管理図がよくわかる

【注意】管理図はシューハートの管理図だけではない

シューハートの管理図は教科書や試験に出しやすいからみんな解ける。 でも、その理論を説明できる人はほぼいない。 理論をわからずに機械的に工程管理するのは良くありません。

●Youtube 動画でも解説しています。 https://www.youtube.com/embed/1JKRLW4ru6E

【1】管理図を勉強した人のありがちな考え方

”シューハート管理図”脳を一旦リセットすべきです。

管理図でよく勉強する内容（試験で頻出）は、

(i) シューハートの管理図の種類を覚え、LCL,UCL の導出式を暗記 (ii) 計数値管理図の管理限界は、管理図係数表から導出 (iii) 郡内変動、群間変動の分散の式を暗記し、σ の推定値を R/d2 で導出

です。
しかし、次の 4 つの疑問が残りました。

1. データの特性によらず、管理図係数表の値で管理限界が決まるのは正しいの？ 2. 管理図係数表の値はだれがどうやって数学的に正しく導出したのか？ 3. 全データを管理しているはずなのに、σ の推定値を導出する意味はあるのか？ 4. 郡内変動、群間変動の分散の式は正しいのか？

自分で考えて工程管理できる管理図を設計してほしいです。

【2】管理図の最新 JIS 規格は 3 部しかない

最新の JIS 規格(JISZ9020 (2016))では、「シューハートの管理図」色が濃かった過去の規格と比べて、薄くなりました。

(1)管理図の最新 JIS 規格

1. 管理図-一般指針　JISZ9020-1(2016) 2 .管理図-シューハート管理図 JISZ9020-2(2016) 3. 管理図-累積和管理図 JISZ9020-48(2018)

ここで、「累積和管理図 JISZ9020-48(2018)」は使う場面がほぼないので割愛します。

最新の JIS では ①一般指針 ②シューハートの管理図 の 2 つだけ。

過去には、シューハート管理図 JIS9021 1998 がありましたが、廃止され、シューハート管理図 JISZ9020-2(2016)に統合されました。

それでも、「シューハートの管理図」の存在感は強いです。しかし、その前に「一般指針」を理解し、「シューハートの管理図」は「一般指針」の一部でしかないと理解しましょう。

最新の JIS では ①管理図は自分でまず考えて設計すべき（一般指針） ②管理図の 1 例にシューハートの管理図がある と意識しましょう

【3】一般指針とシューハートの管理図の違い
自分で管理図を考えた場合と、シューハートの管理図を適用した場合では、同じ考え方になるところと、考えが異なるところがあります。シューハートの管理図で「？」な部分は、自分で理論を作って、対象となる工程管理の妥当性を担保してほしいからです。
(1) シューハート管理図の疑問点

1. データの特性によらず、管理図係数表の値で管理限界が決まるのは正しいの？
2. 管理図係数表の値はだれがどうやって数学的に正しく導出したのか？
3. 全データを管理しているはずなのに、σの推定値を導出する意味はあるのか？
4. 郡内変動、群間変動の分散の式は正しいのか？

(2) 一般指針とシューハートの管理図が同じである場合

＜項目＞	＜内容＞
管理図の目的	中心線と管理限界線2本を作って、 工程の合否を判定
異常判定誤りリスク	第1種の誤り、第2種の誤り
検査対象の変数	計量値（正規分布）、 計数値（二項分布、ポアソン分布）

管理図で調べたいこと、工程の合否など基本的な考え方は同じです。
だから、最初からシューハート管理図に入る傾向が強いと考えます。
(3) 一般指針とシューハートの管理図が異なる場合</h3>

＜項目＞	＜一般的な管理図＞	＜シューハート管理図＞
管理限界線の位置	検査対象ごとに異なる	中心線から両側に3σ
	計量値：平均±kσ、 計数値：平均±kσ	計量値：平均±管理図係数×R(or s)、 計数値：平均±kσ
	–	管理図係数表を使って管理限界線を求める
管理図の種類	検査対象の変数に合わせて自分で決める	計量値(Xbar-R)、 計数値(pn,p）など 種類が決まっている。
異常判定ルール	製品・サービスの要求事項を満たすか否か	異常判定ルールが決まっている
特徴	検査対象に合わせて工程合否基準を設計する	検査対象に関係なく同一のルールで合否基準 が決まっている
メリット	理論を詰めて管理できる	機械的に処理できる
デメリット	設計が面倒	与えられた式、係数値の 導出過程が難解すぎる。
QC検定®	出題されない	出題範囲
実務	説明責任が果たせる管理図を使うべき	そのまま使ってよいかは 関係者と協議が必要

管理図を自分で考えて作ると、シューハート管理図との違いがはっきりわかるようになります。

【4】管理図は自分で考えて設計すべき

管理図は手段です。調べたい目的は工程管理の異常を調べることですね。

(1) 管理図を使うときに考えること

対象となる工程管理の合否を調べるために必要な事項を挙げます。

①検査対象 ②サンプル数の規模 ③調べたい特性の値(計数値、計量値) ④工程の合否判定基準(何σなのか？) ⑤工程が異常だったら何をすべきか？

以上の項目をまず考えるはずです。

シューハートの管理図はまだ、出てきませんね。

シューハートの管理図は、見せ方の１つの手段として活用するべきです。

最初から、「pn 管理図使おう」などしないことです。

管理図は手段。目的は工程管理の評価と異常対策です。

異常時の対策と改善が実務では最も重要になります。改善提案を考えるときは、自分で考えて作った管理図の方が考えやすいし、協議しやすいはずです。

計算する手法より、頭で考えることがＱＣでは求められます。

以上、「【注意】管理図はシューハートの管理図だけではない」を解説しました。

管理図係数値で n が 6 以上でない使えない係数がある理由がわかる

管理図係数値は 0 以上が必須ですが、負になる場合は「—」とするから。 管理図係数値を実際に計算して、「—」となる場合の値を求めてみましょう。

●Youtube 動画でも解説しています。 https://www.youtube.com/embed/lLgDfvp95R4

【1】管理図係数表一覧

(1)管理図係数表が使える理由

●変数 X は正規分布に従う。 ●標準偏差 s は χ2 乗分布、正規分布に従う。 ●範囲 R は、順序統計量(同時分布)と正規分布に従う。

と仮定するので、データ特性に関係なく、確率分布関数にデータが従うと考えます。
よって、管理限界を計算する係数がデータ対象に関係なく使えるとしています。

なお、係数はサンプル数 n に関係する式となっています。

(2)管理図係数表

JISZ9020-2(2016) 表 2「管理限界線を計算するための係数」に載っている表です。なお、n=100 の場合も下表に載せておきます。

–	管理限界の係数											中心線の係数	
–	$\bar{X}$管理図			s管理図				R管理図				s	R
n	A	A_2	A_3	B_3	B_4	B_5	B_6	D_1	D_2	D_3	D_4	c_4	d_2
2	2.121	1.88	2.659	–	3.267	–	2.606	–	3.686	–	3.266	0.798	1.128
3	1.732	1.023	1.954	–	2.568	–	2.276	–	4.358	–	2.575	0.886	1.693
4	1.5	0.729	1.628	–	2.266	–	2.088	–	4.698	–	2.282	0.921	2.059
5	1.342	0.577	1.427	–	2.089	–	1.964	–	4.918	–	2.115	0.94	2.326
6	1.225	0.483	1.287	0.03	1.97	0.029	1.874	–	5.078	–	2.004	0.952	2.534
7	1.134	0.419	1.182	0.118	1.882	0.113	1.806	0.205	5.204	0.076	1.924	0.959	2.704
8	1.061	0.373	1.099	0.185	1.815	0.179	1.751	0.388	5.307	0.136	1.864	0.965	2.847
9	1	0.337	1.032	0.239	1.761	0.232	1.707	0.547	5.393	0.184	1.816	0.969	2.97
10	0.949	0.308	0.975	0.284	1.716	0.276	1.669	0.686	5.469	0.223	1.777	0.973	3.078
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
100	0.3	0.06	0.301	0.787	1.213	0.785	1.21	3.2	6.831	0.638	1.362	0.997	5.015

【2】管理図係数の公式

各係数の算出公式を参考に載せます。導出は関連記事にありますので、ご覧ください。

【関連記事】【重要】管理図(計量値)の変数の導出がわかる https://qcplanets.com/method/control-chart/constants/

各係数の算出公式一覧を列挙します。k=3(3σ）で JISZ9020-2 は計算しています。

管理限界の係数	$\bar{X}$管理図	A	=	$\frac{k}{\sqrt{n}}$
		A_2	=	$\frac{k}{d_2\sqrt{n}}$
		A_3	=	$\frac{k}{c_4\sqrt{n}}$
	s管理図	B_3	=	$max(0, 1-\frac{k}{c_4}\sqrt{1-c_4^2})$
		B_4	=	$1+\frac{k}{c_4}\sqrt{1-c_4^2}$
		B_5	=	$max(0, c_4-k\sqrt{1-c_4^2})$
		B_6	=	$c_4+k\sqrt{1-c_4^2}$
	R管理図	D_1	=	$max(0, d_2-kd_3)$
		D_2	=	d_2+kd_3
		D_3	=	$max(0, 1-\frac{kd_3}{d_2})$
		D_4	=	$1+\frac{kd_3}{d_2}$

中心線の係数	s	c_4	=	$\frac{\Gamma(\frac{n}{2})\sqrt{\frac{2}{n-1}}}{\Gamma(\frac{n-1}{2})}$
	R	d_2	=	$\int_{-\infty}^{\infty}[1-(1-\varphi(x))^n-(\varphi(x))^n]dx$
	-	d_3	=	$\sqrt{2\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{y} f(x,y)dxdy-d_2^2}$ $f(x,y)=1-\varphi(y)^n-(1-\varphi(x))^n+(\varphi(y)-\varphi(x))^n$

係数 A は理解しやすいですが、B,D は導出が難しいc_4, d_2, d_3を使って計算します。c_4, d_2, d_3の導出も関連記事で確認ください。

●c_4の導出

【関連記事】【必読】s 管理図の変数 c4 と管理限界の導出がわかる
https://qcplanets.com/method/control-chart/s-chart/

●d_2, d_3の導出

【関連記事】【必読】R 管理図の変数 d2,d3 の導出がわかる
https://qcplanets.com/method/control-chart/r-control-chart-d2-d3/

【3】管理図係数が負になる場合も計算

公式どおり、各係数を計算すると次の結果になります。

–	管理限界の係数											中心線の係数	
–	$\bar{X}$管理図			s管理図				R管理図				s	R
n	A	A_2	A_3	B_3	B_4	B_5	B_6	D_1	D_2	D_3	D_4	c_4	d_2
2	2.121	1.88	2.659	-1.267	3.267	-1.011	2.606	-1.429	3.686	-1.266	3.266	0.798	1.128
3	1.732	1.023	1.954	-0.568	2.568	-0.504	2.276	-0.973	4.358	-0.575	2.575	0.886	1.693
4	1.5	0.729	1.628	-0.266	2.266	-0.245	2.088	-0.581	4.698	-0.282	2.282	0.921	2.059
5	1.342	0.577	1.427	-0.089	2.089	-0.084	1.964	-0.266	4.918	-0.115	2.115	0.94	2.326
6	1.225	0.483	1.287	0.03	1.97	0.029	1.874	-0.01	5.078	-0.004	2.004	0.952	2.534
7	1.134	0.419	1.182	0.118	1.882	0.113	1.806	0.205	5.204	0.076	1.924	0.959	2.704
8	1.061	0.373	1.099	0.185	1.815	0.179	1.751	0.388	5.307	0.136	1.864	0.965	2.847
9	1	0.337	1.032	0.239	1.761	0.232	1.707	0.547	5.393	0.184	1.816	0.969	2.97
10	0.949	0.308	0.975	0.284	1.716	0.276	1.669	0.686	5.469	0.223	1.777	0.973	3.078
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
100	0.3	0.06	0.301	0.787	1.213	0.785	1.21	3.2	6.831	0.638	1.362	0.997	5.015

黄色枠部は計算すると係数が負となりますね。必ず知っておいてください。

以上、管理図係数値で n が 6 以上でない使えない係数がある理由を解説しました。

管理図の各係数値の極限値(n⇒∞)がわかる

【1】管理図各係数の関係

詳細は関連記事で解説していますが、一覧表を確認しましょう。

【関連記事】【重要】管理図(計量値)の変数の導出がわかる
https://qcplanets.com/method/control-chart/constants/

JISZ9020-2 の表 2「管理限界線を計算するための係数」から変数一覧を出します。

管理限界の係数	$\bar{X}$管理図	A	=	$\frac{k}{\sqrt{n}}$
		A_2	=	$\frac{k}{d_2\sqrt{n}}$
		A_3	=	$\frac{k}{c_4\sqrt{n}}$
	s管理図	B_3	=	$max(0, 1-\frac{k}{c_4}\sqrt{1-c_4^2})$
		B_4	=	$1+\frac{k}{c_4}\sqrt{1-c_4^2}$
		B_5	=	$max(0, c_4-k\sqrt{1-c_4^2})$
		B_6	=	$c_4+k\sqrt{1-c_4^2}$
	R管理図	D_1	=	$max(0, d_2-kd_3)$
		D_2	=	d_2+kd_3
		D_3	=	$max(0, 1-\frac{kd_3}{d_2})$
		D_4	=	$1+\frac{kd_3}{d_2}$

中心線の係数	s	c_4	=	$\frac{\Gamma(\frac{n}{2})\sqrt{\frac{2}{n-1}}}{\Gamma(\frac{n-1}{2})}$
	R	d_2	=	$\int_{-\infty}^{\infty}[1-(1-\varphi(x))^n-(\varphi(x))^n]dx$
	-	d_3	=	$\sqrt{2\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{y}f(x,y)dxdy-d_2^2}$ $f(x,y)=1-\varphi(y)^n-(1-\varphi(x))^n+(\varphi(y)-\varphi(x))^n$

上の表を、c4,d2,d3 の観点でまとめ直しましょう。下表のような関係になるのがわかります。

係数	なし	c_4	d_2	d_3
$\bar{X}$管理図	A	A_3	A_2	–
s管理図	–	B_3,B_4, B_5,B_6	–	–
R管理図	–	–	D_1,D_2, D_3,D_4	D_1,D_2, D_3,D_4

