畳み込み積分がよくわかる

1. 畳み込み積分がよくわかる(一様分布と指数分布)
2. 畳み込み積分がよくわかる(ポアソン分布と他の分布関数)
3. 畳み込み積分がよくわかる(正規分布と指数分布)
4. 畳み込み積分がよくわかる(χ2 乗分布どうし)
5. 畳み込み積分がよくわかる(χ2 乗分布と他の分布関数)

畳み込み積分がよくわかる(一様分布と指数分布)

【1】畳み込み積分とは
畳み込み積分の基本をまとめた関連記事を確認ください。
簡単にわかる解説と、身近な事例を挙げています。高校数学で理解できるレベルなので安心ください。

【関連記事】畳み込み積分がよくわかる(一様分布どうし)
https://qcplanets.com/method/statistics-method/convolution-integral-1/

【2】畳み込み積分(X+Y=Z)
(1) 例題

2つの関数
●$f(x)$=1 (0 ≤ x ≤ T) それ以外は0
●$g(y)=e^{-ay}$ (0 ≤ y) それ以外は0 (定数aは正)
において、Z=X+Yを満たす確率密度関数$h(z)$を作れ。

難しい！と思ってしまいますが、落ち着いて解きましょう。次の 3step で解いていきます。

1. 畳み込み積分の式を作る
2. 積分区間を確認(ここが一番難しい)
3. 積分区間の場合分けに合わせて丁寧に計算

(2) 解法 step1(畳み込み積分の式を作る)

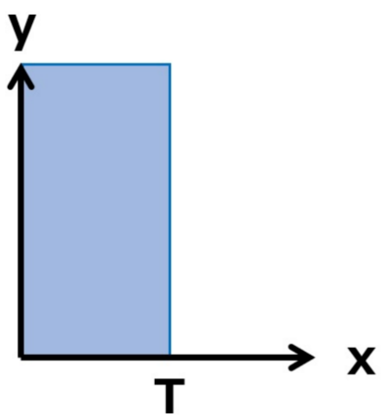
$$h(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(x-t)dt$$

$(t)+(x-t)=x$ の関係が成り立っています。

(3) 解法 step2(積分区間を確認)

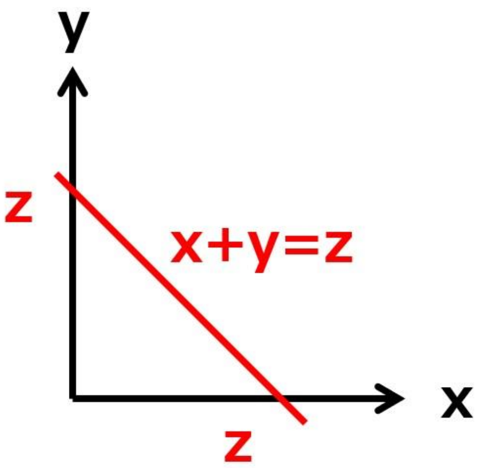
x,yの制約条件は 0 ≤ x ≤ T, 0 ≤ y です。

領域を図示します。



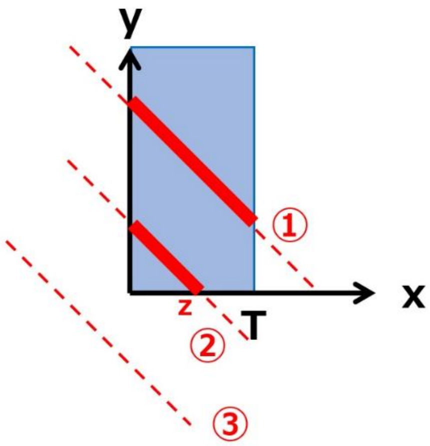
その領域内で　z=x+y を考えます。

z=x+y を y=-x+z として、xy 平面で傾き-1,y 切片 z の直線を考える



y=-x+z が積分領域内にどう入るかによって場合分けを網羅する！

すると、下図のように 3 パターン積分区間が変わります。



●①は(x,y)=(T,0)より上(つまり T ≦ z)なので、図のように、x=0〜T の区間で積分 ●②は(x,y)=(0,0)以上①以下(つまり 0 ≦ z ≦ T)なので、図のように、x=0〜z の区間で積分 ●③は(x,y)=(0,0)以下(つまり z ≦ 0)で、積分領域外なので、h(z)=0

という 3 つの場合分けをして、畳み込み積分をします。

難しそうに見えますが、この場合分けも高校数学、領域のところで学ぶ内容です。

x,y の積分領域に制限があると、畳み込み積分は場合分けして積分しないといけない面倒臭さがあります。

(4) 解法 step3(積分計算)
①T ≦ z のとき

$$h(z)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(z-x)dx$$
$$=\int_{0}^{T} 1\cdot e^{-a(z-x)}dx$$
$$=e^{-az}\frac{1}{a}\left[e^{ax}\right]_0^T$$
$$=\frac{1}{a}e^{-az}\left(e^{aT}-1\right)$$

