ガンマ関数がわかる

1. ガンマ関数がよくわかる(その 1_高校数学復習編)
2. ガンマ関数がよくわかる(その 2_大学数学編)

QC プラネッツ© https://qcplanets.com/

ガンマ関数がよくわかる(その 1_高校数学復習編)

【1】ガンマ関数とは

$$\Gamma(s)=\int_0^{\infty} x^{s-1}e^{-x}dx=(s-1)!$$

まず、式の紹介だけとして高校数学の準備をしましょう！

【2】ガンマ関数を攻略するための必要な高校数学スキル
必ず、復習しておさえておきたいのが、3 つ

1. 数学的帰納法
2. $\lim_{x\to\infty} xe^{-x}=0$
3. 部分積分から漸化式を作る流れ

個別の内容は高校数学の教科書で確認ください。

(1) $\lim_{x\to\infty} xe^{-x}=0$ の証明

よく、証明せずに使ってもよいと大学入試の設問では書いていますが、ちゃんと証明できますか？
実は大学に行くと、テイラー展開やマクローリン展開で

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots$$

と展開できるのを習うので、この式を使えば 0 に収束すると証明できます。
高校数学の場合は、テイラー展開とか習わないので、こんな問いで誘導していきます。

【問題】
正の数xに対して、
問1 $e^x \geq 1+x+\frac{x^2}{2!}$を示せ。
問2 $\lim_{x\to\infty} xe^{-x}=0$を示せ。

どれも、典型的な問いで、
問1は $f(x)$=(左辺)-(右辺)として、この関数を調べればOK！
$f(x)=e^x-(1+x+\frac{x^2}{2})$
$f'(x)=e^x-(1+x)$
$f''(x)=e^x-1 \geq 0$
から
$f'(x)=e^x-(1+x)$は単調増加で $f'(x)\geq f'(0)=0$
よって、$f(x)=e^x-(1+x+\frac{x^2}{2})$も単調増加で、
$f(x)\geq f(0)=0$が成り立つ。

問 2 は問 1 を使って、挟み込みすれば OK
xとe^{-x}はともに正の数なので、
$0<\frac{x}{e^x}<\frac{x}{1+x+\frac{x^2}{2}}$となり、
$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{1+x+\frac{x^2}{2}}=0$より、
$\lim_{x\to\infty} xe^{-x}=0$

良問な大学数学入試問題を解きながら、ガンマ関数に慣れていきましょう。

【3】ガンマ関数を習う前に復習すべき大学入試問題

(1) 問題

nを自然数とする。
(1) 関数$f(x)=x^{n+1}e^{-x}$の$x\geq 0$における最大値を求めよ。
(2) 極限$\lim_{x\to\infty} x^n e^{-x}$を求めよ。
(3) すべての自然数nに対して$\lim_{x\to\infty}\int_0^x t^n e^{-t}dt=n!$を示せ。

(2015 弘前大)

ガンマ関数を大学受験に出すとこうなります。典型的であるが、絶対おさえておきたい良問です。

(2)解法

①(1)の解法

関数の最大、最小は微分して、増減表を見るのが基本！

関数$f(x)=x^{n+1}e^{-x}$
微分すると、
$f'(x)=(n+1)x^n e^{-x}-x^{n+1}e^{-x}$
$=x^n e^{-x}((n+1)-x)$

増減表は、

x	0	$\cdots$	$n+1$	$\cdots$
$f'(x)$		+	0	−
$f(x)$		↗	max	↘

より$f(x)$は$x=n+1$の時が最大値になります。
関数$f(n+1)=(n+1)^{n+1}e^{-(n+1)}$ (答え)

②(2)の解法

よくわからない式の極限は挟み込むのが基本です。

(1)の結果を使います。$f(x)$は
$0\leq x^{n+1}e^{-x}\leq (n+1)^{n+1}e^{-(n+1)}$
の制約条件が成り立ちます。

一方、$x^n e^{-x}$を
$x^n e^{-x}=\frac{x^{n+1}e^{-x}}{x}$と変形すると、上の不等式から

$$0\leq x^n e^{-x}=\frac{x^{n+1}e^{-x}}{x}\leq\frac{(n+1)^{n+1}e^{-(n+1)}}{x}$$

となります。
$x\Rightarrow\infty$にすると、
$\frac{(n+1)^{n+1}e^{-(n+1)}}{x}$ $\Rightarrow 0$ (分母のxが∞になるので) となるので、結果、

$\lim_{x\to\infty} x^n e^{-x}=0$ (答え)

③(3)の解法
数列の「数学的帰納法、漸化式」と積分の「部分積分」を使う重要な問題です。習得 MUST です！

(i)$n=1$のとき、$\int_0^x te^{-t}dt$
$=\left[-(t+1)e^{-t}\right]_0^x$
=1=(1!)

