1変数の確率変数の変換がよくわかる

1. 1変数の確率変数の変換がよくわかる(1次式編)
2. 1変数の確率変数の変換がよくわかる(2次式編)
3. 1変数の確率変数の変換がよくわかる(0.5次式編)
4. 1変数の確率変数の変換がよくわかる(応用編)

1変数の確率変数の変換がよくわかる(1次式編)

【1】確率変数の変換は高校数学でほぼイケます！大丈夫！
「確率変数の変換は難しいけど、理解しないと、正規分布、t 分布、χ2 乗分布、F 分布との関係が理解できないから困っている！」
とありませんか？

「確率変数の変換は高校数学でほぼイケます！大丈夫！」
「1つ解法で解ける解法で、たくさんの例題を見る方がマスターは速い！」
慣れてきたら、公式を見ましょう。

【2】公式見ても理解しにくいから無視していい！
(1) 公式（紹介だけ）
確率変数の変換は、正規分布、t 分布、χ2 乗分布、F 分布との関係を理解する上で大事ですが、わかりにくい！

XとYが$Y=h(X)$となる。Xは確率密度関数$f(x)$に従うとき、Yの確率密度関数$g(y)$は、

$$g(y)=\frac{d}{dy}F_y(y)=\frac{d}{dy}F_X(h^{-1}(y))=\frac{d}{dx}F_X(x)|_{h^{-1}(y)}\frac{dh^{-1}(y)}{dy}=f(h^{-1}(y))\frac{dh^{-1}(y)}{dy}$$

確かに、満点の回答なのですが、公式理解できますか？

(2)公式が理解できない理由
何度も見ても理解できない理由を挙げると

1. $f(x)$と$g(y)$の関係が見えない。
2. 単にX⇒Yの変換だからx=をy=に変えるだけとしたいけど、よくわからない公式になっている
3. $Y=aX+b$、$Y=X^2$、$Y^2=X$などの例題が教科書にあるが公式が理解できないから計算しても何をやっているのかがわからない

(3) 公式から勉強する方法を変えてみる！
発想を変えて、「公式は後でいいから、自分で理解できる解き方から始める」

【3】実例を使って理解する！
実際に、QC プラネッツの解き方で例題を理解しましょう。今回は 1 次式編として、
$Y=aX+b$型の変換を考えます。
(1) 例題

【例題】
確率変数Xの確率密度関数が
$f(x)=1-|x|$ (-1 ≥ x ≥1, その他0)
の場合、$Y=4X+3$で与えられる確率変数Yの確率密度関数$g(y)$を求めよ。

公式は使いません。なお、1次式の変換の公式は、

$$g(y)=\frac{1}{|a|}f\left(\frac{y-b}{a}\right)$$

ですが、特に$\frac{1}{|a|}$がなぜ必要か？が理解するのが難しいです。

(2) 解法の概要

解法は以下の通りで実施します。これはどんな 1 変数の確率変換でも同様の方法でイケます！

1. $y=ax+b$を$x=\frac{y-b}{a}$の式に直す
2. $f(x)$のxに$\frac{y-b}{a}$をそのまま代入する
3. 積分の式からx⇒yに変換
   $\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx$ = $\int_{y_1}^{y_2} f(\frac{y-b}{a})\frac{dx}{dy}dy$
4. 確率密度関数$g(y)$は(右辺)の積分から
   $g(y)=f(\frac{y-b}{a})\frac{dx}{dy}$