②0 ≦ z ≦ T のとき

$$h(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(z-x)dx$$
$$= \int_{0}^{z} 1 \cdot e^{-a(z-x)} dx$$
$$= e^{-az} \frac{1}{a} [e^{ax}]_0^z$$
$$= \frac{1}{a}(1-e^{-az})$$

③z ≦ 0 のとき
積分領域外なので、h(z)=0
できましたね！

【3】畳み込み積分(X-Y=Z)
X+Y=Z から X-Y=Z に変えますが、解き方は全く同じです。でも端折らずに解説します。統計学は途中経過を端折ると読者が困ってしまいますから。
(1) 例題

> ２つの関数
> ●$f(x)$=1 (0 ≤ x ≤ T) それ以外は0
> ●$g(y)$=e^{-ay} (0 ≤ y) それ以外は0 (定数aは正)
> において、Z=X-Yを満たす確率密度関数$h(z)$を作れ。

難しい！と思ってしまいますが、落ち着いて解きましょう。次の 3step で解いていきます。

> 1. 畳み込み積分の式を作る
> 2. 積分区間を確認(ここが一番難しい)
> 3. 積分区間の場合分けに合わせて丁寧に計算

(2) 解法 step1(畳み込み積分の式を作る)

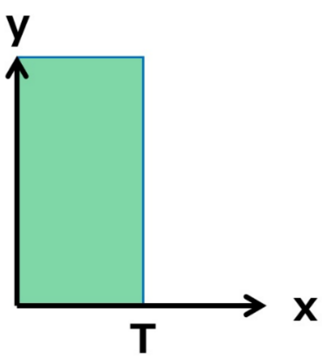
$$h(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(x-t)dt$$

$(t)-(t-x) = x$の関係が成り立っています。X+Yの場合との違いも意識して確認ください。

(3) 解法 step2(積分区間を確認)

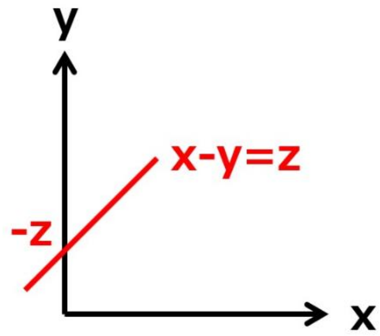
> x,y の制約条件は 0 ≦ x ≦ T, 0 ≦ y です。

領域を図示します。



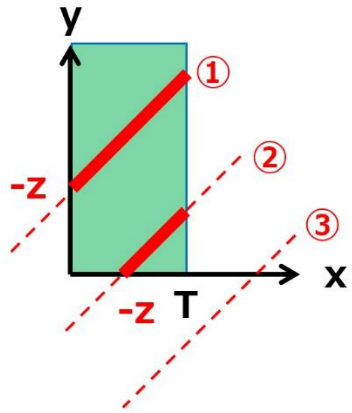
その領域内で　z=x-y を考えます。

z=x-y を y=x-z として、xy 平面で傾き 1,y 切片-z の直線を考える



y=x-z が積分領域内にどう入るかによって場合分けを網羅する！

すると、下図のように 3 パターン積分区間が変わります。



●①は(x,y)=(0,0)より上(つまり 0 ≦ -z)なので、図のように、x=0～T の区間で積分
●②は(x,y)=(0,0)以上①以下(つまり-T ≦ -z ≦ 0)なので、図のように、x=-z～T の区間で積分
●③は(x,y)=(0,0)以下(つまり-z ≦ -T)で、積分領域外なので、h(z)=0

-z があるので、-1 で割って再掲します。

●①は(x,y)=(0,0)より上(つまり z ≦ 0)なので、図のように、x=0～T の区間で積分
●②は(x,y)=(0,0)以上①以下(つまり 0 ≦ z ≦ T)なので、図のように、x=-z～T の区間で積分
●③は(x,y)=(0,0)以下(つまり T ≦ z)で、積分領域外なので、h(z)=0

という 3 つの場合分けをして、畳み込み積分をします。

難しそうに見えますが、この場合分けも高校数学、領域のところで学ぶ内容です。

x,y の積分領域に制限があると、畳み込み積分は場合分けして積分しないといけない面倒臭さがあります。

(4) 解法 step3(積分計算)

①z ≦ 0 のとき

$$h(z)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x-z)dx$$
$$=\int_{0}^{T} 1\cdot e^{-a(x-z)}dx$$
$$=e^{az}\left(\frac{-1}{a}\right)\left[e^{-ax}\right]_0^T$$
$$=\frac{1}{a}e^{az}\left(1-e^{-aT}\right)$$

②0 ≦ z ≦ T のとき

$$h(z)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)g(x-z)dx$$

$$=\int_{-z}^{T}1\cdot e^{-a(x-z)}dx$$

$$=e^{az}(\frac{-1}{a})[e^{-ax}]_{-z}^{T}$$

$$=\frac{1}{a}(e^{2az}-e^{a(z-T)})$$

③ T ≦ z のとき
積分領域外なので、h(z)=0
できましたね！

いろいろな関数を使って畳み込み積分を見て慣れていきましょう！
本記事の内容は、ほぼ高校数学で解けましたね！

以上、「畳み込み積分がよくわかる(一様分布と指数分布)」を解説しました。

畳み込み積分がよくわかる(ポアソン分布と他の分布関数)