ここで、よく見ると、すべての係数は、c4,d2,d3,k=3,n で計算できますことがわかります。

c4,d2,d3 のそれぞれの値を n⇒∞にとばした時の極限値を計算しよう！
c4,d2,d3 が n 増加によってどのように値が変化するかを見よう！

興味本位ですが、係数の特性がわかると管理図も作りやすくなります。

【2】c4,d2,d3 をプログラムで計算

(1) R 言語をインストール

Google で「R 言語　インストール」を検索して、お使いの PC の OS に合う「R」をインストールします。
活用できるものはどんどん活用しましょう！何でもかんでも自分で作る必要はありません。

●関連記事にインストール方法がありますので紹介します。
https://qiita.com/FukuharaYohei/items/8e0ddd0af11132031355/
【R 言語インストール(2020 年 Windows)】

●インストーラーダウンロードも確認ください。
" The Comprehensive R Archive Network【R 言語インストール(2020 年 Windows)】

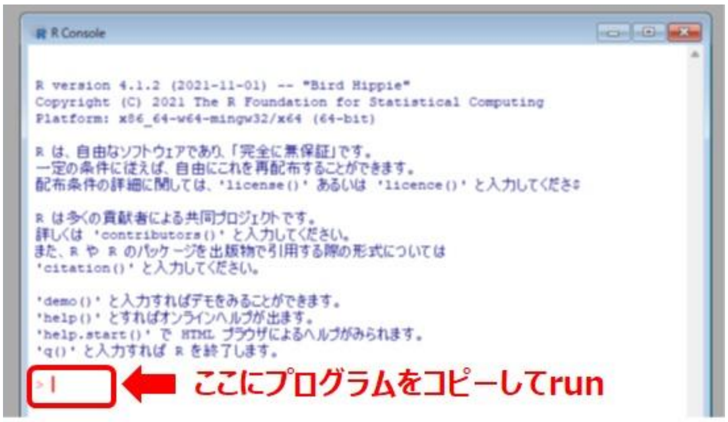
●お使いの PC によって Linux,macOS,Windoews を選択ください。

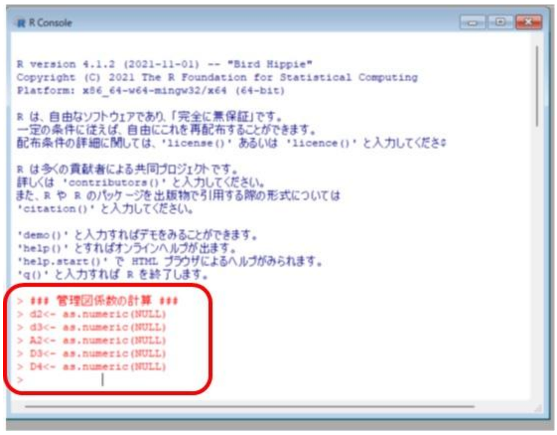
●Windows の場合は「Subdirectories」のところで「base」を選択してダウンロードします。

(2) d2,d3 計算プログラム
R 言語が PC 上で起動できたら、d2,d3 計算プログラムを走らせます。

すでに、プログラムを作っている方がいらっしゃるので、それを使いましょう。個人使用限定でお願いしますね。
https://biolab.sakura.ne.jp/shewhart-control-chart-constants.html
【シューハート管理図係数の計算】

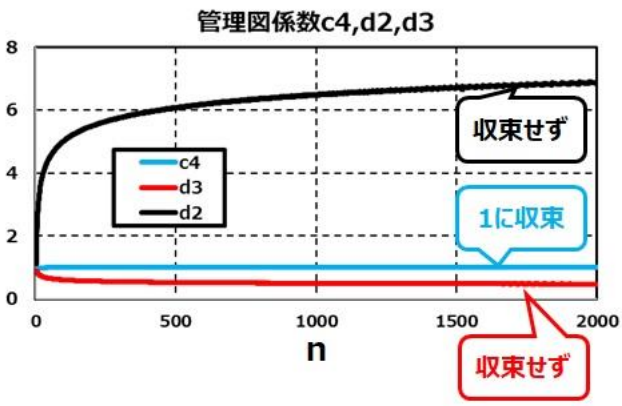
d2,d3,A2,D3,D4 の解析プログラムを先ほどインストールした「R」に貼り付けてください。





n については、デフォルト 1 から 50 となっていますが、50 を好きな数字に変えましょう。ただし、n を増やすと当然計算時間は増えます。2000 にすると数分かかり、それ以上だと、もっとかかります。

【3】管理図係数の極限値
(1) c4,d2,d3 の極限値
c4 はエクセルで、d2,d3 は R 言語で解析しました。結果は下図のとおりです。



(2) c4 の極限値は 1 っぽい
●c4 を構成する Γ 関数ですが、n を増やすと Γ も大きくなり、Excel で計算すると n=344 以上は、「#NUM!」となってしまいました。

●$c_4=\sqrt{\frac{2}{n-1}}\frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{\Gamma(\frac{n-1}{2})}$ですが、Γ関数の関係式を見ると$c_4$は 1 に収束するようです。

$\frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{\Gamma(\frac{n-1}{2})}\Rightarrow\sqrt{\frac{n}{2}}$になるようですね。Γ関数を復習しましょう。

$c_4\Rightarrow\sqrt{\frac{2}{n-1}}\times\sqrt{\frac{n}{2}}=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{n}}}\Rightarrow 1$

(3) d2,d3 は収束しない
R 言語を使って n=2000 くらいまで計算しても、ある値に収束しません。

(4) 係数値 A,B,D はどうなるのでしょうか？
①A,A2,A3

●$A=\frac{k}{\sqrt{n}}\Rightarrow 0$
●$A_2=\frac{k}{d_2\sqrt{n}}\Rightarrow ?$
●$A_3=\frac{k}{c_4\sqrt{n}}\Rightarrow 0$
A_2は、AとA_3と同様に0に収束するかもしれません。
Aは$\bar{X}$についての値なので、正規分布N(0,1)を考えると0に収束するのかもしれません。

②B3,B4,B5,B6

●$B_3=max(0,1-\frac{k}{c_4}\sqrt{1-c_4^2})\Rightarrow 1$
●$B_4=1+\frac{k}{c_4}\sqrt{1-c_4^2}\Rightarrow 1$
●$B_5=max(0,c_4-k\sqrt{1-c_4^2})\Rightarrow 1$
●$B_6=c_4+k\sqrt{1-c_4^2}\Rightarrow 1$

B は標準偏差 s についての値なので、正規分布 N(0,1)を考えると 1 に収束するのかもしれません。

③D1,D2,D3,D4

●$D_1=max(0,d_2-kd_3)\Rightarrow ?$
●$D_2=d_2+kd_3\Rightarrow ?$
●$D_3=max(0,1-\frac{kd_3}{d_2})\Rightarrow ?$
●$D_4=1+\frac{kd_3}{d_2}\Rightarrow ?$

D は範囲 R についての値です。範囲 R はサンプル数 n が極限値になっても、ある一定の値を持ちます。だから、係数 D はどこに収束するかわかりません。
以上、計量値管理図の係数の極限値について解説しました。

【必読】管理図でばらつき低減効果が確認できる

実験計画法を使って分散分析と、成分分解します。
管理図も変数毎に層別して、成分の変化による管理図の変化を見ていきます。

実験計画法と管理図を使った応用事例です。良い演習問題です。

①管理限界外があれば、ばらつき低減する。 ②ばらつき低減すると工程安定と判断できる。 ③ばらつき低減によって、管理限界の幅が狭くなる。 ④また、管理限界外な点が発生する。 ⑤さらにばらつきを低減、… ⑥、と継続的改善すれば、ばらつきのない理想な工程に近づく 管理図と分散分析からわかる。

●You tube 動画でも解説しているので、確認ください。
https://www.youtube.com/embed/_Hfr8bCov-o

【1】データの成分分解、分散分析と層別した管理図を作成
(1) 実験計画法（三元配置実験）のデータを使った例題

ある製品の工程では、A 工程(2 工程)、B 機械(3 台)、C 製造日(10 日間)の 3 つの変数で管理している。この 3 つの特性から、製品特性 X を測定した結果を下表にまとめた。 ①製品特性をx_{ijk}、主効果α_i(A), β_j (B), γ_k(C)、全交互作用効果と残差をつけてデータの構造式を求めよ。 ②分散分析せよ。

–	–	A1	A2	–	–	A1	A2
C1	B1	16	18	C6	B1	16	18
	B2	18	20		B2	18	20
	B3	19	15		B3	19	15
C2	B1	7	23	C7	B1	7	23
	B2	20	38		B2	20	38
	B3	23	25		B3	23	25
C3	B1	20	24	C8	B1	20	24
	B2	30	30		B2	30	30
	B3	27	17		B3	27	17
C4	B1	2	18	C9	B1	2	18
	B2	14	26		B2	14	26
	B3	19	15		B3	19	15
C5	B1	20	22	C10	B1	20	22
	B2	24	30		B2	24	30
	B3	21	19		B3	21	19

実験計画法については、関連記事にまとめています。

【関連記事】究める！実験計画法 https://qcplanets.com/method/doe/top_summary/

(2)データの構造式
さっと、書けるように実験計画法もマスターしてください。

$$x_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_k + (\alpha\beta)_{ij} + (\alpha\gamma)_{ik} + (\beta\gamma)_{jk} + \varepsilon_{ijk}$$

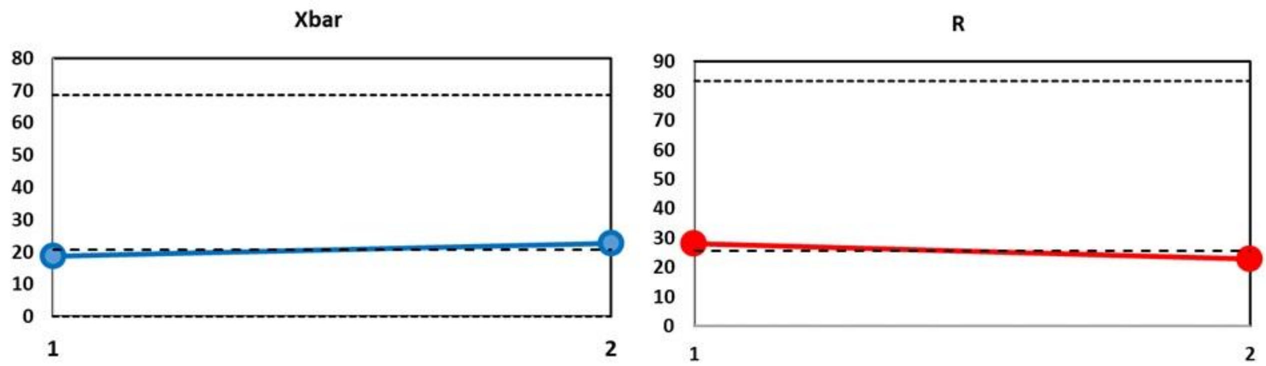
3 因子のデータの構造式では、平均＋主効果＋2 因子交互作用+残差(3 因子交互作用と交絡)となりますね。

(3) 分散分析
3 因子の完全配置実験なので、必ず計算して分散分析してくださいね。いい練習になりますよ。

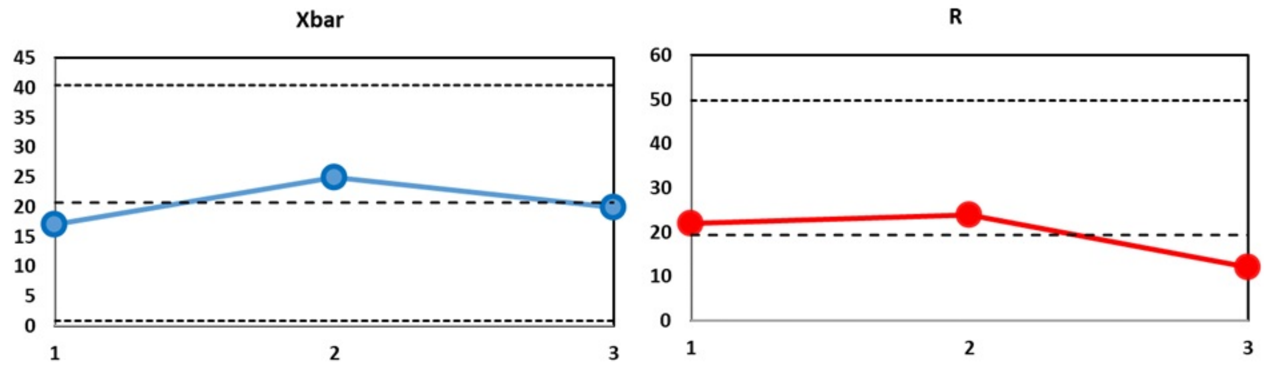
–	S	φ	V	F	F0
A	240	1	240	12.27	4.41
B	520	2	260	13.3	3.55
C	696	9	77.33	3.95	2.46
A×B	520	2	260	13.3	3.55
A×C	408	9	45.33	2.32	2.46
B×C	296	18	16.44	0.84	2.22
e	352	18	19.56	1	–
T	3032	59	–	–	–

分散分析表から、主効果 A,B,C,交互作用 A×B が有意であるとわかりますね。

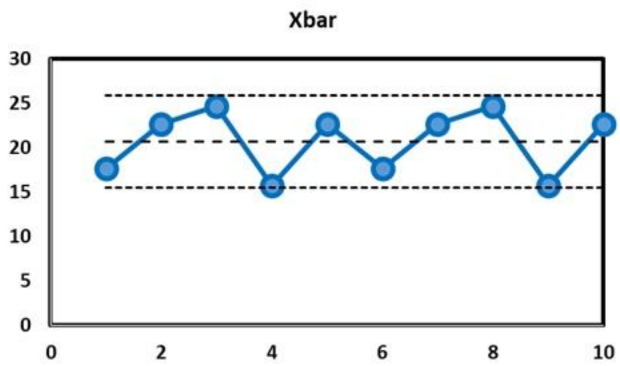
(4) 層別した管理図を作成
では、分散分析したデータを各変数Ａ，Ｂ，Ｃについて層別し、$\bar{X}$-R 管理図に描いてみましょう。
(i) A について