$g(y)$についての積分の式は、

$$\int_{y_1}^{y_2} g(y)dx$$

なので、この式に合うように、

$$g(y)=f(\frac{y-b}{a})\frac{dx}{dy}$$

とすれば OK ですね！やっていること自体は、高校の数学レベルです。dx を dy に変えるために dx/dy×dy とする方法も大学入試で頻出です！

結局、

$$g(y)=f(\frac{y-b}{a})\frac{dx}{dy}$$

が、公式

$$g(y)=\frac{1}{|a|}f(\frac{y-b}{a})$$

に一致しますが、

$Y=aX+b$、$Y=X^2$、$Y^2=X$の変換の例題にも応用が利きます。

(3)実際に解く

1.$y=ax+b$を$x=\frac{y-b}{a}$の式に直す

$y=4x+3$を$x=\frac{y-3}{4}$に変えます。これだけ！

2.$f(x)$のxに$\frac{y-b}{a}$をそのまま代入する

$f(x)$に代入すると、

$f(x)$= $f(\frac{y-3}{4})$=1-|$\frac{y-3}{4}$|

3.積分の式からx⇒yに変換

次に、x の範囲から y の範囲に変えます。

変換	下端	⇒	上端
x	-1	⇒	1
y	-1	⇒	7

x は-1⇒1 と 2 増加しますが、y は-1⇒7 と 8 増加の 4 倍拡大しますね。

積分は

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = \int_{-1}^{7} f(\frac{y-b}{a})\frac{dx}{dy}dy$$

さらに、

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{4}$$

なので、代入すると、

積分は

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = \int_{-1}^{7} f(\frac{y-b}{a})\frac{1}{4}dy$$

4.確率密度関数$g(y)$は(右辺)の積分から導出

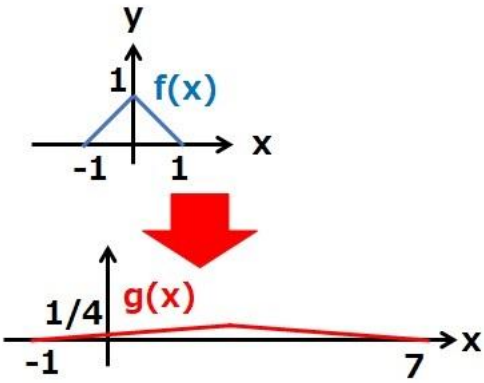
よって、4.確率密度関数$g(y)$は(右辺)の積分から

$$g(y) = f(\frac{y-b}{a})\frac{1}{4}$$

より、

$$g(y) = \frac{1}{4}(1 - |\frac{y-3}{4}|)$$

図で比較すると、



横に広がった分、縦が縮んだイメージ。確かにそうですね！

いろいろな関数を使って、確率変数の変換を見て慣れていきましょう！
本記事の内容は、ほぼ高校数学で解けましたね！

以上、「1 変数の確率変数の変換がよくわかる(1 次式編)」を解説しました。

【1】公式見ても理解しにくいから無視していい！
(1) 公式（紹介だけ）

XとYが$Y=h(X)$となる。Xは確率密度関数$f(x)$に従うとき、Yの確率密度関数$g(y)$は、

$$g(y)=\frac{d}{dy}F_y(y)=\frac{d}{dy}F_X(h^{-1}(y))=\frac{d}{dx}F_X(x)|_{h^{-1}(y)}\frac{dh^{-1}(y)}{dy}=$$
$$f(h^{-1}(y))\frac{dh^{-1}(y)}{dy}$$

さらに、$Y=X^2$の場合は、理解不能な公式展開があります。公式は次の通りです。

XとYが$Y=X^2$となる。Xは確率密度関数$f(x)$に従うとき、Yの確率密度関数$g(y)$は、

$$g(y)=\frac{d}{dy}F_y(y)=\frac{d}{dy}(F_X(\sqrt{y})-F_X(-\sqrt{y}))$$
$$=\frac{d}{dx}F_X(\sqrt{x})|_{\sqrt{y}}\frac{d}{dy}(\sqrt{y})-\frac{d}{dx}F_X(\sqrt{x})|_{-\sqrt{y}}\frac{d}{dy}(-\sqrt{y})$$
$$=f(\sqrt{y})\frac{1}{2\sqrt{y}}-f(\sqrt{-y})(-\frac{1}{2\sqrt{y}})$$
$$=\frac{1}{2\sqrt{y}}(f(\sqrt{y})+f(-\sqrt{y}))$$

より

$$g(y)=\frac{1}{2\sqrt{y}}(f(\sqrt{y})+f(-\sqrt{y}))$$

確かに、満点の回答なのですが、難しいので、わかりやすく解説します！

【2】実例を使って理解する！
今回は 2 次式編として、$Y=X^2$型の変換を考えます。
(1) 例題

> 【例題】
> 確率変数 X の確率密度関数が
> $$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$$
> の場合、$Y=X^2$で与えられる確率変数Yの確率密度関数$g(y)$を求めよ。