【1】ポアソン分布と他の分布関数は畳み込み積分がほとんどできない
(1) 分布関数
列挙すると、●一様分布、●指数分布、●正規分布、●χ2 分布
と統計学でよく使う分布関数でポアソン分布との畳み込み積分をやってみます。
(2) ポアソン分布と他の分布関数は畳み込み積分がほとんどできない
計算した結果です。

ー	ポアソン分布
一様分布	△
指数分布	×
正規分布	×
ポアソン分布	◯
x2分布	×

ほとんど他の分布関数とは相性がわるいですね。一様分布の限定的な条件くらいです。

【2】畳み込み積分ができない理由
(1) ポアソン分布の式が原因
$f(x)=\sum_{k=0}^{n} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$
で特に、
$\sum_{k=0}^{n}\frac{\lambda^k}{k!}$ との相性が悪い

たとえば、指数関数、正規分布などのe^{-x}、e^{-x^2}を積して積分や
和を求めようとしても
$\sum_{k=0}^{n}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-k}$ とか
$\sum_{k=0}^{n}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-k^2}$ とか
がどうしても計算できません。
χ2 分布も同様に、もっと複雑な式なので計算が困難な理由は想像できますよね。

計算ができないパターンがあることは、意外と教科書には書いていません。畳み込み積分ができるパターンのみ、解説しているので、あたかも何でも畳み込み積分できそうですが、実際やってみるとそうではないことがわかります。

【3】一様分布となら畳み込み積分ができる
(1) 1 つ注意点がある
一様分布はポアソン分布と畳み込み積分ができますが
●注意が不要な場合：$f(x)=a$ (全領域でa)
●注意が必要な場合：$f(x)=a$ ($x_1 \leqq x \leqq x_2$)と範囲が決まっている場合)
となります。

「●注意が必要な場合」の理由は

$f(x)=\sum_{k=0}^{n} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$
で特に、
$\sum_{k=0}^{n}$の和の範囲が一様分布によって限定になるから

実際に畳み込み積分やってみましょう。

【4】畳み込み積分(X+Y=Z)
ポアソン分布と一様分布の畳み込み積分を解析します。ポアソン分布は１つ注意する特徴があります。

積分∫ができない(和Σしかできない)。

ポアソン分布の式

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$$

のkの値が整数なため、連続関数ではありません。

連続関数ではないので積分∫ができません。当たり前だけど、意外と忘れがちです。

(1) 例題

２つの関数
●$f(x)=\sum_{k=0}^{n} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$
●$g1(y)=a$
または
●$g2(y)=a\ (x_1 \leq x \leq x_2)$
において、Z=X+Yを満たす確率密度関数$h(z)$を作れ。

難しい！と思ってしまいますが、落ち着いて解きましょう。次の 3step で解いていきます。

1. 畳み込み積分の式を作る
2. 積分ではなくて和区間を確認
3. 和区間について丁寧に計算

(2) 解法 step1(畳み込み積分の式を作る)</h3>
積分∫ができないので、和Σで計算します。

$$h(n)=\sum_{k=1}^{n} f(k)g(n-k)$$

$(k)+(n-k)=n$の関係が成り立っています。

(3) 積分</s>ではなくて和区間を確認

n,k の制約条件は整数です。

和区間は k=0～n で、畳み込み積分(和の計算)をします。
難しそうに見えますが、高校数学、領域のところで学ぶ内容です。

(3)和区間について丁寧に計算
① 畳み込み積分($g1(y)=a$)

$$h(n)=\sum_{k=0}^{n} f(k)g(n-k)$$
$$=\sum_{k=0}^{n} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}\cdot a$$
$$=af(n)$$

単なる　h(n)=f(n)×g(n)=a×f(n)の積となりましたね。

②畳み込み積分($g2(y)=a\ (x_1 \leqq x \leqq x_2)$)

$$h(n)=\sum_{k=x_1}^{x_2} f(k)g(n-k)$$
$$=\sum_{k=x_1}^{x_2} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}\cdot a$$

これ以上は計算できません。

あとは、実際のx_1、x_2の値に合わせて計算するしかありません。

【5】畳み込み積分(X-Y=Z)
X+Y=Z から X-Y=Z に変えますが、解き方は全く同じです。

(1) 例題

２つの関数 ●$f(x)=\sum_{k=0}^{n} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$ ●$g1(y)=a$ または ●$g2(y)=a\ (x_1 \le x \le x_2)$ において、Z=X-Yを満たす確率密度関数$h(z)$を作れ。

(2)解法 step1(畳み込み積分の式を作る)
積分∫ができないので、和Σで計算します。

$h(n)=\sum_{k=1}^{n} f(k)g(k-n)$ $(k)-(k-n)=n$の関係が成り立っています。

(3) 和区間を確認

n,k の制約条件は整数です。

和区間は k=0～n で、畳み込み積分(和の計算)をします。
難しそうに見えますが、高校数学、領域のところで学ぶ内容です。

(4) 和区間について丁寧に計算
① 畳み込み積分($g1(y)=a$)