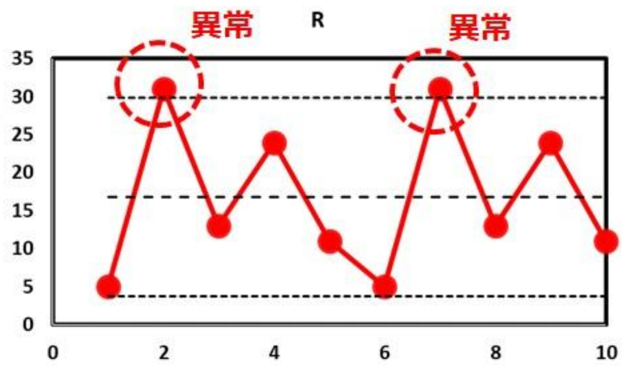


(ii) B について



(iii) C について





A,B は特徴的なパターンはありませんが、Cはぎざぎざで、管理限界外の点が見られます。

分散分析の結果が有意な因子を管理図で調べると工程ＮＧな点が見られました。

【2】成分ごとのばらつき低減と管理図の関係を確認
変数Cについて、工程異常があるので、Cのばらつきを低減することから始めましょう。

(1) C のばらつきを低減した場合
データの構造式を見ましょう。

$$x_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_k + (\alpha\beta)_{ij} + (\alpha\gamma)_{ik} + (\beta\gamma)_{jk} + \varepsilon_{ijk}$$

Cに関する項は、$\gamma_k, (\alpha\gamma)_{ik}, (\beta\gamma)_{jk}, \varepsilon_{ijk} (= (\alpha\beta\gamma)_{ijk})$ですね。
$\gamma_k, (\alpha\gamma)_{ik}, (\beta\gamma)_{jk}, \varepsilon_{ijk} (= (\alpha\beta\gamma)_{ijk})$の変動を 1/4 倍にしましょう。つまり、平方和 $S_C, S_{A\times C}, S_{B\times C}, S_e$ を 2 乗の 1/16 倍にします。

(2)分散分析の変化

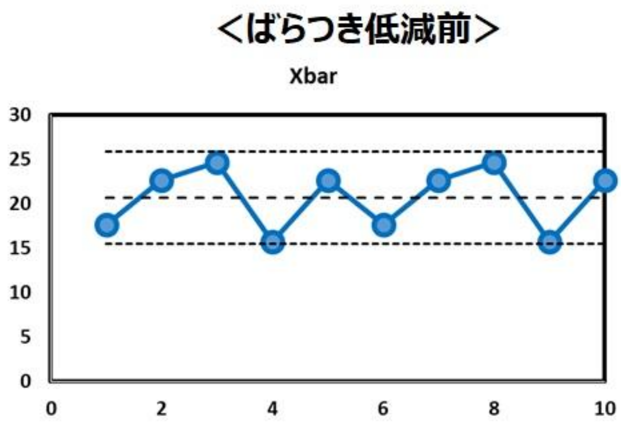
変化前	S	φ	V	F	F0
A	240	1	240	12.27	4.41
B	520	2	260	13.3	3.55
C	696	9	77.33	3.95	2.46
A×B	520	2	260	13.3	3.55
A×C	408	9	45.33	2.32	2.46
B×C	296	18	16.44	0.84	2.22
e	352	18	19.56	1	–
T	3032	59	–	–	–

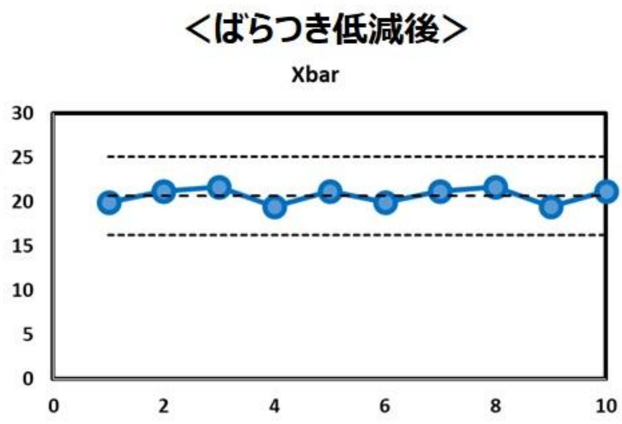
変化後	S	φ	V	F	F0
A	240	1	240	196.36	4.41
B	520	2	260	212.73	3.55
C	43.5	9	4.83	3.95	2.46
A×B	520	2	260	212.73	3.55
A×C	25.5	9	2.83	2.32	2.46
B×C	18.5	18	1.03	0.84	2.22
e	22	18	1.22	1	
T	1389.5	59			

平方和 $S_C, S_{A\times C}, S_{B\times C}, S_e$ が 1/16 倍
になりましたね。

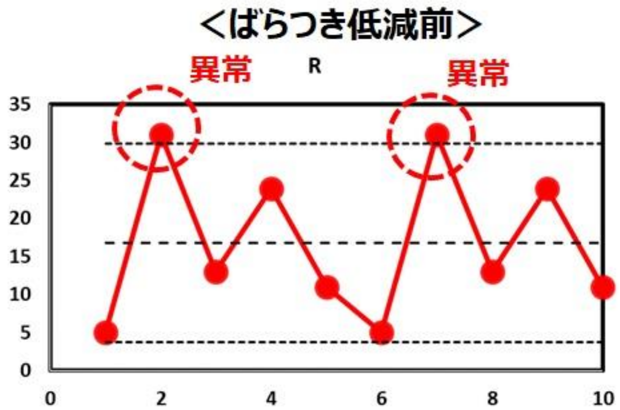
(3) 管理図の変化

●C に関して$\bar{X}$-R 管理図を描きましょう。確かにばらつきが低減した分、管理限界内に入っていることがわかります。
●$\bar{X}$-R 管理図の変化(C について)





●R 管理図の変化(C について)



C について、ばらつきを 1/4 に低減すると、$\bar{X}$管理図も、R 管理図もばらつきが収まり管理限界内に入ることが分かります。なお、A,B については、それほどの大きな変化はありません。
(4) さらに A,B のばらつきも低減した場合
残りの効果についてもばらつきを 1/4 倍に低減しましょう。
①分散分析の変化

変化前	S	φ	V	F	F0
A	240	1	240	12.27	4.41
B	520	2	260	13.3	3.55
C	696	9	77.33	3.95	2.46
A×B	520	2	260	13.3	3.55
A×C	408	9	45.33	2.32	2.46
B×C	296	18	16.44	0.84	2.22
e	352	18	19.56	1	–
T	3032	59	–	–	–

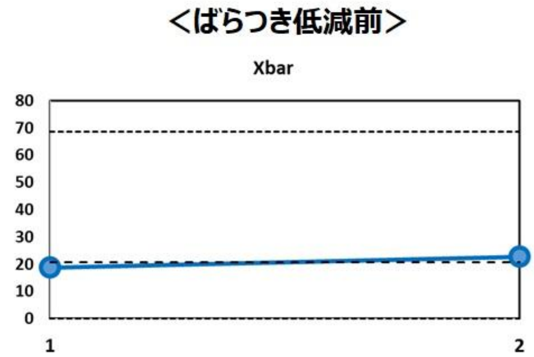
変化後	S	φ	V	F	F0
A	15	1	15	12.27	4.41
B	32.5	2	16.25	13.3	3.55
C	43.5	9	4.83	3.95	2.46
A×B	32.5	2	16.25	13.3	3.55
A×C	25.5	9	2.83	2.32	2.46
B×C	18.5	18	1.03	0.84	2.22
e	22	18	1.22	1	
T	189.5	59			

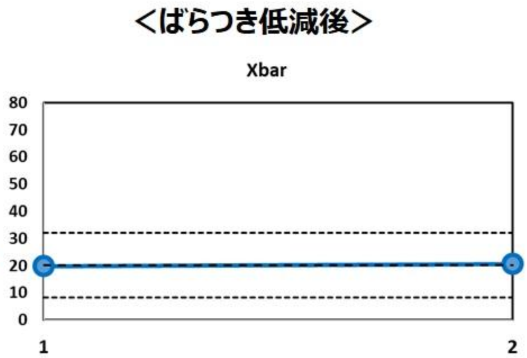
変化前後で、全高価の平方和が 1/16 に変化しました。

では、分散分析したデータを各変数A，B，Cについて層別し、$\bar{X}$-R 管理図に描いてみましょう。

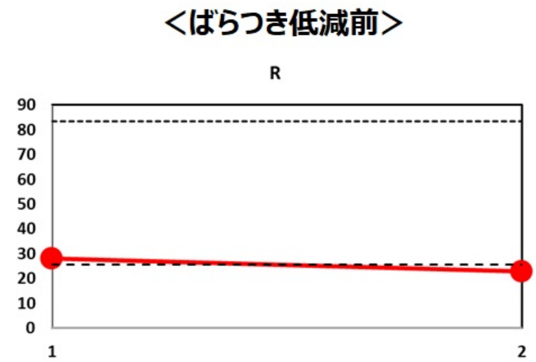
(i) A について

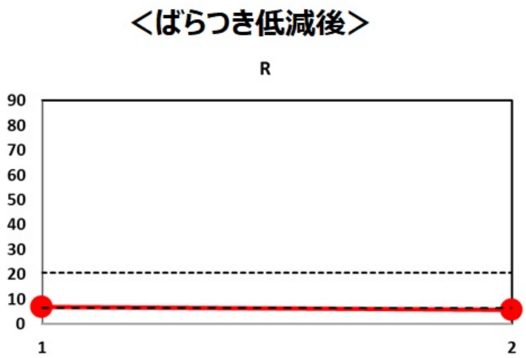
●$\bar{X}$管理図





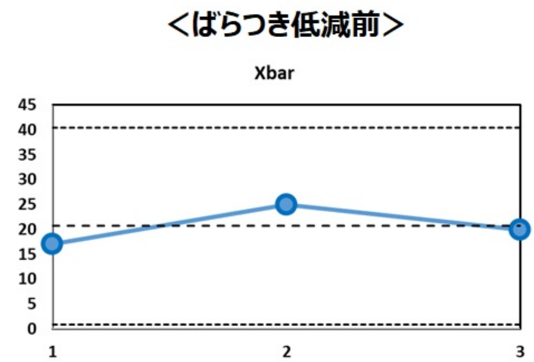
●R 管理図

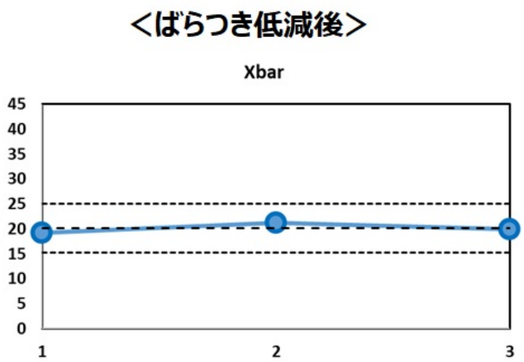




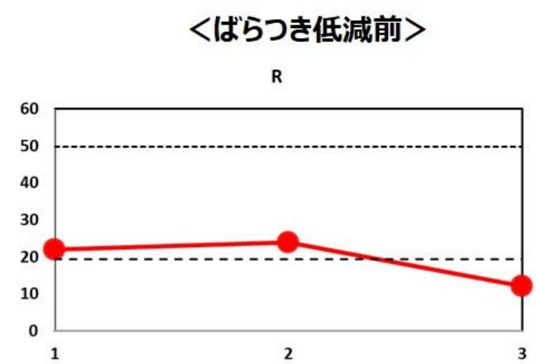
(ii)B について

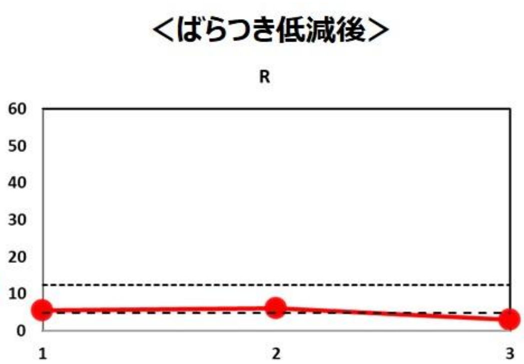
●$\bar{X}$管理図





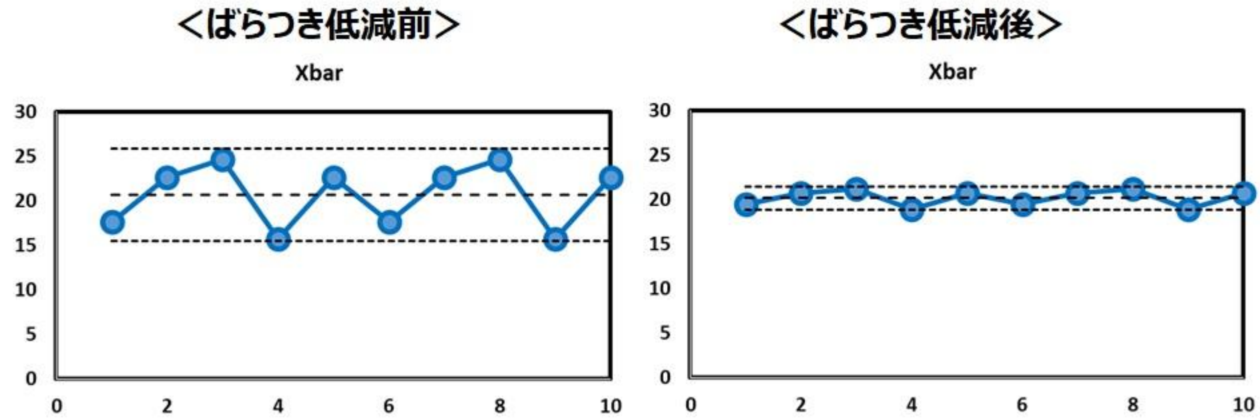
●R 管理図



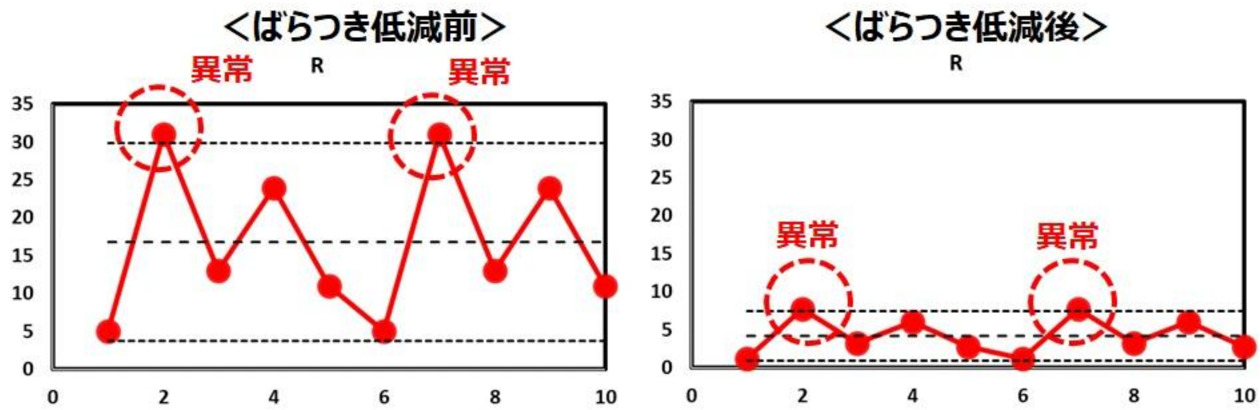


(iii) C について

●$\bar{X}$管理図



●R 管理図



ばらつきは大幅に低減されましたが、管理限界の幅も狭まり、工程不良が再度出現しました。これを何度も繰り返すと、ばらつきのない安定した理想とする工程に近づきます。

以上、管理図と実験計画法を使ってばらつき低減効果を確認する方法を解説しました。

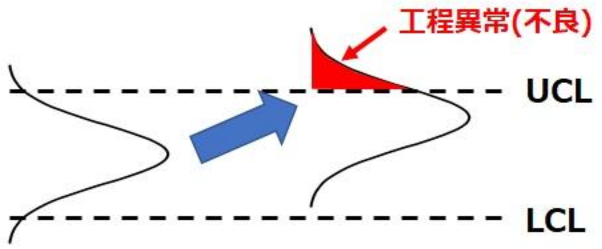
【必読】管理図の第 1 種の誤りと第 2 種の誤り(検出力)がわかる

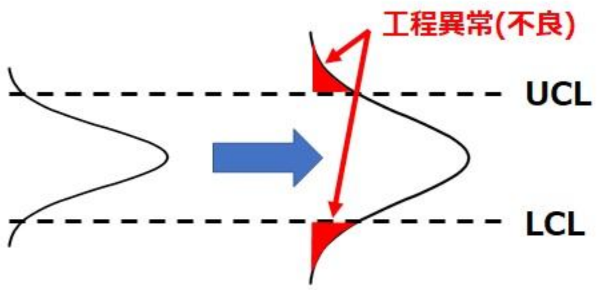
●You tube 動画でも解説しています。ご覧ください。
https://www.youtube.com/embed/bGXeDvo_wXU