教科書見ると、

XとYが$Y=X^2$となる。Xは確率密度関数$f(x)$に従うとき、Yの確率密度関数$g(y)$は、

$$g(y)=\frac{d}{dy}F_y(y)=\frac{d}{dy}(F_X(\sqrt{y})-F_X(-\sqrt{y}))$$
$$=\frac{d}{dx}F_X(\sqrt{x})|_{\sqrt{y}}\frac{d}{dy}(\sqrt{y})-\frac{d}{dx}F_X(\sqrt{x})|_{-\sqrt{y}}\frac{d}{dy}(-\sqrt{y})$$
$$=f(\sqrt{y})\frac{1}{2\sqrt{y}}-f(\sqrt{-y})(-\frac{1}{2\sqrt{y}})$$
$$=\frac{1}{2\sqrt{y}}(f(\sqrt{y})+f(-\sqrt{y}))$$

より

$$g(y)=\frac{1}{2\sqrt{y}}(f(\sqrt{y})+f(-\sqrt{y}))$$

これがわからへんねん！！でも、大丈夫です！お任せください！

(2) 解法の概要

1. $y=x^2$を$x=\pm\sqrt{y}$の式に直す
2. $f(x)$のxに$\pm\sqrt{y}$をそのまま代入する
3. 積分の式からx⇒yに変化するが、2次式の変換独自のやり方(難しくないのでご安心ください！)をまずは暗記！

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx = \int_{y_1}^{y_2} (f(+\sqrt{y})\frac{dx}{d(y+)} - f(-\sqrt{y})\frac{dx}{d(y-)})dy$$

4. 確率密度関数$g(y)$は(右辺)の積分から

$$\int_{y_1}^{y_2} g(y)dy = \int_{y_1}^{y_2} (f(+\sqrt{y})\frac{dx}{d(y+)} - f(-\sqrt{y})\frac{dx}{d(y-)})dy$$

ここで、

● $\frac{dx}{d(y+)} = \frac{d(+\sqrt{y})}{d(y)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$

● $\frac{dx}{d(y-)} = \frac{d(-\sqrt{y})}{d(y)} = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$

に注意します。

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx = \int_{y_1}^{y_2} (f(+\sqrt{y})\frac{dx}{d(y+)} - f(-\sqrt{y})\frac{dx}{d(y-)})dy$$

だけ、２次式の変換の特殊な式ですが、まずはこれだけ暗記しましょう。教科書よりはるかに易しいし覚えやすい式なはずです。
$Y=aX+b$、$Y=X^2$、$Y^2=X$の変換の例題にも応用が利きます。

(3) 解法

では、実際に解いてみましょう。

1.$y=x^2$を$x=\pm\sqrt{y}$の式に直す

これだけ！

2.$f(x)$のxに$\pm\sqrt{y}$をそのまま代入する

$f(x)$に代入すると、

$$f(x) = f(\pm\sqrt{y}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\sqrt{(\pm y)^2}}{2}}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y}{2}}$$

3.積分の式から$x \Rightarrow y$に変換

x の範囲から y の範囲に変えます。

変換	下端	⇒	上端
x	-∞	⇒	∞
y	0	⇒	∞

x は-∞⇒∞増加しますが、y は x の 2 乗なので、0⇒∞と拡大しますね。

積分は、QCプラネッツのオリジナル暗記式を持ってきましょう。

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{0}^{\infty} (f(+\sqrt{y})\frac{dx}{d(y+)} - f(-\sqrt{y})\frac{dx}{d(y-)})dy$$

4.確率密度関数$g(y)$は(右辺)の積分から導出

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{0}^{\infty} (f(+\sqrt{y})\frac{dx}{d(y+)} - f(-\sqrt{y})\frac{dx}{d(y-)})dy$$
$$= \int_{0}^{\infty} (\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y}{2}}\frac{1}{2\sqrt{y}} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y}{2}}(-\frac{1}{2\sqrt{y}}))dy$$
$$= \int_{0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y}{2}}\frac{1}{\sqrt{y}}dy$$
$$= \int_{0}^{\infty} g(y)dy$$