$h(n)=\sum_{k=0}^{n} f(k)g(k-n)$
$=\sum_{k=0}^{n} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}\cdot a$
$=af(n)$

単なる　h(n)=f(n)×g(n)=a×f(n)の積となりましたね。

②畳み込み積分($g2(y)=a\ (x_1 \leqq x \leqq x_2)$)

$h(n)=\sum_{k=x_1}^{x_2} f(k)g(k-n)$
$=\sum_{k=x_1}^{x_2} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}\cdot a$

これ以上は計算できません。

g(x)が一様分布なので、畳み込み積分 Z=X+Y と Z=X-Y は同じ結果になります。

以上、「畳み込み積分がよくわかる(ポアソン分布と他の分布関数)」を解説しました。

畳み込み積分がよくわかる(正規分布と指数分布)

【1】畳み込み積分(X+Y=Z)
正規分布と指数関数の畳み込み積分を解析します。計算を簡単にするため平均 μ =0、標準偏差 σ =1 の正規分布で計算します。
(1)例題

2つの関数 ● $f(x) = e^{-ax}$ (xの範囲によって場合分けを考える) ● $g(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}y^2}$ において、Z=X+Yを満たす確率密度関数$h(z)$を作れ。

難しい！と思ってしまいますが、落ち着いて解きましょう。次の 3step で解いていきます。

1. 畳み込み積分の式を作る 2. 積分区間を確認(ここが一番難しい) 3. 積分区間の場合分けに合わせて丁寧に計算

(2) 解法 step1(畳み込み積分の式を作る)

$$h(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(x-t)dt$$

$(t) + (x-t) = x$の関係が成り立っています。

(3) 解法 step2(積分区間を確認)

y の制約条件はありませんが、 x においては指数関数があるので 2 通り考えます。 ● x ：全範囲 ● x：$0 \leqq x$

積分区間は全領域[-∞,∞]と[0,∞]の 2 通りで、畳み込み積分をします。
難しそうに見えますが、この場合分けも高校数学、領域のところで学ぶ内容です。

(4) 解法 step3(積分計算)
積分区間は全領域[-∞,∞]と[0,∞]の 2 通りで、畳み込み積分をします。
①全領域[-∞,∞]の畳み込み積分

$$h(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(z-x)dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax} \cdot e^{-\frac{1}{2}(z-x)^2} dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-az+\frac{a^2}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(x-(z-a))^2} dx$$

=(式1)

ここで、$t = x-(z-a))$とおくと、$dt = dx$より、

(式1)

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-az+\frac{a^2}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt$$

=(式2)

●ガウス積分

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{a}}$$

$a>0$

(教科書に載っていますし、是非証明してみてください。)

を(式2)へ代入すると、

(式2)

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-az+\frac{a^2}{2}}\sqrt{2\pi}$$

$$=e^{-az+\frac{a^2}{2}}$$

③ 全領域[0,∞]の畳み込み積分

積分区間が変わるだけです。

$$h(z)=\int_{0}^{\infty} f(x)g(z-x)dx$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-az+\frac{a^2}{2}}\int_{0}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(x-(z-a))^2}dx$$

=(式1)

ここで、$t=x-(z-a)$とおくと、$dt=dx$より、

(式1)

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-az+\frac{a^2}{2}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}t^2}dt$$

=(式2)

(式2)

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-az+\frac{a^2}{2}}\frac{\sqrt{2\pi}}{2}$$

$$=\frac{1}{2}\left(e^{-az+\frac{a^2}{2}}\right)$$

正規分布と指数関数の畳み込み積分は指数関数に係数が追加された感じになりましたね！

【2】畳み込み積分(X-Y=Z) は(X+Y=Z と同じ結果になる!)

X+Y=Z から X-Y=Z に変えますが、解き方は全く同じです。正規分布と指数関数の畳み込み積分を解析します。計算を簡単にするため平均μ=0、標準偏差σ=1 の正規分布で計算します。

(1) 例題

2つの関数

●$f(x)=e^{-ax}$ (xの範囲によって場合分けを考える)

●$g(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}y^2}$

において、Z=X-Yを満たす確率密度関数$h(z)$を作れ。

難しい！と思ってしまいますが、落ち着いて解きましょう。次の 3step で解いていきます。

1. 畳み込み積分の式を作る
2. 積分区間を確認(ここが一番難しい)
3. 積分区間の場合分けに合わせて丁寧に計算

(2) 解法 step1(畳み込み積分の式を作る)

$$h(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(t-x)dt$$

$(t)-(t-x)=x$の関係が成り立っています。

(3) 解法 step2(積分区間を確認)

y の制約条件はありませんが、
x においては指数関数があるので 2 通り考えます。
● x ：全範囲
● x：0 ≦ x

積分区間は全領域[-∞,∞]と[0,∞]の 2 通りで、畳み込み積分をします。

難しそうに見えますが、この場合分けも高校数学、領域のところで学ぶ内容です。

(4) 解法 step3(積分計算)
積分区間は全領域[-∞,∞]と[0,∞]の 2 通りで、畳み込み積分をします。

①全領域[-∞,∞]の畳み込み積分

$$h(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x-z)dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax} \cdot e^{-\frac{1}{2}(z-x)^2} dx$$