【1】工程が変化した場合に注意する
2 点注意しましょう。

1. 工程平均がシフトした場合 2. 工程ばらつきが変化(特に増大)した場合

工程変化によって、管理限界を超える不良が増大する点に注意すれば OK です。図で理解しましょう。
(1) 工程平均がシフトした場合　(2) 工程ばらつきが増大した場合





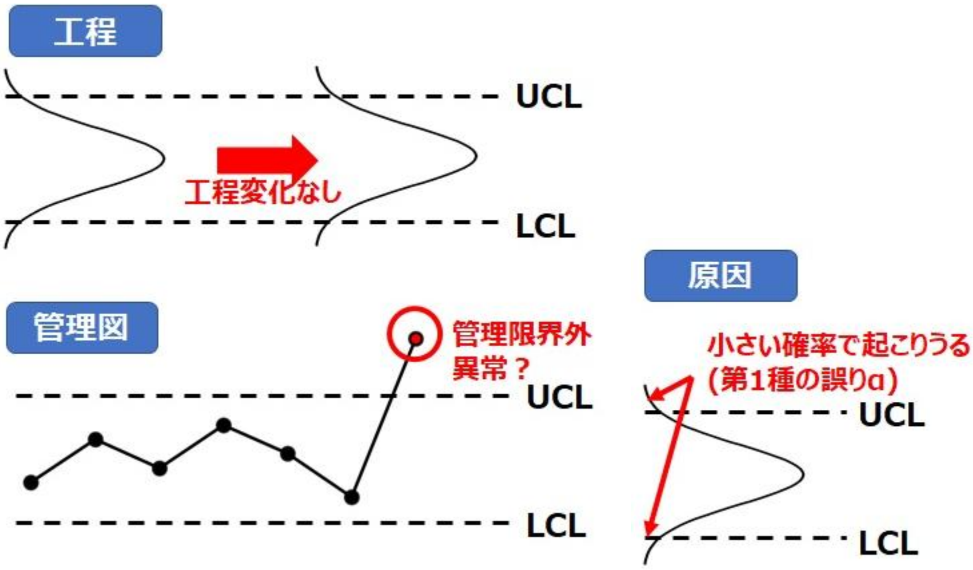
【2】第 1 種の誤りと管理図の関係
(1) 第 1 種の誤り(生産者危険)とは?
検定と推定や抜取検査でも出て来るので、再度確認しましょう。関連記事でも確認しましょう。

【関連記事】抜取検査はすべて OC 曲線をベースに考える https://qcplanets.com/method/sampling-inspection/oc-curve0/

(2) 第 1 種の誤り(生産者危険)とは、

工程は異常がないのに、管理図で異常点が発見され、異常と誤判断する確率

(3) 第 1 種の誤り(生産者危険)と管理図について
図で説明します。

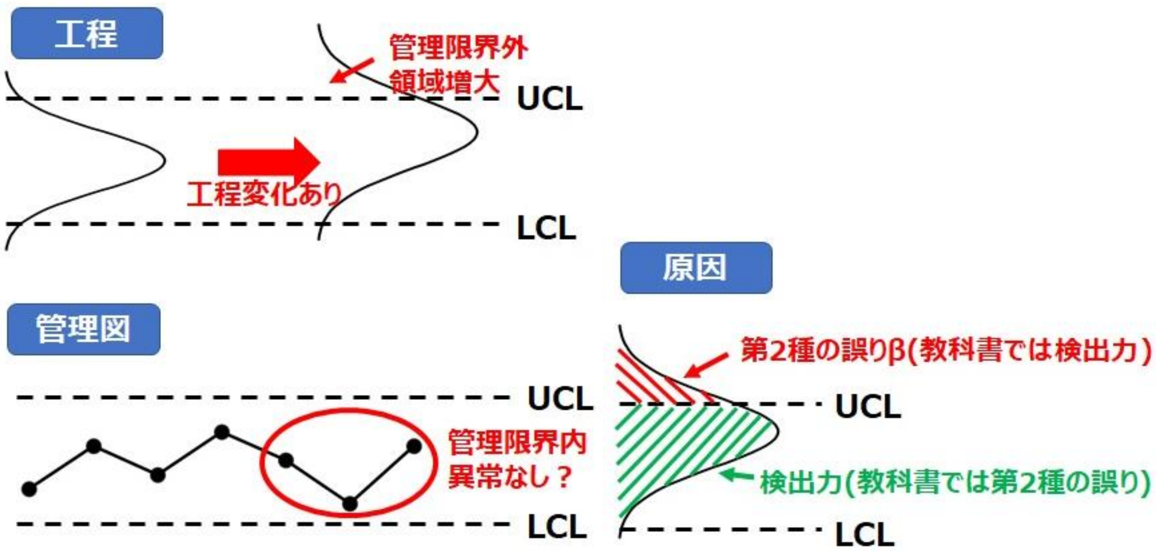


図のとおり、工程自体は安定で問題ないのですが、わずかな確率でも管理限界外な点をとることがあります。管理図で異常となったからとして、すぐに工程を見直すのではなく、そのデータの確からしさを吟味する必要があります。
なお、管理限界を 3σとする正規分布で仮定する場合、第 1 種の誤りとなる確率は 0.26%(Kp=3 のとき、p=0.13%)です。

【3】第 2 種の誤りと管理図の関係
(1) 第 2 種の誤り(消費者危険)とは?

第 2 種の誤り（消費者危険)とは、工程に異常(改善が必要)なのに、管理図で異常がみられず、正常と誤判断する確率

(2) 第 2 種の誤り(消費者危険)と管理図について
図で説明します。

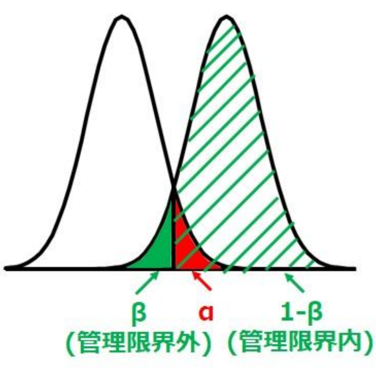


図のとおり、工程自体は問題なのですが、管理図でチェックして異常でないことがわかります。異常を検知できないリスクとなります。

(3) 図の注意点

第 2 種の誤り（消費者危険)(β)と検出力(1－β)の図が教科書と逆にしています。

教科書では、
●管理限界外の領域を検出力 1-β
●管理限界内の領域を第 2 種の誤り（消費者危険)(β)
としています。しかし、第 2 種の誤り（消費者危険)(β)や検出力(1－β)は検定と推定、抜取検査などにも出る概念で、それらと整合性を取ると逆になると考えます。



母平均の検定における棄却域をグラフで描くと、
管理限界外：第 2 種の誤り（消費者危険)(β)
管理限界内：検出力(1－β)
です。

第 2 種の誤り（消費者危険)(β)と検出力(1－β)の図が教科書と逆にしています。 どちらか正解かではなく、どちらを正にするかはよく考える必要があります。

【4】誤りと検出力を計算する演習問題
以下の問いを例に解いてみましょう。QC 検定® 1 級の頻出問題なので、必読です。

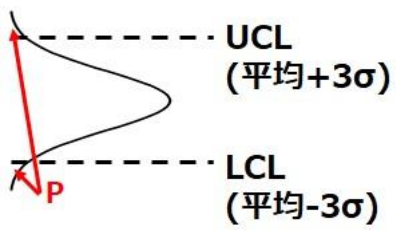
1. 工程平均 μ が変化した場合の管理限界外となる確率の計算 2. 工程ばらつき σ が変化した場合の管理限界外となる確率の計算 3. 工程変化した場合の検出力の計算

(1) 例題

ある工場では、製品 Z の出荷検査に、ある品質特性 X のデータを測っている。毎日管理図で X のデータを管理している。 1 日のデータ数が n=6 である。データは正規分布に従うと仮定し、管理限界線は平均±3σとしている。 ① 工程が変化しない場合、第 1 種の誤りとなる確率はいくらか。 ② 工程平均が 0.4σ 大きくなった場合、管理図で管理限界線を超える(異常となる)確率と、検出力はそれぞれいくらか。 ③ 工程ばらつきが σ⇒1.2σ と大きくなった場合、管理図で管理限界線を超える(異常となる)確率と、検出力はそれぞれいくらか。

(2) 例題の解説
①上下の管理限界線を超える確率を求めます。平均を中心とした対称性がある分布なので、
上側の確率の 2 倍でよいです。

上側の確率は Kp=3 の時の確率です。正規分布表で Kp=3 のときは、p=0.13%です。
よって、答えは 0.26%です。

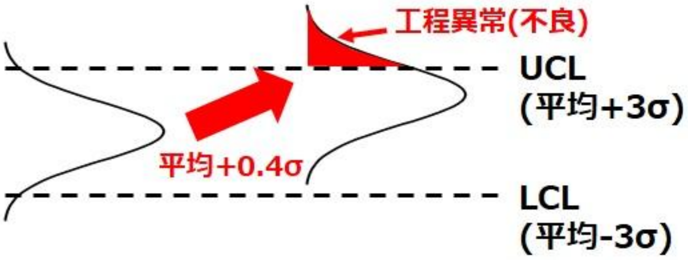


②

検定統計量Kp= $\frac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ を考えます。
もともと3σで管理限界を設けていますので、
Kp=3, $\bar{x}$ =UCLまたはLCL,μは平均として、
検定統計量Kp=3= $\frac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ が成り立っています。

そこに、工程平均が0.4σ大きくなったので、式を追加します。
検定統計量Kp'= $\frac{\bar{x}-(\mu+0.4\sigma)}{\sigma/\sqrt{n}}$
= $\frac{\bar{x}-(\mu)}{\sigma/\sqrt{n}}$ - $\frac{0.4\sigma}{\sigma/\sqrt{n}}$
となり、
Kp'= $\frac{\bar{x}-(\mu)}{\sigma/\sqrt{n}}$ -0.4 $\sqrt{n}$
=3-0.4 $\sqrt{6}$
=2.02となります。
この式はQC検定®1級攻略に必須な式です。

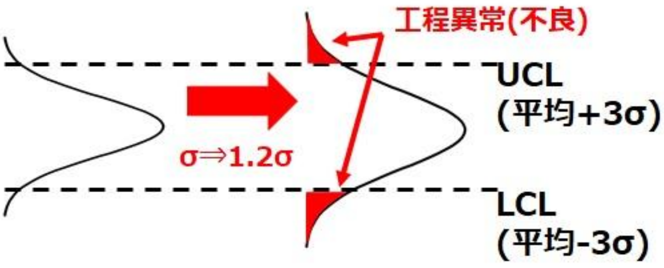
工程が上側にシフトしたので、下側の確率は 0 として無視します。



Kp=2.02 となる確率は正規分布表から P=0.0217(2.1%)⇒第 2 種の誤り。
検出力は 1-β=1-0.0217=0.9783(97.8%)

③ ②と同様に
(2)と同様に
検定統計量Kp=3= $\frac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ が成り立っています。

そこに、工程ばらつきが1.2倍大きくなったので、式を追加します。
検定統計量Kp'= $\frac{\bar{x}-(\mu)}{1.2\sigma/\sqrt{n}}$
=Kp/1.2=3/1.2
=2.5となります。
異常確率は管理限界の上下の両側を求めます。



Kp=2.5 となる確率は正規分布表から P=0.0062(0.62%)
確率は 2 倍して P=0.0124(1.24%))⇒第 2 種の誤り。
検出力は 1-β=1-0.0124=0.99876(99.9%)

管理図で、工程の平均やばらつきが変化した場合も落ち着いて、管理限界となる確率が計算できますね。

以上、管理図における第 1 種の誤りと第 2 種の誤りについて、解説しました。

【本記事限定】計数値データにR管理図を使う場合を考える

「R 管理図はなぜ計量値しかないのかがわからない」、「Xbar 管理図は R 管理図や s 管理図を併用するのに、なんで、np 管理図、p 管理図、c 管理図、u 管理図は併用しないのかがわからない」を考えてみましょう。

●Youtube 動画でも解説しています。ご確認ください。
https://www.youtube.com/embed/znGtmbQLRvE

【1】管理図の分類は計量値、計数値で分けるのが一般的
(1) 教科書の分類方法
教科書では、データが計量値、計数値のどちらか、計数値の場合は属する確率分布によって区分されます。

ー	確率分布	データ	平均	幅
計量値	正規分布	長さ、重さなど	X管理図	R管理図
			$\bar{X}$管理図	s管理図
計数値	二項分布	率	p管理図	×
		個数	np管理図	×
	ポアソン分布	欠点数	c管理図	×
		単位当たりの欠点数	u管理図	×