より成立。部分積分大丈夫ですか？ ⇒を微分する方向として

$-te^{-t}\Rightarrow te^{t}-e^{-t}$
$-e^{-t}\Rightarrow+e^{-t}$
から
$-te^{-t}-e^{-t}\Rightarrow te^{t}$
と計算できます。

(ii)次に、$n=k$のとき、$\lim_{x\to\infty}\int_0^x t^k e^{-t}dt$=$k!$と仮定すると、

(iii)$n=k+1$のとき、

部分積分すると、⇒を微分する方向として
$-t^{k+1}e^{-t}\Rightarrow t^{k+1}e^{t}-(k+1)t^k e^{-t}$
ここで止めると、
$\lim_{x\to\infty}\left[-t^{k+1}e^{-t}\right]_0^x=\lim_{x\to\infty}\int_0^x t^{k+1}e^{t}dt$ -
$\lim_{x\to\infty}\int_0^x (k+1)t^k e^{-t}dt$
計算すると、

$\lim_{x\to\infty}-x^{k+1}e^{-x}=\lim_{x\to\infty}\int_0^x t^{k+1}e^{t}dt-(k+1)\lim_{x\to\infty}\int_0^x t^k e^{-t}dt$

(左辺)=0で、(右辺)第1項は求めたい$n=k+1$の式で、第２項の積分は仮定した$n=k$のとき$k!$になるので、
(つまり、$(k+1)\lim_{x\to\infty}\int_0^x t^k e^{-t}dt$=$k!$)
代入すると、

0=$\lim_{x\to\infty}\int_0^x t^{k+1}e^{t}dt-(k+1)k!$
よって、
$\lim_{x\to\infty}\int_0^x t^{k+1}e^{t}dt=(k+1)!$
となるので、$n=k+1$のときも成り立つ。

よって、すべての自然数nに対して$\lim_{x\to\infty}\int_0^x t^n e^{-t}dt$=$n!$となる。

(答え)
この式こそ、ガンマ関数なんですね!
以上、「ガンマ関数がよくわかる(その 1_高校数学復習編)」を解説しました。

【1】ガンマ関数の性質

(1) ガンマ関数

$$\Gamma(s)=\int_0^\infty x^{s-1}e^{-x}dx=(s-1)!$$

(2) ガンマ関数の性質

大事な性質が 3 つあります。正規分布の積分にもつながる大事な内容です。

1. (i) $s>1$のとき、$\Gamma(s)=(s-1)\Gamma(s-1)$
2. (ii) sが正の整数のとき、$\Gamma(s)=(s-1)!$
3. (iii)$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$

(i)と(ii)は階乗の関係だから、すぐ理解できますが、(iii)は別格に難しく感じます。そもそも階乗は整数なのに$\frac{1}{2}$が入っているし、しかも、$\sqrt{\pi}$ってどこから来たん？って感じですよね！

【2】ガンマ関数の性質の証明

ガンマ関数に慣れるために証明も入れておきます。なぞってください。良い練習になります！

(1) (i)の性質

(i) $s>1$のとき、$\Gamma(s)=(s-1)\Gamma(s-1)$

●$\Gamma(s)=\int_0^\infty x^{s-1}e^{-x}dx$

●$\Gamma(s-1)=\int_0^\infty x^{s-2}e^{-x}dx$

部分積分しましょう。⇒が微分する方向として、

$-x^{s-1}e^{-x}\Rightarrow x^{s-1}e^{-x}-(s-1)x^{s-2}e^{-x}$

つまり、

$$\left[-x^{s-1}e^{-x}\right]_0^\infty=\int_0^\infty x^{s-1}e^{-x}dx-\int_0^\infty (s-1)x^{s-2}e^{-x}dx$$