ここで、よく見ると $(z-x)^2=(x-z)^2$ですから、実は、
Z=X+Yの畳み込み積分と同じ結果になります。

以下は②Z=X+Y の畳み込み積分と同じ解説なので、割愛して、結果だけ書くと

②全領域[0,∞]の畳み込み積分
積分区間が変わるだけです。
以下は②Z=X+Y の畳み込み積分と同じ解説なので、割愛して、結果だけ書くと

$$h(x) = e^{-az+\frac{a^2}{2}}$$

正規分布と指数関数の畳み込み積分は指数関数に係数が追加された感じになりましたね！

以上、「畳み込み積分がよくわかる(畳み込み積分がよくわかる(正規分布と指数分布)」を解説しました。

【1】畳み込み積分(X+Y=Z)
χ2 乗分布どうしの畳み込み積分を解析します。ちょっと難しいけど、

- ● χ2 乗分布の確率分布関数に慣れよう！
- ● Γ(ガンマ)関数や B(ベータ)関数に慣れよう！

畳み込み積分の解析方法は、たとえ関数が複雑でも同じです。

(1) 例題

2 つの関数

●$f_n(x)=\frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})}x^{\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{1}{2}x}$ $(x\geq 0)$

●$f_m(y)=\frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})}y^{\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{1}{2}y}$ $(y\geq 0)$

において、Z=X+Yを満たす確率密度関数$h(z)$を作れ。

難しい！と思ってしまいますが、落ち着いて解きましょう。次の 3step で解いていきます。

1. 畳み込み積分の式を作る
2. 積分区間を確認(ここが一番難しい)
3. 積分区間の場合分けに合わせて丁寧に計算

(2) 解法 step1(畳み込み積分の式を作る)

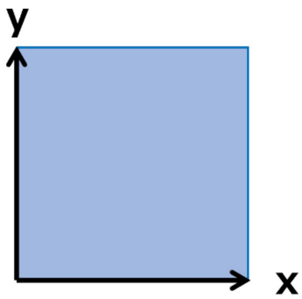
$$h(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)g(x-t)dt$$

$(t)+(x-t)=x$ の関係が成り立っています。

(3) 解法 step2(積分区間を確認)

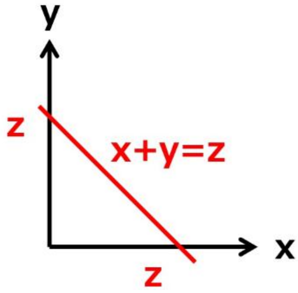
x, yの制約条件は 0≦x≦T、0≦yです。

領域を図示します。



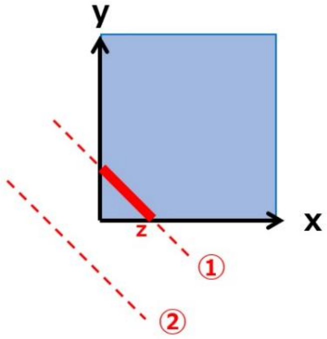
その領域内で　z=x+y を考えます。

z=x+y を y=-x+z として、xy 平面で傾き-1,y 切片 z の直線を考える



y=-x+z が積分領域内にどう入るかによって場合分けを網羅する！

すると、下図のように積分パターンは 2 パターンに場合分けされます。



●①は(x,y)=(0,0)以上 (つまり 0 ≦ z)なので、図のように、x=0～z の区間で積分
●②は(x,y)=(0,0)以下(つまり≦ 0)で、積分領域外なので、h(z)=0

より①だけ積分すればよいわけですね。

x,y の積分領域に制限があると、畳み込み積分は場合分けして積分しないといけない面倒臭さがあります。

(4) 解法 step3(積分計算)

積分区間は全領域[o,z]で、畳み込み積分をします。

$$h(z)=\int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)f_m(z-x)dx$$
$$=\int_{0}^{z} f_n(x)f_m(z-x)dx$$
$$=\int_{0}^{z} \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})}x^{\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{1}{2}x}$$
$$\frac{1}{2^{\frac{m}{2}}\Gamma(\frac{m}{2})}(z-x)^{\frac{m}{2}-1}e^{-\frac{1}{2}(z-x)}dx$$
=(式1)

xに関係のない、定数項やzを∫の前に出しましょう。

(式1)
$$=\frac{1}{2^{\frac{n+m}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})\Gamma(\frac{m}{2})}e^{-\frac{1}{2}z}\quad\int_{0}^{z} x^{\frac{n}{2}-1}(z-x)^{\frac{m}{2}-1}dx$$
=(式2)