(2) 当たり前を疑ってみよう！
上の表のオレンジ枠をみると、計数値データは、平均に関する管理図はあるが、幅(範囲や標準偏差)についての管理図は無いことがわかります。なぜでしょうか？

【2】計数値になぜ R 管理図や s 管理図が無いのか？
(1) 個数や率は群間だけの値になりやすいから
ここで、計量値データを用意します。
●全データ 30 個用意し、ある計量値データとしましょう。長さ、重さ、時間とか何でも OK。
● 1 つのグループに 6 データを用意して、5 グループのデータを取る。
表にすると下のような感じです。

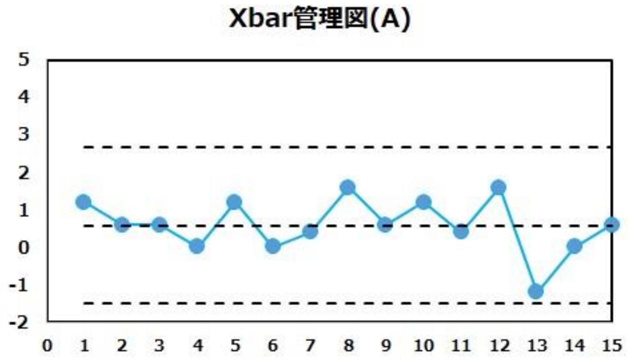
Xij	1	2	3	4	5	? ?
1	20	22	18	16	19	
2	15	17	19	17	22	
3	24	16	19	22	19	
4	21	18	24	22	20	
5	16	20	16	15	18	
6	21	16	17	23	18	

ここで、上表の黄色枠で何か、「まとめたデータ」をとるはずですが、何をとりますか？
「平均値」と「標準偏差（または範囲)」が思いつくでしょう。
「平均値」と「範囲」を追加した表を再度書きます。

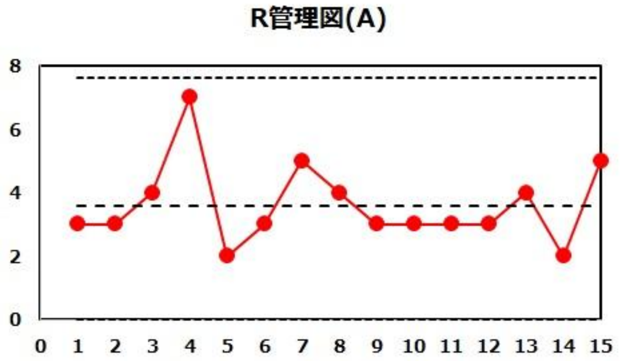
Xij	1	2	3	4	5	Xbar	R
1	20	22	18	16	19	19	6
2	15	17	19	17	22	18	7
3	24	16	19	22	19	20	8
4	21	18	24	22	20	21	6
5	16	20	16	15	18	17	5
6	21	16	17	23	18	19	7

この表から$\bar{X}$管理図と R 管理図ができますね。

●$\bar{X}$管理図



●R 管理図



では、計量値データを計数値化すると、どんな管理図が作れるかを見ましょう。

次に元の計量値データにおいて、平均以上なら「良 0」,未満なら「不良 1」と判定しましょう。

その結果のデータは次の表に変わります。

Xij	1	2	3	4	5	Xbar	R
1	20	22	18	16	19	19	6
2	15	17	19	17	22	18	7
3	24	16	19	22	19	20	8
4	21	18	24	22	20	21	6
5	16	20	16	15	18	17	5
6	21	16	17	23	18	19	7
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
Xij	1	2	3	4	5	合計	平均
1	0	0	1	1	1	3	0.6
2	1	1	1	1	0	4	0.8
3	0	1	1	0	1	3	0.6
4	0	1	0	0	0	1	0.2
5	1	0	1	1	1	4	0.8
6	0	1	1	0	1	3	0.6

計数値データとして変化した表をみると、縦列の合計値と平均は意味があるけど、横列の 0,1,の値の並びに意味はないことがわかります。

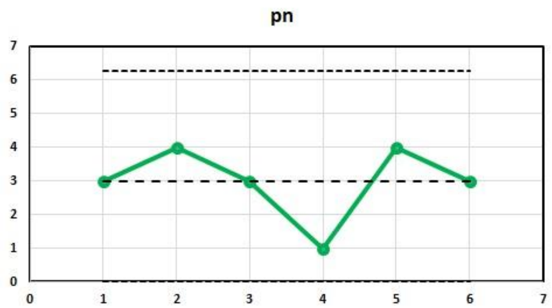
計数値データでは、群内データの分布に意味がないため、群間変動だけ管理図で表現される。これが、計数値データの管理図は 1 種類しかない理由とわかります。

実際に計数値データにした場合、欲しいデータは、群番号と、各群の合計値だけですね。

Xij	合計	率
1	3	0.6
2	4	0.8
3	3	0.6
4	1	0.2
5	4	0.8
6	3	0.6

合計値なら、np 管理図、c 管理図、平均値なら、p 管理図、u 管理図の 1 つの管理図だけ作るわけです。

●np 管理図



ここで、「なるほど！」と納得して終わってはいけません。群内データに意味が無いから管理図は 1 種類しかないなら、意味のある群内データなら、計数値データでも管理図は平均と幅の 2 種類が必要ではないか？と考えて下さい。

計数値データもで R 管理図や s 管理図が必要な場合もあります。その例を見ましょう。

【3】群内データの分析が必要なら、計数値でも R 管理図や s 管理図は必要

先ほど、計量値データをある基準で 0,1 分けして、計数値データに変えました。なお、次のような計数値データがあったら、どんな管理図で管理しますか？

Xij	1	2	3	4	5	合計
1	3	8	3	6	6	26
2	2	8	0	3	0	13
3	1	1	4	5	6	17
4	7	8	8	8	6	37
5	4	6	4	4	0	18
6	5	8	7	8	2	30

Xij の値はすべて不良個数としましょう。群内にも群間にも個別の不良個数が分かっている場合です。

群内データ(横列)、群間(縦列)にデータ分布に意味がありますね。

この場合、どんな管理図を使いますか？

1 つは、計量値と同じように、$\bar{X}$-R 管理図使うか。

もう 1 つは、計数値データなので、np 管理図と管理図を組み合わせたパターンでしょう。

計数値データに R 管理図は無い！と思わずにデータの特性に応じて最適な管理図を使うことが重要です。

【4】管理図の分類方法は群内データの分析要否で分けても良い

管理図の分類方法は、計量値データか計数値データかどうか以外にもあることに気づくはずです。本記事では、群内データ分布に意味があるかどうか？でも分類することができます。

例えば下表のような分類もできます。QC プラネッツ独自の分類方法です。

–	–	群内データ分布に意味がある	群内データ分布に意味が無い
平均	X管理図	●	●
	$\bar{X}$管理図	●	●
	p管理図	●	●
	np管理図	●	●
	c管理図	●	●
	u管理図	●	●
幅	R管理図	●	×
	s管理図	●	×

計数値データ、計量値データの区分に関係なく、幅を調べる必要がある場合は、R管理図や s 管理図を使う必要があることが分かります。

皆さんも考えたら、いろいろな管理図の分類方法ができるはずです。

以上、管理図の分類方法は教科書以外にもあり、計数値データでも R 管理図を使う場面があることを解説しました。

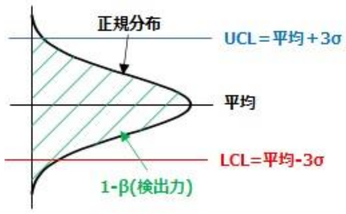
工程変化と検出力の関係を OC 曲線で表現できる

●管理図の管理限界を正規分布から計算
●検出力を正規分布から計算
●工程変化と検出力の関係を OC 曲線で表現する
に慣れてください。

●管理図は管理図！
正規分布、検定、OC 曲線は別の単元で関係ない!
とせず、応用力を身に着けていきましょう。

●Youtube 動画でも解説しています。ご確認ください。
https://www.youtube.com/embed/JCOmQgx_FR8

【1】管理図の管理限界を正規分布で考える
管理図はあまり、確率分布関数との関係がないように思えますが、正規分布で考える習慣をつけましょう。
管理限界は平均±3σで UCL,LCL をそれぞれ定義していますね。



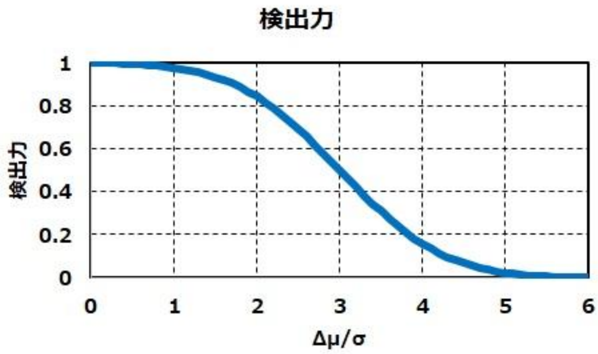
管理限界に入る確率を検出力として、本記事で解説します。

【2】工程平均がずれた場合の検出力の影響
(1) 工程平均のずれと検出力の関係
正規分布と分散は同じであるが、平均がずれた場合、検出力はどう低下するかについて、正規分布を使って調べてみましょう。工程平均がずれるほど、検出力も低下するのは明らかですが、その変化が OC 曲線によく似ています。
(2) 検出力の計算
工程平均のずれと、検出力について計算しましょう。

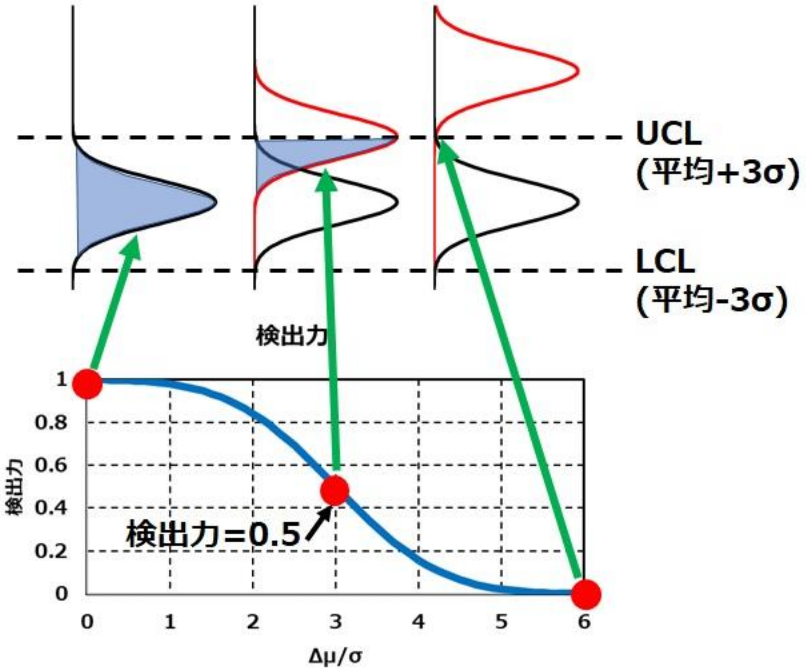
平均	0
標準偏差	1
x	3
Δu	検出力
0	0.998
0.1	0.998
0.2	0.997
・・・	・・・
3	0.5
・・・	・・・
6	0.001

検出力の計算式は、Excel で検出力=NORM.DIST(3-Δμ,平均=0,標準偏差=1,TRUE)としました。
ここで、
●「3-Δμ」の「3」は「管理限界 3σの 3」と工程平均のずれ「Δμ」の差です。
●また、正規分布は平均０、標準偏差１と仮定
●「True」として累積分布関数として計算
と仮定しています。

(3) 検出力曲線（OC 曲線）
結果をグラフにすると OC 曲線のような曲線が描けます。



ここで、横軸の Δ μ に注目します。値が 0～6 までしかありません。
●(A) Δ μ =0 の時は、ずれは無いという意味。
●(B) Δ μ =3 の時は、3 σ ずれたという意味。
●(C) Δ μ =6 の時は、6 σ ずれたという意味。
それぞれの場合の位置と検出力の関係を図で示します。



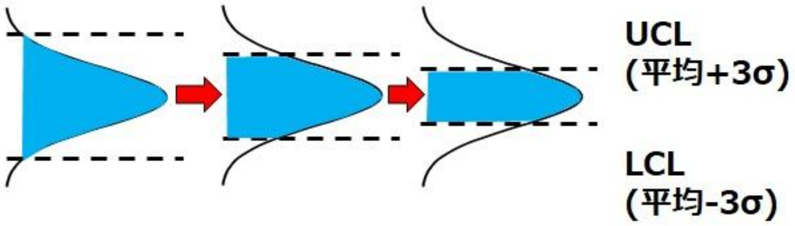
工程平均のずれと検出力の関係が可視化され、すぐ理解できますね。

【3】管理限界が狭まった場合の検出力の影響
(1) 変動分散
$\bar{X}$管理図の変動分散の式でよく、

$\sigma_{\bar{X}}^2$=$\sigma_b^2+\frac{\sigma_w^2}{n}$

とあります。群内変動$\frac{\sigma_w^2}{n}$が n の値が変化することによる、検出力の影響を調べてみましょう。

イメージ図を描きます。

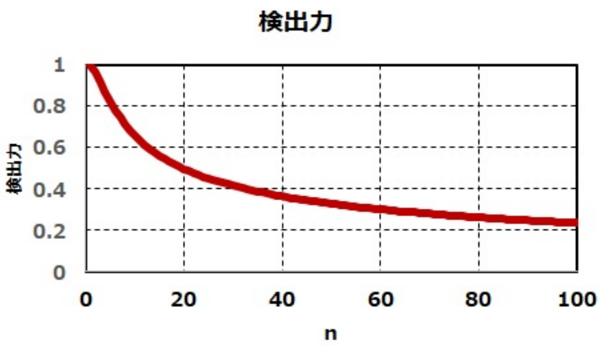


(2) 工程平均のずれと検出力の関係
正規分布の面積が狭まるので、計算は簡単ですね。計算結果をまとめます。

平均	0
標準偏差	1
x	3
n	検出力
1	0.997
2	0.966
3	0.917
4	0.866
…	…
99	0.237
100	0.236
…	…

検出力の計算式は、Excel で検出力=2*NORM.DIST(3/√n,平均=0,標準偏差=1,累積分布関数)-1
としました。ここで、
●「3/√n」の「3」は「管理限界 3σの 3」で、サンプル数 n の平方根で管理限界区間を狭くしています。
●また、正規分布は平均０、標準偏差１と仮定
●「True」として累積分布関数として計算
と仮定しています。n⇒∞にすると、管理限界幅⇒0 なので、検出力 1-β⇒0 となる検出力曲線が得られます。