まとめると、

$\left[-x^{s-1}e^{-x}\right]_0^\infty=\Gamma(s)-(s-1)\Gamma(s-1)$

一方、(左辺)=0なので、

$\Gamma(s)=(s-1)\Gamma(s-1)$が成り立つ。

(2) (ii)の性質

(ii) sが正の整数のとき、$\Gamma(s)=(s-1)!$

これは簡単ですね。

QC プラネッツ© https://qcplanets.com/

$\Gamma(s)=(s-1)\Gamma(s-1)=(s-1)(s-2)\Gamma(s-2)=\ldots$
$=(s-1)(s-2)\ldots 1\Gamma(1)$

ここで、Γ(1)は

$$\Gamma(s)=\int_0^\infty x^{1-1}e^{-x}dx$$
$$=\int_0^\infty e^{-x}dx$$
$$=\left[-e^{-x}\right]_0^\infty$$
$=1$

よって、

$$\Gamma(s)=(s-1)(s-2)\ldots 1\cdot 1=(s-1)!$$

(iii)$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$

実は、ベータ関数との関係式が必要なので、あとで解説します。

【3】ガンマ関数とベータ関数の関係

ガンマ関数とベータ関数の関係式が重要です。

複雑なガンマ関数が式に並ぶと、ベータ関数に置き換えて式をシンプルにできないかどうかをよく変形します。χ2 乗分布や F 分布の確率密度関数がその良い事例です。

(1) ベータ関数とは

関連記事で復習しましょう。

【関連記事】ベータ関数がよくわかる https://qcplanets.com/method/statistics-method/beta_function/

ポイントは、

$$B(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$$
$$=\frac{(p-1)!(q-1)!}{(p+q-1)!}$$

次の式が成り立ちます。

$$B(p,q)=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

【証明】

関連記事では、階乗！に注目して証明しています。

$B(p,q)=\frac{(p-1)!(q-1)!}{(p+q-1)!}$

$\Gamma(p)=(p-1)!$、$\Gamma(q)=(q-1)!$、

$\Gamma(p+q)=(p+q-1)!$より

$B(p,q)=\frac{(p-1)!(q-1)!}{(p+q-1)!}=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$と

階乗「！」でみていけば公式が成り立つのが、わかりますね。

教科書は別の２重積分から変数変換して証明する方法が書いていますが、難しすぎです。簡単でもいいからできる解法で理解すればOKです。
ただし、上の簡略化した証明は、p,qが整数の場合については証明できますが、実数の場合までは証明していません。実数の場合も証明が必要でしたら、教科書を読み進めてください。
以下、勝手ですが、p,qが実数の場合でも使えるとして進めます。

(2) Γ関数の性質

$$\Gamma\text{関数の性質(iii)}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$$

ではやってみましょう。

$B(p,q)=\dfrac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$
に$p=\frac{1}{2}$、$q=\frac{1}{2}$を代入します。

$B\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=\dfrac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)}$
ここで、$\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)=\Gamma(1)=1$です。

また、$B\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$は、

$$B\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=\int_0^1 x^{\frac{1}{2}-1}(1-x)^{\frac{1}{2}-1}dx$$

$$=\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}dx$$

$$=\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}}dx \text{ (平方完成)}$$

=(式1)

ここで、$tx-\frac{1}{2}$とおくと、
●x：0⇒1が、t:$-\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{1}{2}$へ
●$dt=dx$より、(式1)に代入します。

(式1)

$$=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2-t^2}}dt$$

=(式2)

さらに、$t=\frac{1}{2}sin\theta$とおくと、
●t:$-\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{1}{2}$が、$\theta$:$-\frac{\pi}{2}\Rightarrow\frac{\pi}{2}$へ
●$dt=\frac{1}{2}cos\theta d\theta$より、(式2)に代入します。

(式2)

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{(\frac{1}{2})^2-(\frac{1}{2}sin\theta)^2}}\frac{1}{2}cos\theta d\theta$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\frac{1}{2}cos\theta d\theta}\frac{1}{2}cos\theta d\theta$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta$$

$=\pi$

=(式3)

こ

２回置換しましたが、何とか積分できました！まとめると、

$$B(\frac{1}{2},\frac{1}{2})=\frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2}+\frac{1}{2})}$$

$$\pi=(\Gamma(\frac{1}{2}))^2\cdot 1$$

よって

$$\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$$

が出ました。

ベータ関数の値を求めるときの積分は高校数学範囲でできます！
以上、「ガンマ関数がよくわかる(その 2_大学数学編)」を解説しました。