'(\mu_X)^2\sigma_X^2$
となり、この式をグリーンウッドの公式に活用します。

(3) グリーンウッドの公式に活用する
$V[Y=g(X)] \fallingdotseq g'(\mu_X)^2\sigma_X^2$
を $g(X)=logX$とすると、
$V[logX] \fallingdotseq g'(\mu_X)^2\sigma_X^2 = \frac{1}{(\mu_X)^2}Var(X)$ となります。
$X=S$ と直すと

$V[logS] \fallingdotseq \frac{1}{S^2}Var(S)$
となり、この式をグリーンウッドの公式に活用します。

【5】(続)グリーンウッドの公式導出がわかる
(1) 式を再掲
式を再掲します。
$Var(log\,S(t)) = \sum_i \ Var\left(log\left(1-\frac{d_i}{n_i}\right)\right)$
(2) 二項分布の分散の力を借りる
$Var\left(log\left(1-\frac{d_i}{n_i}\right)\right)$において、$p_i=\frac{d_i}{n_i}$とおくと、
二項分布の分散から
$Var\left(1-\frac{d_i}{n_i}\right) = Var\left(\frac{d_i}{n_i}\right) = \frac{p_i(1-p_i)}{n_i}$となります。

よって、
$Var\left(log\left(1-\frac{d_i}{n_i}\right)\right) = \frac{1}{\left(1-\frac{d_i}{n_i}\right)^2} Var\left(1-\frac{d_i}{n_i}\right) = \frac{1}{(1-p_i)^2}\frac{p_i(1-p_i)}{n_i} = \frac{d_i}{n_i(n_i-d_i)}$
となります。

(3) 式を変形すると
$Var(log\,S(t)) = \sum_i \ Var\left(log\left(1-\frac{d_i}{n_i}\right)\right) = \sum_i \ \frac{d_i}{n_i(n_i-d_i)}$
であり、
$Var(log\,S) \fallingdotseq \frac{1}{S^2}Var[S] = \sum_i \ \frac{d_i}{n_i(n_i-d_i)}$
より、

$Var[S] = S^2\sum_i \ \frac{d_i}{n_i(n_i-d_i)}$
となりました。めっちゃ、強引でしたが、導出できました！

以上、「(カプランマイヤー法) グリーンウッドの公式導出がわかる」を解説しました。

信頼性工学に使う経験分布関数がわかる

【1】経験分布関数とは

(1) 経験分布関数とは

変数$X=(X_1,X_2,\ldots,X_n)$を連続な独立同一分布$F(x)$に従うとし、$X_1,X_2,\ldots,X_n(X_1<X_2<\cdots<X_n)$を順序統計量とします。このとき、以下の式を経験分布関数と定義します。

●経験分布関数

$$F_n(x)=\frac{x\text{以下となる}X_i\text{の個数}}{n}$$

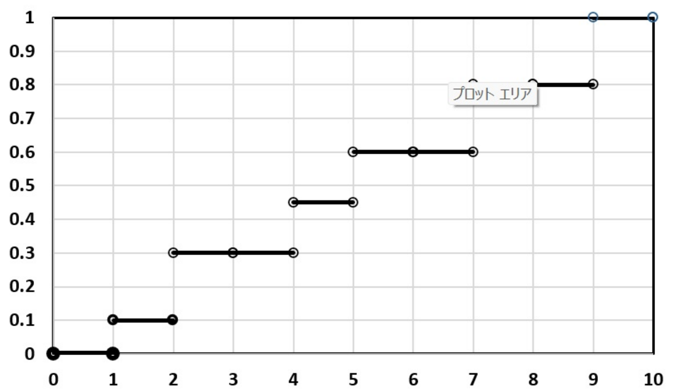
$$=\begin{cases}0\ (x<X_1)\\ \frac{i}{n}\ (X_i<x<X_{i+1}\ (i=1,2,\ldots,n-1))\\ 1\ (x>X_n)\end{cases}$$

(2) グラフ描いてみると、理解しやすい。

実際に描いてみましょう。百聞は一見に如かず！データを用意します。

x	y	x	y
0	0	6	0.6
1	0.1	7	0.8
2	0.3	8	0.8
3	0.3	9	1
4	0.45	10	1
5	0.6	-	-

グラフに描くと下図になりますね。



(3) 信頼性工学で経験分布関数を使う

この変な関数をどこで使うか？

●不良個数を実測すると、時間と不良個数のデータが取れる。そのデータそのものが経験分布関数である。
●信頼性工学は、実データである離散データ(経験分布関数)をモデル化した連続系の指数分布モデルを使う。
●信頼性工学では打切りデータを取り扱う。打切りデータの考え方のベースになるのが経験分布関数