さらに、ここで、$u=\frac{x}{z}$ と置いて、

●$dx=zdu$

●積分区間 0～z　⇒0～1

に変えて、積分の式をベータ関数表記に持ち込みます。

(式2)
$$=\frac{1}{2^{\frac{n+m}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})\Gamma(\frac{m}{2})}e^{-\frac{1}{2}z}\quad\int_{0}^{1}(uz)^{\frac{n}{2}-1}(z(1-u))^{\frac{m}{2}-1}dx$$
$$=\frac{1}{2^{\frac{n+m}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})\Gamma(\frac{m}{2})}e^{-\frac{1}{2}z}z^{\frac{n+m}{2}-1}\quad\int_{0}^{1}$$
$$u^{\frac{n}{2}-1}(1-u)^{\frac{m}{2}-1}du$$
=(式3)

ここで、ベータ関数を導入します。

$$B(\frac{n}{2},\frac{m}{2}) = \int_0^1 u^{\frac{n}{2}-1}(1-u)^{\frac{m}{2}-1}du$$

(式3)に代入すると

(式3)

$$= \frac{1}{2^{\frac{n+m}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})\Gamma(\frac{m}{2})} e^{-\frac{1}{2}z} z^{\frac{n+m}{2}-1} \quad B(\frac{n}{2},\frac{m}{2})$$

=(式4)

ここで、Γ(ガンマ)関数とB(ベータ)関数の関係を用いると

$$B(\frac{n}{2},\frac{m}{2}) = \frac{\Gamma(\frac{n}{2})\Gamma(\frac{m}{2})}{\Gamma(\frac{n+m}{2})}$$

となるので、(式４)に代入します。

(式4)

$$= \frac{1}{2^{\frac{n+m}{2}}}\Gamma(\frac{n+m}{2}) z^{\frac{n+m}{2}-1} e^{-\frac{1}{2}z}$$

$$= f_{n+m}(x)$$

=(式5)

まとめると、

$$f_{n+m}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x) f_m(z-x) dx$$

畳み込み積分すると和をすればよいという面白い結果になります。

【2】畳み込み積分(X-Y=Z)は計算できない

X+Y=Z から X-Y=Z に変えますが、解き方は全く同じです。でも端折らずに解説します。
計算は途中で終わりますが、そこまではやってみましょう。
計算ができない問いは教科書に出て来ませんが、それでは理解が十分できません。

(1) 例題

２つの関数

●$f_n(x) = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{1}{2}x} \quad (x \geq 0)$

●$f_m(y) = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})} y^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{1}{2}y} \quad (y \geq 0)$

において、Z=X-Yを満たす確率密度関数$h(z)$ を作れ。

難しい！と思ってしまいますが、落ち着いて解きましょう。次の 3step で解いていきます。

1. 畳み込み積分の式を作る
2. 積分区間を確認(ここが一番難しい)
3. 積分区間の場合分けに合わせて丁寧に計算

(2) 解法 step1(畳み込み積分の式を作る)

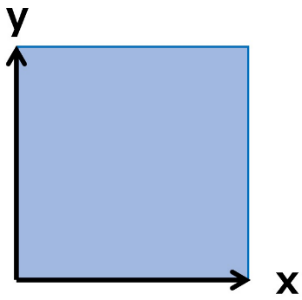
$$h(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(t-x)dt$$

$(t)-(t-x)=x$ 　の関係が成り立っています。

(3) 解法 step2(積分区間を確認)

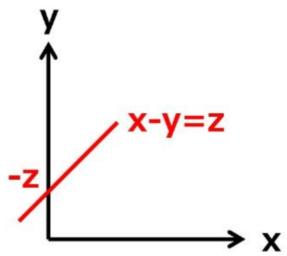
x, yの制約条件は 0≦x≦T、0≦yです。

領域を図示します。



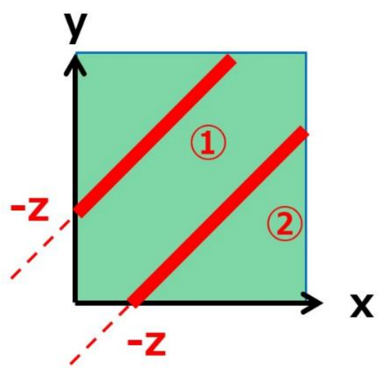
その領域内で　z=x-y を考えます。

z=x-y を y=x-z として、xy 平面で傾き 1,y 切片-z の直線を考える



y=x-z が積分領域内にどう入るかによって場合分けを網羅する！

すると、下図のように積分パターンは 2 パターンに場合分けされます。



●①は(x,y)=(0,0)以上 (つまり 0 ≦ z)なので、図のように、x=0～∞の区間で積分
●②は(x,y)=(0,0)以下(つまり z ≦ 0)で、図のように、x=-z～∞の区間で積分

難しそうに見えますが、この場合分けも高校数学、領域のところで学ぶ内容です。

(4) 解法 step3(積分計算)

