F 分布、χ2 乗分布の導出がよくわかる

1. F 分布の確率密度関数の導出がよくわかる
2. 【必読】χ2 乗分布の導出がよくわかる

QC プラネッツ© https://qcplanets.com/

F 分布の確率密度関数の導出

【1】F 分布の確率密度関数の導出

(1) 例題

2つの確率変数X,Yが独立で、Xが自由度mのχ^2分布、Yが自由度nのχ^2分布に従うとき、$Z=\frac{\frac{X}{m}}{\frac{Y}{n}}$で定義される確率変数$Z$の確率密度関数を求めよ。

まず、X,Yの確率密度関数を定義します。

$f(x)=\frac{1}{2^{\frac{m}{2}}\Gamma(\frac{m}{2})}x^{\frac{m}{2}-1}e^{-\frac{x}{2}}\ (x\geq 0)$

$g(y)=\frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})}y^{\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{y}{2}}\ (y\geq 0)$

(2) 解法のポイント

1. $x=x(z,w),y=(z,w)$の式を$z=z(x,y),w=w(x,y)$の式に直す
2. $f(x,y)dxdy$=$f(x(z,w),y(z,w)|detJ|dzdw$に変換する
3. 2変数z,wの同時確率密度関数$g(z,w)$は$g(z,w)=f(x(z,w),y(z,w)|detJ|$で求まる。
4. 実際はz,wのうち、どちらかは不要な変数なので、片方の変数で積分して、残りの変数についての周囲確率密度関数

   (例えば$g(z)=\int_{w_1}^{w_2}g(z,w)dw$)

   を計算する。

1つずつ行きましょう。

(3) 解法

(i)$x=x(z,w),y=(z,w)$の式を$z=z(x,y),w=w(x,y)$の式に直す

ここで、変換する変数を定義します。

$Z=\frac{\frac{X}{m}}{\frac{Y}{n}}$、$W=Y$とおく、つまり

$Z=\frac{nX}{mW}$、$W=Y$とおきます。

また、範囲は$(x\geq 0),(y\geq 0)$

$(z\geq 0),(w\geq 0)$

$x=x(z,w),y=y(z,w)$に直します。

$x=\frac{m}{n}wz$

$y=w$

QC プラネッツ© https://qcplanets.com/

(ii)$f(x,y)dxdy=f(x(z,w),y(z,w)|detJ|dzdw$に変換する

次に、ヤコビ行列から行列式ヤコビアンを求めます。
ヤコビ行列 J は
J は

$$J=\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial z} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial z} & \frac{\partial y}{\partial w} \end{pmatrix}$$

$$J=\begin{pmatrix} \frac{m}{n}w & \frac{m}{n}z \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

次に行列式ヤコビアンは

$$detJ=\frac{m}{n}w\cdot 1-0\cdot\frac{m}{n}z$$
$$=\frac{m}{n}w$$

で計算できます。

(iii)2変数z,wの同時確率密度関数$g(z,w)$を導出

代入すると、

$$f(x,y)dxdy=f(x(z,w),y(z,w)|detJ|dzdw$$

$$=\frac{1}{2^{\frac{m}{2}}\Gamma(\frac{m}{2})}(\frac{m}{n}wz)^{\frac{m}{2}-1}e^{-\frac{1}{2}(\frac{m}{n}wz)}$$
$$\frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})}w^{\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{w}{2}}\frac{m}{n}wdzdw$$

文字式を整理すると、

$$=\frac{(\frac{m}{n})^{\frac{m}{2}}z^{\frac{m}{2}-1}}{2^{\frac{m+n}{2}}\Gamma(\frac{m}{2})\Gamma(\frac{n}{2})}w^{\frac{m+n}{2}-1}e^{-\frac{1}{2}(\frac{m}{n}z+1)w}dzdw$$

$$=p(z,w)dzdw$$
=(式1)

2 変数z,wに関する同時確率密度関数$p(z,w)dzdw$が求まりました。次に、zについての周囲確率密度関数を求めます。なぜなら、$w=y$であり、wは不要な変数だからwで積分します。

$$h(z)=\int_{-\infty}^{\infty}p(z,w)dw$$

z,wはともに0以上ですから

$$=h(z)=\int_{0}^{\infty}p(z,w)dw$$

$$=\frac{(\frac{m}{n})^{\frac{m}{2}}z^{\frac{m}{2}-1}}{2^{\frac{m+n}{2}}\Gamma(\frac{m}{2})\Gamma(\frac{n}{2})}\int_{0}^{\infty}w^{\frac{m+n}{2}-1}e^{-\frac{1}{2}(\frac{m}{n}z+1)w}dw$$
=(式2)

t 分布の確率密度関数導出と同様に、一旦、次の積分を考えます。

$\int_0^\infty w^p e^{-aw} dw$=(式3)