(3) 検出力曲線（OC 曲線）
結果をグラフにすると OC 曲線のような曲線が描けます。



n⇒∞にすると、管理限界幅⇒0 なので、検出力 1-β⇒0 となる検出力曲線が得られます。

●管理図の管理限界を正規分布から計算 ●検出力を正規分布から計算 ●工程変化と検出力の関係を OC 曲線で表現する に慣れてください。

以上、工程変化と検出力の関係を OC 曲線で表現できることを解説しました。

【1】範囲 R の平均差の検定事例

(1) 事例問題

次の問いを考えます。管理図から検定・推定につなぐ重要な応用問題としてとらえてください。良問です。

【演習問題】
A,B の部品を用意する。コインを投げて表面が出れば A,裏面が出れば B を、各 5 回とり、部品のある品質特性値をデータに記録する。5 回データを 1 つの群として、計 25 群のデータを測定した。その結果、次の表の結果となった。
① 25 群全体における$\bar{X}$-R 管理図を作成せよ。
② A 群だけ、B 群だけの$\bar{X}$-R 管理図をそれぞれ作成せよ。
③ A,B の 2 つの R 管理図において、管理状態である場合、$\overline{R_A}, \overline{R_B}$に有意な差があるかどうか検定せよ。有意水準は 5%としてよい。

群	x1	x2	x3	x4	x5	$\bar{x}$	R	A/B
1	4	2	5	4	2	3.4	3	B
2	0	0	3	3	3	1.8	3	B
3	2	1	2	5	0	2	5	B
4	4	1	3	3	2	2.6	3	B
5	2	-1	2	1	2	1.2	3	A
6	-1	2	1	-1	2	0.6	3	A
7	1	0	0	3	-1	0.6	4	A
8	1	4	3	0	4	2.4	4	B
9	2	4	1	2	1	2	3	B
10	3	2	1	6	3	3	5	B
11	-1	-3	0	4	0	0	7	A
12	2	0	2	0	2	1.2	2	A
13	1	1	0	0	-2	0	3	A
14	-1	-2	1	3	1	0.4	5	A
15	3	2	-1	1	3	1.6	4	A
16	1	-1	2	1	0	0.6	3	A
17	1	1	1	0	3	1.2	3	A
18	2	4	2	0	3	2.2	4	B
19	-1	-1	2	0	2	0.4	3	A
20	3	0	0	2	3	1.6	3	A
21	0	0	0	1	2	0.6	2	B
22	-1	0	-4	0	-1	-1.2	4	A
23	1	-1	-1	1	0	0	2	A
24	3	2	4	3	1	2.6	3	B
25	0	2	0	-2	3	0.6	5	A
–	–	–	–	–	平均	1.26	3.56	–

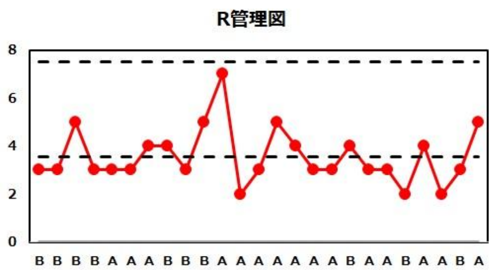
①②は基本問題で、③が本記事のメイン問題となります。

(2) $\bar{X}$-R 管理図を作成

(i)AB 全体の場合、(ii)A だけの場合、(iii)B だけの場合の 3 通りについて、管理図をそれぞれ作成します。

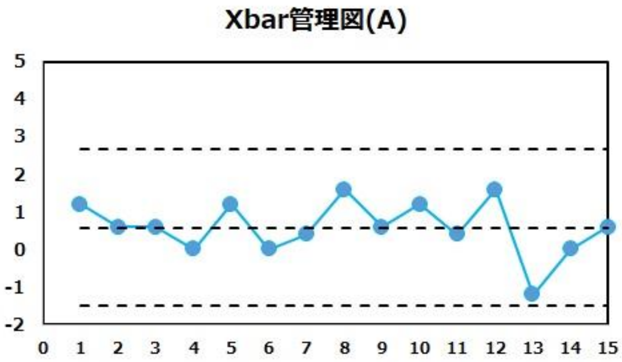
(i)AB 全体の場合

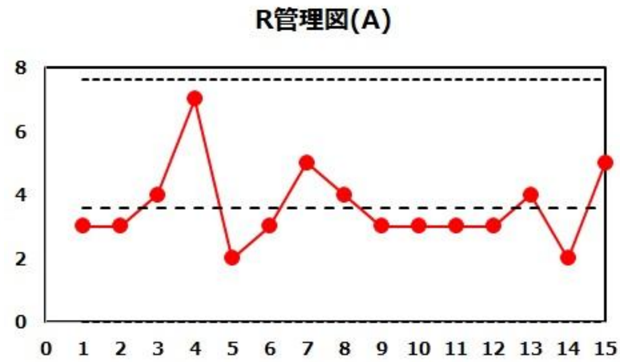
●$\bar{X}$管理図について、
◎$\bar{\bar{X}}$=1.256
◎$\bar{R}$=3.56
◎LCL=$\bar{\bar{X}}$-A₂×$\bar{R}$=1.256-0.577×3.56=-0.798
◎UCL=$\bar{\bar{X}}$+A₂×$\bar{R}$=1.256+0.577×3.56=3.31
●R 管理図について、
◎$\bar{R}$=3.56
◎LCL=0(なし)　(n＜6 より)
◎UCL= D₄×$\bar{R}$=2.114×3.56=7.53



(ii)A だけの場合
●$\bar{X}$管理図について、
◎$\overline{\overline{X_A}}$=0.59
◎$\overline{R_A}$=3.6
◎LCL=$\overline{\overline{X_A}}$- A₂×$\overline{R_A}$=0.59-0.577×3.6=-1.49
◎UCL=$\overline{\overline{X_A}}$+ A₂×$\overline{R_A}$=0.59+0.577×3.6=2.66

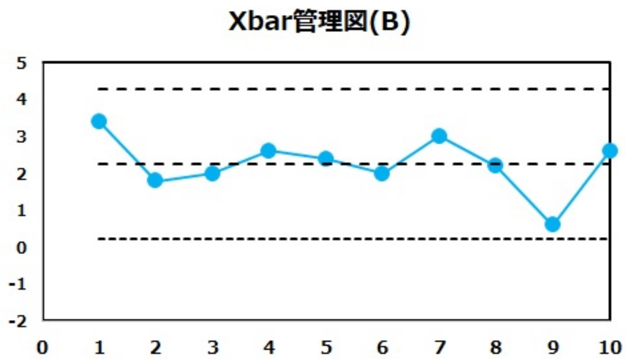
●R 管理図について、
◎$\overline{R_A}$=3.6
◎LCL=0(なし)　(n＜6 より)
◎UCL= D₄×$\overline{R_A}$=2.114×3.6=7.61

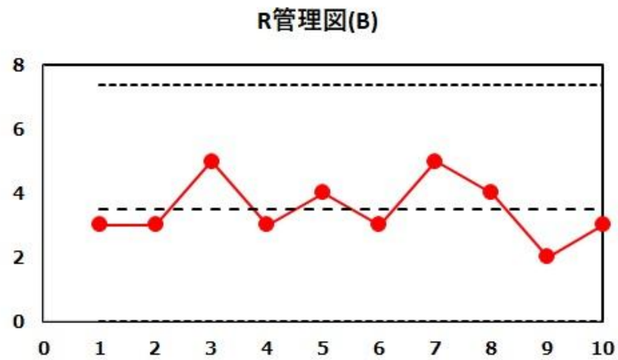




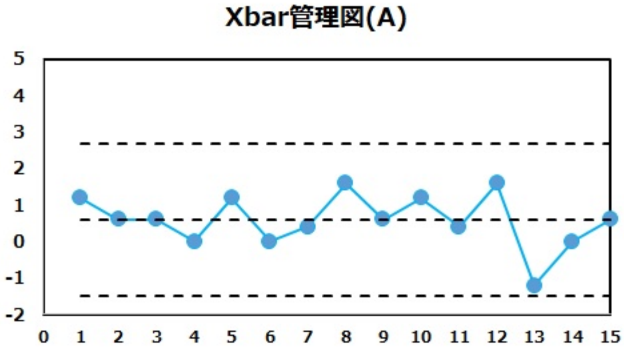
(iii)B だけの場合
●$\bar{X}$管理図について、
◎$\overline{\overline{X_B}}$=2.26
◎$\overline{\overline{X_B}}$=3.5
◎LCL=$\overline{\overline{X_B}}$- A₂×$\overline{R_B}$=2.26-0.577×3.5=0.24
◎UCL=$\overline{\overline{X_B}}$+ A₂×$\overline{R_B}$=2.26+0.577×3.5=4.28

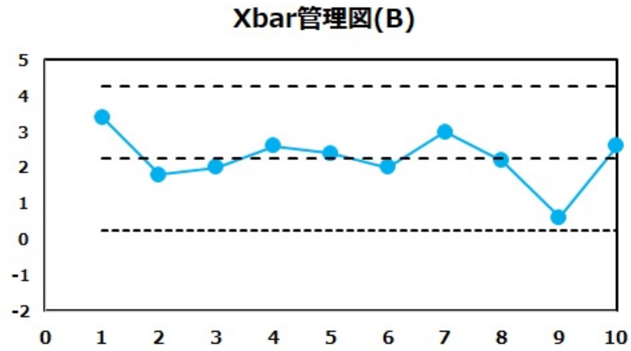
●R 管理図について、
◎$\overline{R_B}$=3.5
◎LCL=0(なし)　(n＜6 より)
◎UCL= D₄×$\overline{R_A}$=2.114×3.5=7.40

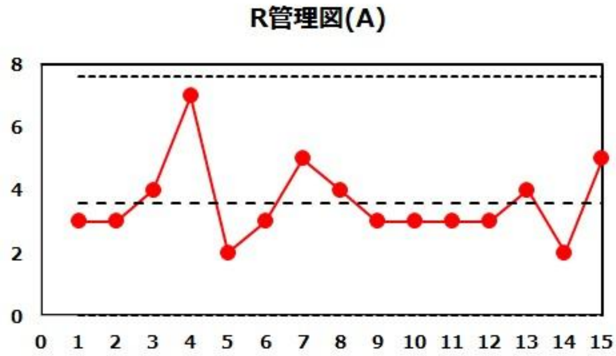


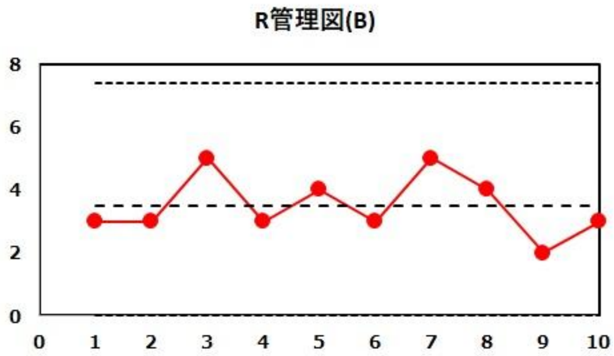


管理図をまとめると、A,B の違いが見やすくなります。









A と B の違いを検定しましょう。

【2】２つの母平均差の検定で解く

(1) 検定統計量

２つの母平均差の検定をする場合の検定統計量は、

$$t=\frac{\bar{R_B}-\bar{R_A}}{\sqrt{\frac{V_1}{n_1}+\frac{V_2}{n_2}}}$$

ですね。おなじみの式です。なお、
tはt分布、自由度φ=n_1+n_2-1とします。

(2) 検定統計量を計算

各値を算出します。

●範囲：$\bar{R_A}$=3.6
●範囲：$\bar{R_B}$=3.5
●分散：$\bar{V_A}$=2.38
●分散：$\bar{V_B}$=2.23
●自由度：$\bar{n_A}$=15
●自由度：$\bar{n_B}$=10

これを検定統計量に代入します。

$$t=\frac{\bar{R_A}-\bar{R_B}}{\sqrt{\frac{V_1}{n_1}+\frac{V_2}{n_2}}}$$
$$=\frac{3.6-3.5}{\sqrt{\frac{184.187}{15}+\frac{113.62}{10}}}$$
=0.34

(3) 検定結果

●t(φ、α)=t(15+10-1,0.05)=2.06
と比較すると
t=0.34 › 2.06
より、有意差が無いと言えます。

以上より、管理図から有意差を検定する検定問題の応用パターンを解説しました。
でも、これだけだと、別に記事にすることはありません。

管理図の古書を見ると、特殊な表から F 検定する方法も解説があります。これも解説します。

【3】(参考)特殊な表を使って F 検定で解く
(1) 古書の紹介
1960 年出版の「品質管理教程　管理図」P226,P285 をベースに解説します。
古書の解法を紹介します。</p.