なので、信頼性工学を究めるには、経験分布関数を理解しておく必要があります。

【2】経験分布関数を描いてみよう

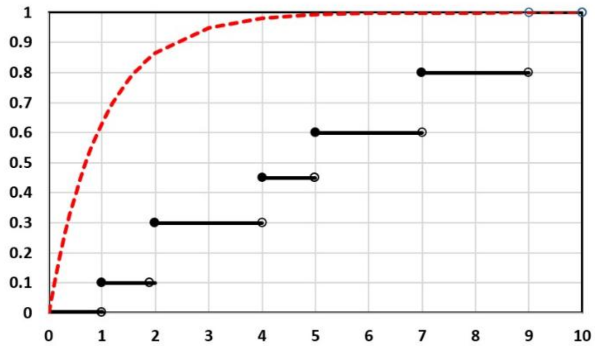
(1) 基本は簡単

上のグラフを見ると、

① x,y のデータを用意する
② 連続性はなく、階段みたいな関数

(2) 信頼性工学で経験分布関数を使いたい
　いろんな x,y のパターンがあってもよいですが、信頼性工学で扱いたいので、指数分布関数に近いデータを考えます。
①指数分布関数
　指数分布関数として、以下を用意します。
$F(x)=1-e^{-x}$
経験分布関数と指数分布関数を比較しましょう。

②指数分布関数に遠いデータ
先ほどのデータを指数分布関数　$F(x)=1-e^{-x}$　と比較します。

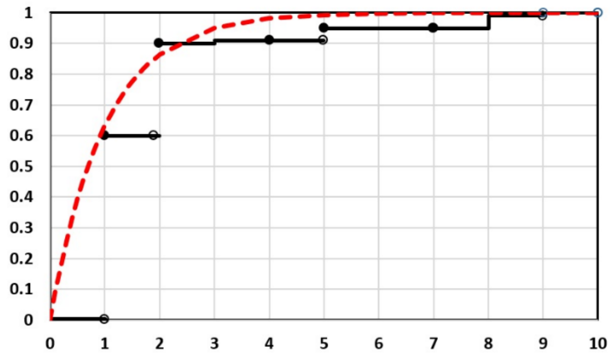


経験分布関数には、自由に x,y のデータを入れてよいですが、この場合は、指数分布関数から離れているので、信頼性工学では、指数分布関数としてモデル化することができません。

③指数分布関数に近いデータ
　次に、不良個数が次のようなデータが取れたとしましょう。

x	y	x	y
0	0	6	0.95
1	0.6	7	0.95
2	0.9	8	0.99
3	0.91	9	1
4	0.91	10	1
5	0.95	-	-

先ほどのデータを指数分布関数　$F(x)=1-e^{-x}$　と比較します。



この場合は、指数分布関数に近いので、信頼性工学では、指数分布関数としてモデル化できます。

リアルデータをそのままプロットすると経験分布関数になりますこれと指数分布関数が近いから OK,遠いから NG ではありません。データから何を考えるか？が一番大事です。何も考えずに、近似や計算処理しても何も得られません。

【3】経験分布関数の期待値と分散を導出

離散系な分布関数ですが、期待値と分散を導出します。

(1) 経験分布関数の確率密度関数$f(x)$

経験分布関数は

$F_{n(x)}=\frac{i}{n}\ (X_i < x < X_{i+1}\ (i=1,2,\ldots,n-1))$

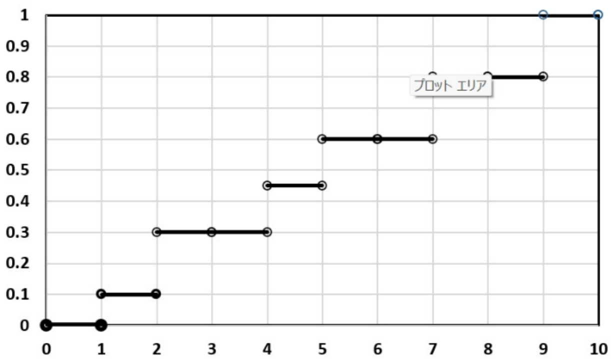
これを微分すればよいので、確率密度関数$f(x)$は、

$f(x)=\frac{1}{n}$です。

(2) 経験分布関数の期待値を導出

期待値 E[X]=$\sum_{i=1}^{n} x_i f(x)=\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{1}{n}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$

となります。具体的には、先ほどの例でいうと、



期待値 E[X]= $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i=\frac{1}{10}$(0+1+2+3+4+5+6+7+8+9+10)=5.5

(3) 経験分布関数の分散を導出

分散 V[X]= $\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2 f(x)$=$\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2\frac{1}{n}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2$

となります。具体的には、先ほどの例でいうと、

分散 V[X]=$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2$=$\frac{1}{10}\{(0-5.5)^2+(1-5.5)^2+\cdots+(10-5.5)^2\}$=11.28

となります。

計算はできますが、「ふーん」とピンと来ませんが、それが経験分布関数です。

以上、「信頼性工学に使う経験分布関数がわかる」を解説しました。