$t = aw$とすると、

$w = \frac{t}{a}, \frac{dt}{dw} = a$となり、これを(式3)に代入します。

(式3)

$= \int_0^\infty (\frac{t}{a})^p e^{-t} (\frac{1}{a}) dt$

$= \frac{1}{a^{p+1}} \int_0^\infty t^p e^{-t} dt$

$= \frac{\Gamma(p+1)}{a^{p+1}}$

=(式4)

ここで、Γ関数は

$$\Gamma(p+1) = \int_0^\infty t^p e^{-t} dt$$

です。

(式2)に代入するため、(式4)の文字を置き換えます。

$p = \frac{m+n}{2} - 1$

$a = \frac{1}{2}(1 + \frac{m}{n} z)$

とおいて、(式１)に代入します。

(式2)

$= \frac{(\frac{m}{n})^{\frac{m}{2}} z^{\frac{m}{2}-1}}{2^{\frac{m+n}{2}} \Gamma(\frac{m}{2}) \Gamma(\frac{n}{2})} \int_0^\infty w^{\frac{m+n}{2}-1} e^{-\frac{1}{2}(\frac{m}{n}z+1)w} dw$

$= \frac{(\frac{m}{n})^{\frac{m}{2}} z^{\frac{m}{2}-1}}{2^{\frac{m+n}{2}} \Gamma(\frac{m}{2}) \Gamma(\frac{n}{2})} \int_0^\infty (\frac{t}{a})^p \cdot e^{-a\frac{t}{a}} \frac{1}{a} dt$

$= \frac{(\frac{m}{n})^{\frac{m}{2}} z^{\frac{m}{2}-1}}{2^{\frac{m+n}{2}} \Gamma(\frac{m}{2}) \Gamma(\frac{n}{2})} \frac{1}{a^{p+1}} \int_0^\infty t^p \cdot e^{-t} dt$

$= \frac{(\frac{m}{n})^{\frac{m}{2}} z^{\frac{m}{2}-1}}{2^{\frac{m+n}{2}} \Gamma(\frac{m}{2}) \Gamma(\frac{n}{2})} \frac{\Gamma(p+1)}{a^{p+1}}$

=(式5)

(式5)に対して、

$p = \frac{m+n}{2} - 1$

$a = \frac{1}{2}(1 + \frac{m}{n} z)$

から、p, aをm, n, zの式に戻します。

(式5)

$$= \frac{(\frac{m}{n})^{\frac{m}{2}} z^{\frac{m}{2}-1}}{2^{\frac{m+n}{2}} \Gamma(\frac{m}{2})\Gamma(\frac{n}{2})} \frac{\Gamma(\frac{m+n}{2})}{(\frac{1}{2}(1+\frac{m}{n}z))^{\frac{m+n}{2}}}$$

ここで、$n, 2, \Gamma(\frac{m+n}{2}), \Gamma(\frac{m}{2}), \Gamma(\frac{n}{2})$に注目して変形すると

$$= \frac{m^{\frac{m}{2}} n^{\frac{n}{2}}}{B(\frac{m}{2}, \frac{n}{2})} \frac{z^{\frac{m}{2}-1}}{(mz+n)^{\frac{m+n}{2}}}$$

となります。

なんじゃこりゃ！な式ですが、使い勝手のよい F 分布の式なんです!

まとめると、

$$h(z) = \frac{m^{\frac{m}{2}} n^{\frac{n}{2}}}{B(\frac{m}{2}, \frac{n}{2})} \frac{z^{\frac{m}{2}-1}}{(mz+n)^{\frac{m+n}{2}}}$$

が、自由度m, nの F 分布の確率密度関数となります。

F 分布は、$\chi 2$ 乗分布の関数同士の変数の比から求められます。確かに分散比は F 分布使いますよね！！ F 分布、$\chi 2$ 乗分布、正規分布の関係が数式でつながりました。

いろいろな関数を使って、確率変数の変換を見て慣れていきましょう！
本記事の内容は、ほぼ高校数学で解けましたね！

以上、「F 分布の確率密度関数の導出」を解説しました。

χ2乗分布の導出がよくわかる

【1】χ2乗分布は正規分布の和の2乗で理解する

(1) χ2乗分布の確率密度関数を見る

χ2乗分布の式をさらっと見てください。

見るだけでOK

$$f_n(x)=\frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})}x^{\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{1}{2}x}\ (x>0)$$