よって

$$g(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y}{2}}\frac{1}{\sqrt{y}}$$

できましたね！

★計算結果が重要！
$f(x)$は N(0,1)の正規分布の式ですが、2 乗に変換した
$g(y)$は自由度 1 のχ2 乗分布の式になっています。
正規分布とχ2 乗分布をつなぐ重要な問いとなります。

いろいろな関数を使って、確率変数の変換を見て慣れていきましょう！
本記事の内容は、ほぼ高校数学で解けましたね！

以上、「1 変数の確率変数の変換がよくわかる(2 次式編)」を解説しました。

1 変数の確率変数の変換がよくわかる(0.5 次式編)

【1】実例を使って理解する！
実際に、例題 2 問を解いて理解しましょう。今回は 0.5 次式編として、$Y^2 = X$型の変換を考えます。
(1) 例題 2 題

【例題 1】 確率変数Xの確率密度関数が $f(x) = \frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}$ $(0 \leq x)$ の場合、$Y^2 = X$で与えられる確率変数Yの確率密度関数$g(y)$を を求めよ。

【例題 2】 確率変数Xの確率密度関数が $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}x^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{x}{2}}$ $(0 \leq x)$ の場合、$Y^2 = X$で与えられる確率変数Yの確率密度関数$g(y)$を を求めよ。

例題 1 は指数関数、例題 2 は自由度 1 の χ 2 乗分布です。

(2) 解法の概要
解法は以下の通りで実施します。これはどんな 2 変数の確率変換でも同様の方法でイケます！

1. $y^2 = x$を$x = y^2$の式に直す
2. $f(x)$のxにy^2をそのまま代入する
3. 積分の式から$x \Rightarrow y$に変形する
   $dx = \frac{dx}{dy}dy$と変形(これは高校数学レベル)
4. 確率密度関数$g(y)$は(右辺)の積分から
   $\int_{y_1}^{y_2} g(y)dy = \int_{y_1}^{y_2} (f(y^2)\frac{dx}{dy}dy$

$Y = aX + b$、$Y = X^2$、$Y^2 = X$の変換の例題にも応用が利
きます。
完全に同じ解き方でイケます！

(3) 解法
1. $y^2 = x$を$x = y^2$の式に直す

これだけ！です。

2. $f(x)$のxにy^2をそのまま代入する

$f(x)$に代入すると、

【例題1】
$f(x) = f(y^2) = \frac{1}{2}e^{-\frac{y^2}{2}}$

【例題2】
$f(x) = f(y^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(y^2)^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{y^2}{2}}$
$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}y^{-1} \cdot e^{-\frac{y^2}{2}}$

3. 積分の式からx⇒yに変形する

xの範囲からｙの範囲に変えます。

問い	変換	下端	⇒	上端
例題1	x	0	⇒	∞
	y($y^2=x$)	0	⇒	∞
例題2	x	0	⇒	∞
	y($y^2=x$)	0	⇒	∞

x は 0⇒∞増加します。一方 y は $y=+\sqrt{x}$で(右辺)は正なので、 y も 0⇒∞増加します。

4.確率密度関数$g(y)$は(右辺)の積分から導出

【例題1】

$$\int_0^\infty f(x)dx = \int_0^\infty (f(y^2)\frac{dx}{dy}dy$$
$$= \int_0^\infty (\frac{1}{2}e^{-\frac{y^2}{2}}) \cdot (2y)dy$$
$$= \int_0^\infty (e^{-\frac{y^2}{2}}) \cdot (y)dy$$
$$= \int_0^\infty g(y)dy$$

よって

$$g(y) = e^{-\frac{y^2}{2}} \cdot y \ (y \geq 0)$$

できましたね！

【例題2】

$$\int_0^\infty f(x)dx = \int_0^\infty (f(y^2)\frac{dx}{dy}dy$$
$$= \int_0^\infty (\frac{1}{\sqrt{2\pi}}y^{-1} \cdot e^{-\frac{y^2}{2}}) \cdot (2y)dy$$
$$= \int_0^\infty \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}dy$$
$$= \int_0^\infty g(y)dy$$