(2) 古書の解法
次の 6 点で解いていきます。

1. $\frac{\bar{R}_A}{c_A}=V_A$ (不偏分散)なるc_Aを特殊な表から導出
2. c_Aは群の大きさnと点の数kから決まる特殊な表から求める
3. V_A (不偏分散)を計算
4. 自由度φ_Aを群の大きさnと点の数kから決まる特殊な表から求める
5. Bについても同様に計算して、V_B,φ_Bを計算
6. V_AとV_Bの比からF検定を実施

(3) 群の大きさ n と点の数 k から決まる特殊な表
これも、古書「森口繁一　品質管理(1953) P282」に書いていますが、導出方法はわかりません。なので、今はこの解法を推奨しません。

特殊な表は下表にまとめます。

n/k		1	2	3	4	5	10	15	20	25	30	k > 5
2	φ	1	1.9	2.8	3.7	4.6	9	13.4	17.8	22.2	26.5	0.876k+0.25
	c	1.41	1.28	1.23	1.21	1.19	1.16	1.15	1.14	1.14	1.14	1.128+0.32/k
3	φ	2	3.8	5.7	7.5	9.3	18.4	27.5	36.6	45.6	54.7	1.815k+0.25
	c	1.91	1.81	1.77	1.75	1.74	1.72	1.71	1.7	1.7	1.7	1.693+0.23/k
4	φ	2.9	5.7	8.4	11.2	13.9	27.6	41.3	55	68.7	82.4	2.738k+0.25
	c	2.24	2.15	2.12	2.11	2.1	2.08	2.07	2.06	2.06	2.06	2.059+0.19/k
5	φ	3.8	7.5	11.1	14.7	18.4	36.5	54.6	72.7	90.8	108.9	3.623k+0.25
	c	2.48	2.4	2.38	2.37	2.36	2.34	2.33	2.33	2.33	2.33	2.326+0.161/k
6	φ	4.7	9.2	13.6	18.1	22.6	44.9	67.2	89.6	111.9	134.2	4.466k+0.25
	c	2.67	2.6	2.58	2.57	2.56	2.55	2.54	2.54	2.54	2.54	2.534+0.14/k
7	φ	5.5	10.8	16	21.3	26.6	52.9	79.3	105.6	131.9	158.3	5.267k+0.25
	c	2.83	2.77	2.75	2.74	2.73	2.72	2.71	2.71	2.71	2.71	2.704+0.13/k
8	φ	6.3	12.3	18.3	24.4	30.4	60.6	90.7	120.9	151	181.2	6.031k+0.25
	c	2.96	2.91	2.89	2.88	2.87	2.86	2.85	2.85	2.85	2.85	2.847+0.12/k
9	φ	7	13.8	20.5	27.3	34	67.8	101.6	135.3	169.2	203	6.759k+0.25
	c	3.08	3.02	3.01	3	2.99	2.98	2.98	2.98	2.97	2.97	2.97+0.11/k
10	φ	7.7	15.1	22.6	30.1	37.5	74.8	112	149.3	186.6	223.8	7.453k+0.25
	c	3.18	3.13	3.11	3.1	3.1	3.09	3.08	3.08	3.08	3.08	3.078+0.1/k

(4) F 検定で解く
古書の解法で解いてみましょう。

●各値は
●範囲：$\bar{R}_A$=3.6
●範囲：$\bar{R}_B$=3.5
●$\bar{C}_A$=2.33 (n=5,k=15のcの値)
●$\bar{C}_B$=2.34 (n=5,k=10のcの値)
●自由度：φ_A=54.6 (n=5,k=15のφの値)
●自由度：φ_B=36.5 (n=5,k=10のφの値)
●分散：$\bar{V}_A=(\frac{\bar{R}_A}{c_A})^2$
$=(\frac{3.6}{2.33})^2$
=2.39
●分散：$\bar{V}_B=(\frac{\bar{R}_B}{c_B})^2$
$=(\frac{3.5}{2.34})^2$
=2.24

よって、F検定は
F(φ_A,φ_B,α)= $\bar{V}_A/\bar{V}_B$
=1.07
なお、F(φ_A,φ_B,α)= F(54.6,36.5,0.05)ですが、
自由度は自然数なので、F 検定表から近い値を使います。それは、F(60,40,0.05)=1.64 を使います。

●F=1.07 < 1.64 より、有意差は無いという結果がでます。
t 分布で計算した母平均の差の検定と同じ結果になりましたね。

以上、R 管理図で、平均差を検定する方法を解説しました。

管理図の平均値 Xbar の差の検定ができる

2 つの検定統計量を使って検定しますが、この 2 つの式は同値でもある点も解説します。
●t分布：t= $\frac{|\bar{X}_A-\bar{X}_B|}{\sqrt{\frac{V_A}{N_A}+\frac{V_B}{N_B}}}$
●正規分布：$|\bar{X}_A-\bar{X}_B| \geq A_2\bar{R}\sqrt{\frac{1}{k_A}+\frac{1}{k_B}}$

●Youtube 動画でも解説しています。ご確認ください。
https://www.youtube.com/embed/IwSnRbHdyLM

【1】平均値 Xbar の差の検定事例
(1) 事例問題
次の問いを考えます。管理図から検定・推定につなぐ重要な応用問題としてとらえてください。良問です。

本冊子【R 管理図で範囲 R の平均差の検定ができる】の演習問題をベースに進めます。

【演習問題】
A,B の部品を用意する。コインを投げて表面が出れば A,裏面が出れば B を、各 5 回とり、部品のある品質特性値をデータに記録する。5 回データを 1 つの群として、計 25 群のデータを測定した。その結果、次の表の結果となった。
① 25 群全体における$\bar{X}$-R 管理図を作成せよ。
② A 群だけ、B 群だけの$\bar{X}$-R 管理図をそれぞれ作成せよ。
③ A,B の 2 つの R 管理図において、管理状態である場合、$\overline{R_A}$, $\overline{R_B}$に有意な差があるかどうか検定せよ。有意水準は 5%としてよい。

【2】t 分布を使った検定統計量で母平均差の検定で解く
(1) 検定統計量
t 分布を使った検定統計量で 2 つの母平均差の検定をする場合は、

t分布：t= $\frac{|\bar{X}_A-\bar{X}_B|}{\sqrt{\frac{V_A}{N_A}+\frac{V_B}{N_B}}}$
ですね。おなじみの式です。なお、
tはt分布、自由度φ=N_A+N_B-1とします。

(2) 検定統計量を計算
各値を算出します。

●平均値：$\bar{X}_A$=0.59
●平均値：$\bar{X}_B$=2.26
●分散：$\bar{V}_A$=2.38
●分散：$\bar{V}_B$=2.23
●自由度：$\bar{N}_A$=75
●自由度：$\bar{N}_B$=50

これを検定統計量に代入します。

t= $\dfrac{|\bar{X}_A - \bar{X}_B|}{\sqrt{\frac{V_A}{N_A}+\frac{V_B}{N_B}}}$

= $\dfrac{|0.59-2.26|}{\sqrt{\frac{2.38}{15}+\frac{2.23}{10}}}$

=7.56

(3) 検定結果

●t(φ、α)=t(75+50-1,0.05)=1.98

と比較すると、t=7.56 > 1.98 より、有意差があると言えます。

以上より、管理図から有意差を検定する検定問題の応用パターンを解説しました。
でも、これだけだと、別に記事にすることはありません。

管理図の古書を見ると、正規分布から導出した式 $\|\bar{X}_A - \bar{X}_B\| \geq A_2\bar{R}\sqrt{\frac{1}{k_A}+\frac{1}{k_B}}$ を使って求めることもできます。これも解説します。

【3】正規分布と管理図係数を使った検定統計量で母平均差の検定で解く

(1) 古書の紹介

1960 年出版の「品質管理教程　管理図」P226,P287 をベースに解説します。

古書の解法を紹介します。

$$|\bar{X}_A - \bar{X}_B| \geq A_2\bar{R}\sqrt{\frac{1}{k_A}+\frac{1}{k_B}}$$

正規分布から導出した検定統計量で解く

式は、

$$|\bar{X}_A - \bar{X}_B| \geq A_2\bar{R}\sqrt{\frac{1}{k_A}+\frac{1}{k_B}}$$

です。

●各値は

●平均値：$\bar{X}_A$=0.59

●平均値：$\bar{X}_B$=2.26

●管理図係数：A_2=0.577

●範囲の平均：$\bar{R}=\dfrac{k_A\bar{R}_A+k_B\bar{R}_B}{k_A+k_B}$

$=\dfrac{15\times3.6+10\times3.5}{15+10}$=3.56

●群の数：k_A=15

●群の数：k_B=10

よって、検定は

●(左辺)=$|\bar{X}_A - \bar{X}_B|$=2.26-0.59=1.67

●(右辺)=0.577×3.56×$\sqrt{\frac{1}{15}+\frac{1}{10}}$=0.839

と、(左辺) > (右辺)が成り立つので、有意差があると言えます。
t 分布で計算した母平均の差の検定と同じ結果になりましたね。

【4】t 分布、正規分布から作った検定統計量は同値である証明

この 2 つの式は同値でもある点も解説します。
●t分布：t= $\frac{|\bar{X}_A-\bar{X}_B|}{\sqrt{\frac{V_A}{N_A}+\frac{V_B}{N_B}}}$
●正規分布：$|\bar{X}_A-\bar{X}_B| \geq A_2\bar{R}\sqrt{\frac{1}{k_A}+\frac{1}{k_B}}$

証明方法は、次の 2 つです。

1. t 分布を使った検定統計量から出発
2. t 分布から正規分布を使った検定統計量に変更

(1)t 分布を使った検定統計量から出発
まず、t 分布を使った検定統計量を用意します。

●t= $\frac{|\bar{X}_A-\bar{X}_B|}{\sqrt{\frac{V_A}{N_A}+\frac{V_B}{N_B}}}$

ここで、各値を定義します。
●Aの全自由度：$\bar{N_A}=\bar{k_A}\times\bar{n_A}$
●Bの全自由度：$\bar{N_B}=\bar{k_B}\times\bar{n_B}$
●群Aの数：$\bar{k_A}$
●群Bの数：$\bar{k_B}$
●群Aの群内自由度：$\bar{n_A}$
●群Bの群内自由度：$\bar{n_B}$
●分散A：$\bar{V_A}$
●分散B：$\bar{V_B}$

さらに、$\bar{n_A}=\bar{n_B}$=n、$\bar{V_A}=\bar{V_B}$=Vとすると、

t= $\frac{|\bar{X}_A-\bar{X}_B|}{\sqrt{\frac{V_A}{N_A}+\frac{V_B}{N_B}}}$

= $\frac{|\bar{X}_A-\bar{X}_B|}{\sqrt{\frac{V}{n}}\sqrt{\frac{1}{k_A}+\frac{1}{k_B}}}$

と変形できます。

また、
$\sigma_A=\sigma_B$=σとして、不偏分散$\sqrt{V}=\frac{\bar{R}}{d_2}$とできたら、t分布は正規分布
に置き換えることができます。

(2) t 分布から正規分布を使った検定統計量に変更
t 分布から正規分布の検定統計量の式に変えます。

●t=$\frac{|\bar{X}_A-\bar{X}_B|}{\sqrt{\frac{V}{n}}\sqrt{\frac{1}{k_A}+\frac{1}{k_B}}}$
⇒
●u=$\frac{|\bar{X}_A-\bar{X}_B|}{\frac{\bar{R}}{d_2\sqrt{n}}\sqrt{\frac{1}{k_A}+\frac{1}{k_B}}}$

ここで、uについては3σで検定するので、u=3を代入します。
●3=$\frac{|\bar{X}_A-\bar{X}_B|}{\frac{\bar{R}}{d_2\sqrt{n}}\sqrt{\frac{1}{k_A}+\frac{1}{k_B}}}$

両辺を整理します。
$|\bar{X}_A-\bar{X}_B|$=$\frac{3\bar{R}}{d_2\sqrt{n}}\sqrt{\frac{1}{k_A}+\frac{1}{k_B}}$

管理図係数A_2は、
A_2=$\frac{3}{d_2\sqrt{n}}$より、まとめると、
$|\bar{X}_A-\bar{X}_B|$=$A_2\bar{R}\sqrt{\frac{1}{k_A}+\frac{1}{k_B}}$
いくつかの解法を使って比較すると理解が深まりますね。

以上、管理図で、平均値$\bar{X}$の差を検定する方法を解説しました。

u 管理図の欠点数の差の検定ができる

●You tube 動画でも解説しています。ご確認ください。
https://www.youtube.com/embed/UeMycG9RuAg

【1】不良率の差の検定事例

(1) 事例問題

20 群に小分けされた金属板の傷の数を数えた。２つの機械 A,B からそれぞれ金属板を製造したので、傷の数が機械によって異なるかを確認したい。
(1) A、B 合わせた全体の u 管理図を描け。
(2) 傷の数が機械によって異なるかを、有意水準 5%で検定せよ。

No	機械	サンプルの大きさ	傷の数	単位当たりの傷の数
1	A	10	12	1.2
2	A	10	8	0.8
3	A	10	10	1
4	A	10	6	0.6
5	A	10	9	0.9
6	A	14	15	1.07
7	A	14	12	0.86
8	A	14	10	0.71
9	A	14	13	0.93
10	A	14	8	0.57
11	B	20	33	1.65
12	B	20	25	1.25
13	B	24	17	0.71
14	B	24	20	0.83
15	B	24	28	1.17
16	B	24	20	0.83
17	B	24	36	1.5
18	B	30	45	1.5
19	B	30	20	0.67
20	B	30	30	1
合計	–	370	377	–

一度は、実際に演習してくださいね。良問ですよ！

(2) u 管理図を作成

あまり見かけない管理図ですが、作れ！と言われてもあわてないようにしっかりおさえましょう。

必要な値を計算します。

●全体平均$\bar{u}$=377/370=1.02

●LCL=$\bar{u}-3\sqrt{\frac{\bar{u}}{n_i}}$

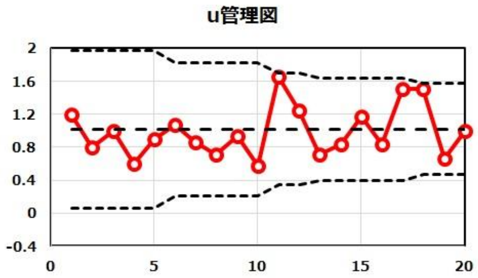
●UCL=$\bar{u}+3\sqrt{\frac{\bar{u}}{n_i}}$

ここで、分母のn_iは群のサンプルの大きさなので、各群によって
LCL、UCLの値が変化します。

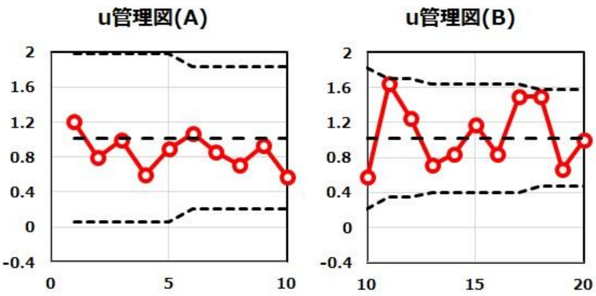
●LCL,UCL の値を表にまとめます。

No	機械	サンプルの大きさ	傷の数	単位当たりの不良数	平均	LCL	UCL
1	A	10	12	1.2	1.019	0.061	1.977
2	A	10	8	0.8	1.019	0.061	1.977
3	A	10	10	1	1.019	0.061	1.977
4	A	10	6	0.6	1.019	0.061	1.977
5	A	10	9	0.9	1.019	0.061	1.977
6	A	14	15	1.07	1.019	0.21	1.828
7	A	14	12	0.86	1.019	0.21	1.828
8	A	14	10	0.71	1.019	0.21	1.828
9	A	14	13	0.93	1.019	0.21	1.828
10	A	14	8	0.57	1.019	0.21	1.828
11	B	20	33	1.65	1.019	0.342	1.696
12	B	20	25	1.25	1.019	0.342	1.696
13	B	24	17	0.71	1.019	0.401	1.637
14	B	24	20	0.83	1.019	0.401	1.637
15	B	24	28	1.17	1.019	0.401	1.637
16	B	24	20	0.83	1.019	0.401	1.637
17	B	24	36	1.5	1.019	0.401	1.637
18	B	30	45	1.5	1.019	0.466	1.572
19	B	30	20	0.67	1.019	0.466	1.572
20	B	30	30	1	1.019	0.466	1.572
合計	–	370	377	–	1.019	–	–

u 管理図を作成します。



なお、A，Ｂの違いがわかるように u 管理図を分けてみます。



差がありそうですよね！　A と B の違いを検定しましょう。

【2】正規分布を使った検定統計量で不良率の差の検定を解く

(1) 検定統計量

単位当たりの個数は、本来ポアソン分布ですが、正規分布近似して解く方法で検定します。

教科書に絶対ある式なので、使いこなせてください。

検定統計量

$$u=\frac{\lambda_A-\lambda_B}{\lambda(\frac{1}{n_A}+\frac{1}{n_B})}$$

代入しましょう。各値は、

●λ_A =(群A：傷の数の総和T_A)/(群Aの総和n_A)

