

【1】 R 管理図の変数

d_2, d_3 の係数は

$$\bullet d_2 = \int_{-\infty}^{\infty} [1 - (1 - \Phi(x))^n - (\Phi(x))^n] dx$$

$$\bullet d_3 = \sqrt{2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^y f(x, y) dx dy - d_2^2}$$

$$f(x, y) = 1 - \Phi(y)^n - (1 - \Phi(x))^n + (\Phi(y) - \Phi(x))^n$$

で導出される。

(φ 、 Φ はそれぞれ標準正規分布 $N(0,1^2)$ の確率密度関数、累積分布関数とする)

「新編統計数値表 河出書房 1952」 P207 にあるが、この難しい式の導出を d_2 だけやってみる。

(d_3 はわかり次第、報告する)

正規化するため、 $X_i \sim N(0,1^2) (i = 1, 2, \dots, n)$ における最小値を X 、最大値を Y とする。

このとき、 $R = Y - X$ となり、 X と Y の同時確率密度関数は順序統計量から

$$f_{X,Y}(x, y) = n(n-1)\varphi(x)\varphi(y)(\Phi(y) - \Phi(x))^{n-2}$$

となる。

$$E[R] = E[Y - X] = n(n-1) \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(y) dy \int_{-\infty}^y (y-x)\varphi(x)(\Phi(y) - \Phi(x))^{n-2} dx$$

$$= n(n-1) \int_{-\infty}^{\infty} y\varphi(y) dy \int_{-\infty}^y \varphi(x)(\Phi(y) - \Phi(x))^{n-2} dx - n(n-1) \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(y) dy \int_{-\infty}^y x\varphi(x)(\Phi(y) - \Phi(x))^{n-2} dx$$

括弧内の積分をそれぞれ①②とおく。

$$\textcircled{1} = \int_{-\infty}^{\infty} y\varphi(y) dy \int_{-\infty}^y \varphi(x)(\Phi(y) - \Phi(x))^{n-2} dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} y\varphi(y) dy \left[-\frac{1}{n-1} (\Phi(y) - \Phi(x))^{n-1} \right]_{x=-\infty}^{x=y} = \frac{1}{n-1} \int_{-\infty}^{\infty} y\varphi(y) \Phi(y)^{n-1} dy$$

$$\textcircled{2} = n(n-1) \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(y) dy \int_{-\infty}^y x\varphi(x)(\Phi(y) - \Phi(x))^{n-2} dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x\varphi(x) dx \int_x^{\infty} \varphi(y)(\Phi(x) - \Phi(y))^{n-2} dy \quad (\text{積分順序を変更})$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x\varphi(x) dx \left[\frac{1}{n-1} (\Phi(y) - \Phi(x))^{n-1} \right]_{y=x}^{y=\infty} = \frac{1}{n-1} \int_{-\infty}^{\infty} x\varphi(x) (1 - \Phi(x))^{n-1} dx$$

以上より、①の結果の y を x に書き直して

$$E[R] = n \int_{-\infty}^{\infty} x\varphi(x) \{ \Phi(x)^{n-1} - (1 - \Phi(x))^{n-1} \} dx$$

x を除くために 2 重積分にして

$$= n \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_0^x du \right) \varphi(x) \{ \Phi(x)^{n-1} - (1 - \Phi(x))^{n-1} \} dx$$

$$= -n \int_{-\infty}^0 \varphi(x) \{ \Phi(x)^{n-1} - (1 - \Phi(x))^{n-1} \} dx \int_0^x du + n \int_0^{\infty} \varphi(x) \{ \Phi(x)^{n-1} - (1 - \Phi(x))^{n-1} \} dx \int_0^x du$$

積分順序を変更して

$$\begin{aligned}
&= -n \int_{-\infty}^0 du \int_{-\infty}^u \varphi(x) \left\{ \Phi(x)^{n-1} - (1 - \Phi(x))^{n-1} \right\} dx + \int_0^{\infty} du \int_u^{\infty} \varphi(x) \left\{ \Phi(x)^{n-1} - (1 - \Phi(x))^{n-1} \right\} dx \\
&= -n \int_{-\infty}^0 du \frac{1}{n} \left[\Phi(x)^n + (1 - \Phi(x))^n \right]_{x=-\infty}^{x=u} + n \int_0^{\infty} du \frac{1}{n} \left[\Phi(x)^n + (1 - \Phi(x))^n \right]_{x=u}^{x=\infty} \\
&= - \int_{-\infty}^0 \left[\Phi(u)^n + (1 - \Phi(u))^n \right]_{x=-\infty}^{x=u} du + \int_0^{\infty} \left[1 - \Phi(u)^n - (1 - \Phi(u))^n \right]_{x=u}^{x=\infty} du \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ 1 - \Phi(u)^n - (1 - \Phi(u))^n \right\} du
\end{aligned}$$

この結果を d_2 とおく。