よって

$$g(y) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}} \ (y \geq 0)$$

できましたね！

例題 2 からは、$f(x)$は自由度 1 の χ2 乗分布の式ですが、
0.5 乗に変換した$g(y)$は N(0,1)の正規分布の式の型になっています。
正規分布と χ2 乗分布をつなぐ重要な問いとなります。

以上、「1 変数の確率変数の変換がよくわかる(0.5 次式編)」を解説しました。

1 変数の確率変数の変換がよくわかる(応用編)

今回は２問応用例を解説します。１つの解法で解けます！　大丈夫です！ご安心ください。

1. $Y = X^3$の変換事例 2. $\log Y = X$の変換事例(対数正規分布の確率密度関数を導出)

【1】実例を使って理解する！
今回は応用編として２問解きます。解き方は同じです！ご安心ください。
(1) 例題

【例題 1】 確率変数Xの確率密度関数が $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x}{2}}$ (N(0,1^2)の正規分布) の場合、$Y = X^3$で与えられる確率変数Yの確率密度関数$g(y)$を求めよ。

【例題 2】 確率変数Xの確率密度関数が $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x}{2}}$ (N(0,1^2)の正規分布) の場合、$logY = X$で与えられる確率変数Yの確率密度関数$g(y)$を求めよ。

例題１は３次元の場合の例、例題２は対数の場合の例で対数正規分布の確率密度関数が導出できます。

(2) 解法の概要

1. $y = (x$の式$)$を$x = (y$の式$)$に直す
2. $f(x)$のxに$(y$の式$)$をそのまま代入する
3. 積分の式から$x \Rightarrow y$に変形する
   $dx = \frac{dx}{dy}dy$と変形(これは高校数学レベル)
4. 確率密度関数$g(y)$は(右辺)の積分から
   $\int_{y_1}^{y_2} g(y)dy = \int_{y_1}^{y_2} (f(y\text{の式})\frac{dx}{dy}dy$

(3) 解法
では、実際に解いてみましょう。

1. $y = (x$の式$)$を、$x = (y$の式$)$に直す

【例題1】

では、
$Y = X^3$
$X = Y^{\frac{1}{3}}$
に変形します。

【例題2】では、
$logY = X$
はそのままでOKです。

2. $f(x)$のxに(yの式)をそのまま代入する

$f(x)$に代入すると、

【例題1】

$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$

$f(Y^{\frac{1}{3}})=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{Y^{\frac{2}{3}}}{2}}$

【例題2】

$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$

$f(logY)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(logY)^2}{2}}$

3. 積分の式からx⇒yに変形する

xの範囲から y の範囲に変えます。

問い	変換	下端	⇒	上端
例題1	x	-∞	⇒	∞
	y($=x^3$)	-∞	⇒	∞
例題2	x	-∞	⇒	∞
	y($logy=x$)	0	⇒	∞

$Y=X^3$,$logY=X$の式の関係性から範囲を求めましょう。

4.確率密度関数$g(y)$は(右辺)の積分から導出

【例題1】

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx=\int_{-\infty}^{\infty}f(y^{\frac{1}{3}})\frac{dx}{dy}dy$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{Y^{\frac{2}{3}}}{2}}\cdot(\frac{1}{3}y^{-\frac{2}{3}})dy$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}g(y)dy$$

よって

$g(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{Y^{\frac{2}{3}}}{2}}\cdot(\frac{1}{3}y^{-\frac{2}{3}})$

できましたね！

【例題2】

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} (f(logY))\frac{dx}{dy}dy$$

$$= \int_{0}^{\infty} (\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(logY)^2}{2}}) \cdot (\frac{1}{y})dy$$

$$= \int_{0}^{\infty} g(y)dy$$

よって

$g(y) = (\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(logY)^2}{2}}) \cdot (\frac{1}{y})$ (y ≥ 0)

できましたね！

この式が、対数正規分布の確率密度関数です。簡単に導出できますね。

以上、「1 変数の確率変数の変換がよくわかる(応用編)」を解説しました。