積分区間の場合分けに関係なく、積分が途中までしかできないので、積分区間は全領域[o,∞]の場合のみについて、畳み込み積分をします。

$$h(z)=\int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)f_m(x-z)dx$$
$$=\int_{0}^{\infty} f_n(x)f_m(x-z)dx$$
$$=\int_{0}^{\infty} \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})}x^{\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{1}{2}x}$$
$$\frac{1}{2^{\frac{m}{2}}\Gamma(\frac{m}{2})}(x-z)^{\frac{m}{2}-1}e^{-\frac{1}{2}(x-z)}dx$$
=(式1)

xに関係のない、定数項やzを∫の前に出しましょう。
(式1)
$$=\frac{1}{2^{\frac{n+m}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})\Gamma(\frac{m}{2})}e^{\frac{1}{2}z} \quad \int_{0}^{\infty} x^{\frac{n}{2}-1}(x-z)^{\frac{m}{2}-1}e^{-x}dx$$
=(式2)

実は、(式2)の
$$\int_{0}^{\infty} x^{\frac{n}{2}-1}(x-z)^{\frac{m}{2}-1}e^{-x}dx$$
がこれ以上解析できません。

なので、ここまでで終わってしまいます。
まとめると、

畳み込み積分は１つの解法で、さまざまな分布関数を代入できるのですが、積分ができる・できない場合があります。教科書では、積分ができる場合のみ解説していますが、事例が少ないため理解が十分できない問題があります。

QC プラネッツでは積分ができない場合も記事で解説しています。

以上、「畳み込み積分がよくわかる(畳み込み積分がよくわかる(正規分布と指数分布)」を解説しました。

【1】畳み込み積分(χ2 乗分布と一様分布)

(1) 例題

２つの関数

●$f(x)=a\ (x \geq 0, a \geq 0)$

●$g_m(y)=\frac{1}{2^{\frac{m}{2}}\Gamma(\frac{m}{2})}y^{\frac{m}{2}-1}e^{-\frac{1}{2}y}\ (y \geq 0)$

において、Z=X+Yを満たす確率密度関数$h(z)$を作れ。

難しい！と思ってしまいますが、落ち着いて解きましょう。次の 3step で解いていきます。

1. 畳み込み積分の式を作る
2. 積分区間を確認(ここが一番難しい)
3. 積分区間の場合分けに合わせて丁寧に計算

(2) 解法 step1(畳み込み積分の式を作る)

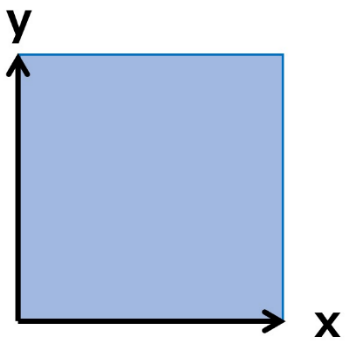
$$h(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(x-t)dt$$

$(t)+(x-t)=x$の関係が成り立っています。

(3) 解法 step2(積分区間を確認)

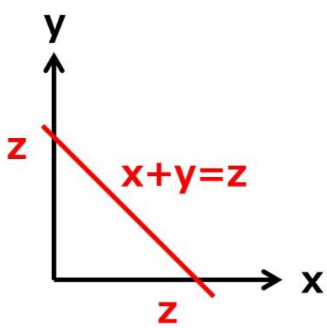
x,y の制約条件は 0 ≦ x , 0 ≦ y です。

領域を図示します。



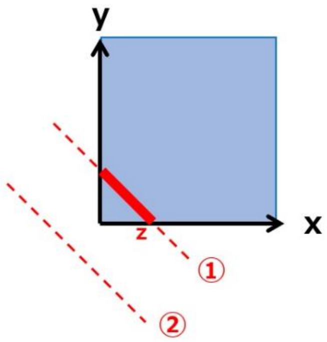
その領域内で　z=x+y を考えます。

z=x+y を y=-x+z として、xy 平面で傾き-1,y 切片 z の直線を考える



y=-x+z が積分領域内にどう入るかによって場合分けを網羅する！

すると、下図のように積分パターンは 2 パターンに場合分けされます。



●①は(x,y)=(0,0)以上 (つまり 0 ≦ z)なので、図のように、x=0～z の区間で積分
●②は(x,y)=(0,0)以下(つまり z ≦ 0)で、積分領域外なので、h(z)=0

より①だけ積分すればよいわけですね。
難しそうに見えますが、この場合分けも高校数学、領域のところで学ぶ内容です。

x,y の積分領域に制限があると、畳み込み積分は場合分けして積分しないといけない面倒臭さがあります。

(4) 解法 step3(積分計算)
積分区間は全領域[o,z]で、畳み込み積分をします。

$$h(z)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)g_m(z-x)dx$$
$$=\int_0^z a g_m(z-x)dx$$
$$=a\frac{1}{2^{\frac{m}{2}}\Gamma(\frac{m}{2})}\int_0^z (z-x)^{\frac{m}{2}-1}e^{-\frac{1}{2}(z-x)}dx$$
$$=a\frac{e^{-\frac{z}{2}}}{2^{\frac{m}{2}}\Gamma(\frac{m}{2})}\int_0^z (z-x)^{\frac{m}{2}-1}e^{\frac{x}{2}}dx$$