何じゃこりゃ！という驚きだけでOK

(2) χ2乗分布の最も大事なエッセンスをおさえる！

χ2乗分布の最も大事なエッセンスは、煩雑すぎる式ではなく、式の作り方です。

正規分布に従う変数xの平方和や分散に対応した分布がχ2乗分布

つまり、

●「変数」は正規分布
●「分散」はχ2乗分布
で評価する！

(3) χ2乗分布の複雑な式の作り方を理解する

もっかい見ましょう。

$$f_n(x)=\frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})}x^{\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{1}{2}x}\ (x>0)$$

●「変数」は正規分布
●「分散」はx2乗分布
で評価する！

なので、簡単にいうと、

正規分布$f(x)=e^{-x^2}$を2乗和したら、
$f_1(x)^2+f_2(x)^2+\ldots+f_n(x)^2$してできた関数が、
$$f_n(x)=\frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})}x^{\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{1}{2}x}\ (x>0)$$
です。信じにくいけど。

よく見ると、平均を無視して書くと
平方和S=$x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2$
です。まさに、平方和を表現した関数が、複雑な式であるχ2乗分布です。

式は複雑だけど、計算はシンプルで平方和を計算しているなあと感じたらＯＫです！

【2】χ2乗分布を作るための数学を復習

確率分布関数の2乗和をしますが、数学のルールがあるので、３つの手法を復習しましょう。

1. 確率変数の変換$Y=X^2$
2. 畳み込み積分
3. ベータ関数とガンマ関数の関係

(1) (i)確率変数の変換$Y = X^2$

関連記事に変換方法をまとめています。先に解き方を理解しておきましょう。

【QC プラネッツ「1 変数の確率変数の変換がよくわかる」勉強プリント】
https://qcplanets.com/wp-content/uploads/2025/12/qc_planets-1function-text_8yGG5dmj.pdf
「1 変数の確率変数の変換がよくわかる(2 次式編)」で確認ください。

(2) (ii)畳み込み積分

1 つの解法で、いろいろな確率分布関数を畳み込み積分しています。

【関連記事】【まとめ】畳み込み積分がよくわかる
https://qcplanets.com/method/statistics-method/convolution-integral-summary/

(3) ベータ関数とガンマ関数の関係

ベータ関数とガンマ関数についても、高校数学・大学入試に出る問題から復習しています。χ2 乗分布の導出過程でいい味を引き出してくれる関係式です。関連記事で確認しましょう。

【関連記事】ガンマ分布がよくわかる
https://qcplanets.com/method/statistics-method/gamma-distribution/

【3】χ2 乗分布の導出がよくわかる

(1) 数学的帰納法で証明する！

【問】確率変数X_iが平均0、標準偏差1の正規分布に従うとき、
確率変数$Z = X_1^2 + X_2^2 + \ldots + X_n^2$で表現される確率変数$Z$は次の確率密度関数に従うことを、数学的帰納法を使って証明したい。

$$f_n(z) = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})} z^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{1}{2}z} \ (z > 0)$$

(1) 正規分布の確率密度関数を使って、$f_1(z)$を計算せよ。
(2) 数学的帰納法を使って$f_n(z)$の式を証明せよ。

実際に、$f_n(z)$が自由度nのχ2 乗分布に従う確率密度関数です。では証明していきます。

(2) $f_1(z)$を計算

正規分布の確率密度関数を使って、
変数$Z = X^2$を満たす、確率変数Zの確率密度関数$f_1(z)$を求めます。

① 確率変数の変換$Z = X^2$

正規分布の 2 乗変換は次の公式を使います。詳細は関連記事にあります。

$$g(z) = \frac{1}{2\sqrt{z}}\left(f(+\sqrt{z}) + f(-\sqrt{z})\right)$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{z}}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y}{2}} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y}{2}}\right)$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} z^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{z}{2}} \ (z \geq 0)$$

なお、

$$f_n(z)=\frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})}z^{\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{1}{2}z}\ (z>0)$$

にn=1を代入すると、

$$f_1(z)=\frac{1}{2^{\frac{1}{2}}\Gamma(\frac{1}{2})}z^{\frac{1}{2}-1}e^{-\frac{1}{2}z}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}z^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{z}{2}}$$