問題がありまして、

$$\int_0^z (z-x)^{\frac{m}{2}-1}e^{\frac{x}{2}}dx$$

が積分困難！

これ以上は解析が困難です。なので、χ2 乗分布と一様分布の畳み込み積分は考えなくてもよいとわかります。

【2】畳み込み積分(χ2 乗分布と指数分布)
(1) 例題

２つの関数
●$f(x)=e^{-ax}$ $(x\geq 0, a\geq 0)$
●$g_m(y)=\frac{1}{2^{\frac{m}{2}}\Gamma(\frac{m}{2})}y^{\frac{m}{2}-1}e^{-\frac{1}{2}y}$ $(y\geq 0)$
において、Z=X+Yを満たす確率密度関数$h(z)$を作れ。

難しい！と思ってしまいますが、落ち着いて解きましょう。次の 3step で解いていきます。

1. 畳み込み積分の式を作る
2. 積分区間を確認(ここが一番難しい)
3. 積分区間の場合分けに合わせて丁寧に計算

(2) 解法 step1(畳み込み積分の式を作る)

$$h(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)g(x-t)dt$$

$(t)+(x-t)=x$の関係が成り立っています。

(3) 解法 step2(積分区間を確認)

x,y の制約条件は 0 ≦ x , 0 ≦ y です。

一様分布と同じで、x=0～z の区間で積分すれば OK です。

(4) 解法 step3(積分計算)

積分区間は全領域[o,z]で、畳み込み積分をします。

$$h(z)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)g_m(z-x)dx$$
$$=\int_0^z e^{-ax}g_m(z-x)dx$$
$$=\frac{1}{2^{\frac{m}{2}}\Gamma(\frac{m}{2})}\int_0^z e^{-ax}(z-x)^{\frac{m}{2}-1}e^{-\frac{1}{2}(z-x)}dx$$
$$=\frac{e^{-\frac{z}{2}}}{2^{\frac{m}{2}}\Gamma(\frac{m}{2})}\int_0^z (z-x)^{\frac{m}{2}-1}e^{(\frac{1}{2}-a)}dx$$
=(式1)

問題がありまして、

$a=\frac{1}{2}$以外は$\int_0^z (z-x)^{\frac{m}{2}-1}e^{(\frac{1}{2}-a)}dx$

が積分困難！

なので、

$e^{(\frac{1}{2}-a)}=e^0=1$

つまり、

$a=\frac{1}{2}$について解析します。

(5) $a=\frac{1}{2}$の場合

(式1)

$$=\frac{e^{-\frac{z}{2}}}{2^{\frac{m}{2}}\Gamma(\frac{m}{2})}\int_0^z (z-x)^{\frac{m}{2}-1})dx$$
$$=\frac{e^{-\frac{z}{2}}}{2^{\frac{m}{2}}\Gamma(\frac{m}{2})}\frac{2}{m+1}\left[(z-x)^{\frac{m+1}{2}}\right]_0^z$$
$$=\frac{e^{-\frac{z}{2}}}{2^{\frac{m}{2}}\Gamma(\frac{m}{2})}\frac{2}{m+1}z^{\frac{m+1}{2}}$$

何とか、積分できました！

【3】畳み込み積分(χ2 乗分布と正規分布)

(1) 例題

２つの関数

●$f(x)=e^{\frac{1}{2}x^2}$

●$g_m(y)=\frac{1}{2^{\frac{m}{2}}\Gamma(\frac{m}{2})}y^{\frac{m}{2}-1}e^{-\frac{1}{2}y}$ ($y \geq 0$)

において、Z=X+Yを満たす確率密度関数$h(z)$を作れ。

難しい！と思ってしまいますが、落ち着いて解きましょう。次の 3step で解いていきます。

1. 畳み込み積分の式を作る
2. 積分区間を確認(ここが一番難しい)
3. 積分区間の場合分けに合わせて丁寧に計算

(2) 解法 step1(畳み込み積分の式を作る)

$$h(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)g(x-t)dt$$

$(t)+(x-t)=x$の関係が成り立っています。

(3) 解法 step2(積分区間を確認)

x,y の制約条件は 0 ≦ y です。

結局、積分できないオチなので、不定積分を見ていきましょう。

(4) 解法 step3(積分計算)

不定積分だけ考えて、畳み込み積分をします。

$$h(z)=\int f(x)g_m(z-x)dx$$
$$=\int e^{-\frac{1}{2}x^2}g_m(z-x)dx$$
$$=\frac{1}{2^{\frac{m}{2}}\Gamma(\frac{m}{2})}\int (z-x)^{\frac{m}{2}-1}e^{-\frac{1}{2}(z-x)}e^{-\frac{1}{2}x^2}dx$$

問題がありまして、

$$\int (z-x)^{\frac{m}{2}-1}e^{-\frac{1}{2}(z-x)}e^{-\frac{1}{2}x^2}dx$$

が積分困難！

これ以上は解析が困難です。なので、χ2 乗分布と正規分布の畳み込み積分は考えなくてもよいとわかります。

χ2 乗分布では、ごく一部の指数分布のみ畳み込み積分ができることがわかりました。

以上、「畳み込み積分がよくわかる(χ2 乗分布と他の分布関数)」を解説しました。