に一致します。よって、$n=1$の時は成立します。

② 数学的帰納法を使って$f_n(z)$を証明</h3>

$n=k$のとき、$f_k(z)$が問の式になると仮定すると、

$n=k+1$ のとき$f_{k+1}(z)$ を解いてみます。

$$f_{k+1}(z)=\int_{-\infty}^{\infty}f_k(x)f_1(z-x)dx$$

と畳み込み積分します。もちろん計算が複雑な$(z-x)$ には簡単な式な$f_1(z)$とします。

$$f_{k+1}(z)=\int_{-\infty}^{\infty}f_k(x)f_1(z-x)dx$$

=

$$\int_0^{\infty}\frac{1}{2^{\frac{k}{2}}\Gamma(\frac{k}{2})}x^{\frac{k}{2}-1}e^{-\frac{1}{2}x}\cdot\frac{1}{2^{\frac{1}{2}}\Gamma(\frac{1}{2})}(z-x)^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{1}{2}(z-x)}dx$$

=(式1)

単純に代入しただけでも結構ムズイ式ですね。でも代入しただけです！式変形を続けます。

(式1)

$$=\frac{1}{2^{\frac{k+1}{2}}\Gamma(\frac{k}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}\cdot e^{-\frac{1}{2}z}\int_0^{\infty}x^{\frac{k}{2}-1}(z-x)^{-\frac{1}{2}}dx$$

=(式2)

(細かい式変形は少し端折っていますので、一回は解いてみてください。いい練習になります！)
式変形の途中では、変数xは正なので、積分区間を[0,∞]に変更しました。
ここで、やや誘導的ですが、x,zの2変数を1変数に変換します。
$u=\frac{x}{z}$ と置きます。すると、
●積分区間が[0,∞]⇒[0,1]に変換 (z/xの比なので)
●$x=zu$ より$dx=zdu$ と変換
できます。

(式2)

$$=\frac{1}{2^{\frac{k+1}{2}}\Gamma(\frac{k}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}\cdot e^{-\frac{1}{2}z}\int_0^{1}(zu)^{\frac{k}{2}-1}(z-zu)^{-\frac{1}{2}}zdu$$

$$=\frac{1}{2^{\frac{k+1}{2}}\Gamma(\frac{k}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}\cdot e^{-\frac{1}{2}z}z^{\frac{k+1}{2}-1}\int_0^{1}u^{\frac{k}{2}-1}(1-u)^{-\frac{1}{2}}du$$

=(式3)

さらに(式3)の積分

$$\int_0^1 u^{\frac{k}{2}-1}(1-u)^{-\frac{1}{2}}\,du$$

をよく見ると、ベータ関数が使えないか?、ベータ関数を使ってうまく逃げれないか？を企みましょう。

③ ベータ関数とガンマ関数

ベータ関数は

$$B(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$$

です。よく見ると、

$p=\frac{k}{2}, q=\frac{1}{2}$ を代入すると

$$B(\tfrac{k}{2},\tfrac{1}{2})=\int_0^1 u^{\frac{k}{2}-1}(1-u)^{-\frac{1}{2}}\,dx$$

は(式3)の積分部分と全く同じですね！

この関係を(式3)に代入しましょう。

(式3)

$$=\frac{1}{2^{\frac{k+1}{2}}\Gamma(\frac{k}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}\cdot e^{-\frac{1}{2}z}z^{\frac{k+1}{2}-1}B(\tfrac{k}{2},\tfrac{1}{2})$$

=(式4)

ここで、うまくできているなあと感心するのは、ベータ関数とガンマ関数の関係式から

$$\frac{B(\frac{k}{2},\frac{1}{2})}{\Gamma\frac{k}{2}\Gamma\frac{1}{2}}=\frac{1}{\Gamma(\frac{k+1}{2})}$$

と上手に整理できる点です。

(式4)

$$=\frac{1}{2^{\frac{k+1}{2}}\Gamma\frac{k+1}{2}}\cdot e^{-\frac{1}{2}z}z^{\frac{k+1}{2}-1}$$

=(式5)

(式5)を見ると、確かに、

$f_{k+1}(z)=\frac{1}{2^{\frac{k+1}{2}}\Gamma(\frac{k+1}{2})}\cdot e^{-\frac{1}{2}z}z^{\frac{k+1}{2}-1}$ は、

$f_n(z)=\frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})}z^{\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{1}{2}z}$ $(z>0)$を

$n=k+1$ を代入した式と一致します。

よって、$n=k+1$ のときも成立します。

よって、すべての自然数nに対して、

$f_n(z)=\frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})}z^{\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{1}{2}z}$ $(z>0)$が成り立つ。

となります。

$\chi 2$ 乗分布の確率密度関数の式は非常に複雑で難解だけど、数学的帰納法でシンプルに証明できるのは不思議な感じがします。

以上、「$\chi 2$ 乗分布の導出がよくわかる」を解説しました。