=103/120=0.858

●λ_B =(群B：傷の数の総和T_B)/(群Bの総和n_B)

=274/250=1.096

●$\lambda=\frac{T_A+T_B}{n_A+n_B}$

$=\frac{103+274}{120+250}$

=1.019

よって、検定統計量uは

$$u=\frac{\lambda_A-\lambda_B}{\lambda(\frac{1}{n_A}+\frac{1}{n_B})}$$

$$=\frac{0.858-1.096}{1.019\times(\frac{1}{120}+\frac{1}{250})}$$

=-2.12

u=|-2.12|=2.12 > 1.96=u(0.05)より A と B の不良率に差があると言えるとなります。

u 管理図と、欠点数の差の検定をまとめた応用事例を解説しました。

以上、 u 管理図の欠点数の差を検定する方法を解説しました。

管理図で「工程が管理状態である」が理解できる

管理図から群内変動σ_w^2と群間変動σ_b^2を使って
●σ^2=σ_w^2+σ_b^2
と、分割できるが、
(A) σ_b^2=0 となる場合は、どんな場合か？
(B) σ_w^2=0 となる場合は、どんな場合か？
(C) σ^2=0 となる場合は、どんな場合か？
を解説します！

●Youtube 動画でも解説しています。ご確認ください。
https://www.youtube.com/embed/1ylKhCjo-mI

【1】管理図における群内変動と群間変動
管理図では、データを
●群単位で小分けし、群間データを管理
●群内のデータを管理
の２つが必要です。

上の式の導出は、関連記事に詳しく解説しています。

【関連記事】【必読】管理図の分散σ(x)とσ(xbar)の違いがわかる(群内変動と群間変動)
https://qcplanets.com/method/control-chart/sigma_x-xbar/

(1) 分散のポイント
①データの構造式
●$x_{ij}-\bar{\bar{x}}$=$(x_{ij}-\bar{x_i}.)$+$(\bar{x_i}.-\bar{\bar{x}})$
と分割すると、
②平方和の分解
●$\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}(x_{ij}-\bar{\bar{x}})^2$
=$\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}(x_{ij}-\bar{x_i}.)^2$
+$\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}(\bar{x_i}.-\bar{\bar{x}})^2$
が成り立つ。
③分散の分解
それぞれ両辺をabで割ると、
●σ^2=σ_w^2+σ_b^2
が成り立つ。

σ^2=σ_w^2+σ_b^2の式を使って考えていきます。

【2】群間変動σ_b^2=0 の場合(工程が管理状態)

群間変動σ_b^2=0 の場合はよく、工程が管理状態であるとか、統計的管理状態とか、言います。

(1) 群間変動σ_b^2==0 になるデータとは、どんなデータか？
ちょっと考えてみましょう。

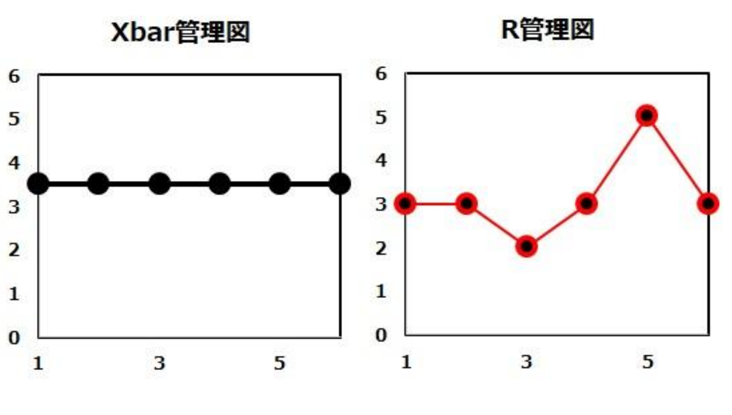
●群間のずれが無いデータを考える
●$\sum_i\sum_j(\bar{x_i}.-\bar{\bar{x}})^2$≡$\sigma_b^2$ですから、
2乗和=0なら、すべてのiについて$\bar{x_i}.-\bar{\bar{x}}$=0ですね。
つまり、$\bar{x_i}.$=$\bar{\bar{x}}$となるデータですね。

(2) 群間変動σ_b^2=0 になるデータ例
例えば、次のようなデータが挙げられます。

群間/群内	1	2	3	4	$\bar{x_i}$	$\bar{\bar{x}}$	R
1	3	2	5	4	3.5	3.5	3
2	3	5	2	4	3.5	3.5	3
3	4	4	4	2	3.5	3.5	2
4	3	2	5	4	3.5	3.5	3
5	6	2	5	1	3.5	3.5	5
6	3	2	5	4	3.5	3.5	3

縦方向が群間、横方向が群内です。
横方向はデータがばらついても、合計値はどの群でも同じ 14 となる場合です。
確かに、黄色枠のように$\bar{x_i}$と$\bar{\bar{x}}$の値が 3.5 で一致しますが、範囲 R は群ごとに異なる値となっています。

(3) 群間変動σ_b^2=0 になる場合を管理図で確認
$\bar{X}$管理図と R 管理図を描きます。



$\bar{X}$管理図は各群の値が一定であるが、R 管理図は各群でばらつきがある。

群間変動σ_b^2=0 の場合は、工程が管理状態であるとか、統計的管理状態とか、言いますが、
実際、管理図で描くとイメージがわきますね。

実際は、$\bar{X}$管理図は各群の値が一定にはなりませんから、若干のばらつきがある程度まで、ばらつきを抑えることが管理状態であるというのでしょう。

【3】群内変動σ_w^2=0 の場合
(1)群内変動σ_w^2=0 になるデータとは、どんなデータか？
ちょっと考えてみましょう。

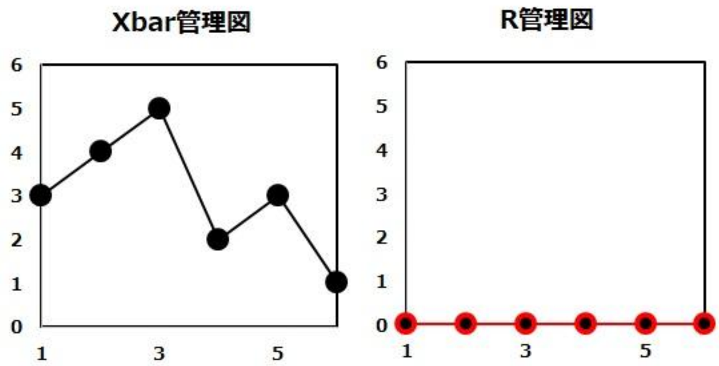
●群内のずれが無いデータを考える
●$\sum_i \sum_j (x_{ij} - \bar{x_i}.)^2 \equiv \sigma_w^2$ですから、
2乗和=0なら、すべてのjについて$(x_{ij} - \bar{x_i}.)$=0ですね。
つまり、x_{ij}=$\bar{x_i}.$となるデータですね。

(2) 群内変動σ_w^2=0 になるデータ例
例えば、次のようなデータが挙げられます。

群間/群内	1	2	3	4	$\bar{x_i}$	$\bar{\bar{x}}$	R
1	3	3	3	3	3	3	0
2	4	4	4	4	4	3	0
3	5	5	5	5	5	2.75	0
4	2	2	2	2	2	2	0
5	3	3	3	3	3	2	0
6	1	1	1	1	1	1	0

縦方向が群間、横方向が群内です。縦方向はデータがばらついても、横の値はすべて同じとなる場合です。各群の範囲 R の値が 0 となっています。

(3) 群内変動σ_w^2=0 になる場合を管理図で確認
$\bar{X}$管理図と R 管理図を描きます。



$\bar{X}$管理図は各群で値がばらつくが、R 管理図は各群で 0 である

【4】全分散σ^2=0 の場合
●σ^2=σ_w^2+σ_b^2=0
で各項は 0 以上ですから、
●σ^2=0
●σ_w^2=0
●σ_b^2=0
ですね。

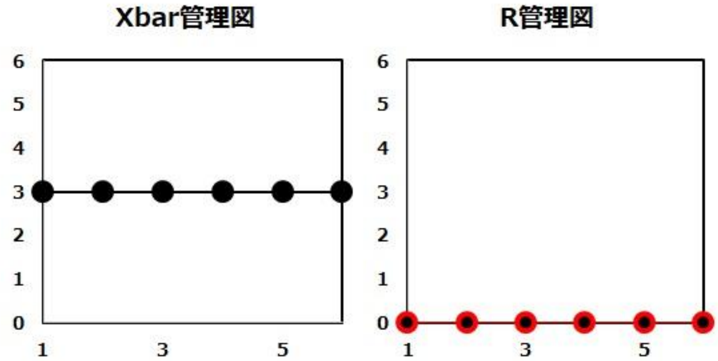
(1)全分散σ^2=0 になるデータとは、どんなデータか？

群間変動σ_b^2も、群内変動σ_w^2も 0 の場合ですね。端的に言えば、全部同じ値になります。

(2) 全分散σ^2=0 になるデータ例
例えば、次のようなデータが挙げられます。

群間/群内	1	2	3	4	$\bar{x_i}$	$\bar{\bar{x}}$	R
1	3	3	3	3	3	3	0
2	3	3	3	3	3	3	0
3	3	3	3	3	3	3	0
4	3	3	3	3	3	3	0
5	3	3	3	3	3	3	0
6	3	3	3	3	3	3	0

(3) 全分散σ^2=0 になる場合を管理図で確認
$\bar{X}$管理図と R 管理図を描きます。



$\bar{X}$管理図も、R 管理図は一定値である。
全分散が無いのは理想状態ですが、考えることは大事ですね。
管理状態になるとは、管理図でどうなるのかについて解説しました。

以上、管理図で「工程が管理状態である」状態を、実データを見ながら解説しました。

2 つのデータを管理図にするときの注意点

管理図と分散の加法性、検出力をまぜた応用事例を解説します。

【1】2 つのデータの平均(期待値）と分散

(1) 2 つのデータのそれぞれの平均(期待値)と分散

2 つデータを用意します。それぞれ正規分布に従うと仮定します。

●データ A： 平均 E[x_A]= μ_A、分散 V[x_A]= σ_A^2

●データ B： 平均 E[x_B]= μ_B、分散 V[x_B]= σ_B^2

(2) 2 つのデータの和、差したデータを合成

データ A,B をそれぞれ和、差すると、平均(期待値）と分散はいくらになるか？を考えます。分散の加法性を使えばよいですね。一般には定数 a,b を使って以下のように表現できます。

●A±B の場合

◎平均 E[$ax_A \pm bx_B$]= aE[x_A] ± bE[x_B]= $a\mu_A \pm b\mu_B$

◎分散 V[$ax_A \pm bx_B$]= a^2V[x_A]+ b^2V[x_B] ±$2ab$Cov(x_A, x_B)

(Cov は共分散)となります。公式どおりですね。

●以下、共分散 Cov は無視して考えます。

まとめると、

◎平均 E[$ax_A \pm bx_B$]= aE[x_A] ± bE[x_B]= $a\mu_A \pm b\mu_B$

◎分散 V[$ax_A \pm bx_B$]= a^2V[x_A]+ b^2V[x_B]

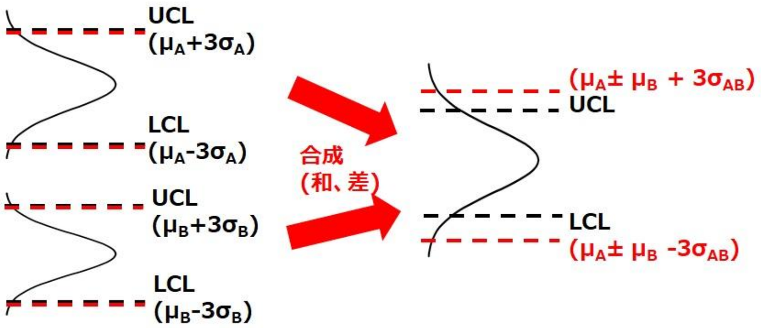
データを合成すると、 ●平均(期待値)はそのまま加減する ●分散はデータの加減によらず加算

これがどう管理図に影響するか、考えてみましょう。

【2】分散の加法性と検出力のバランスに注意

(1) 分散の加法性で注意すべきこと

分散の加法性により、管理限界 3σ と管理図係数表の値がズレることに注意



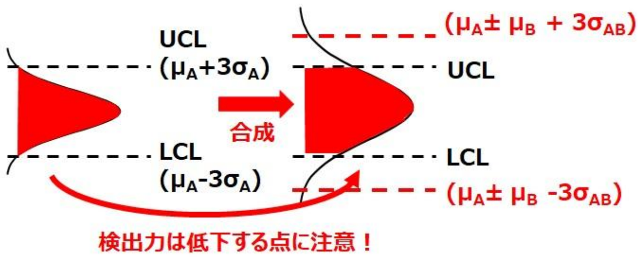
●上図では、合成する前のデータは、管理限界 3σ と管理図係数表は一致するように管理図係数表の値は作られています。しかし、管理図係数表の値は、サンプル数 n に変化する値となっているため、データの合成による分散の加法性は加味されません。

もともと管理図に載せるデータは、合成データではなく、1 つのデータを管理することを想定しています。

まとめると、

分散の加法性により、管理限界 3σ と管理図係数表の値がズレることに注意
●管理図係数表を使う、計量値の管理図は注意
●管理図係数表を使わず、σ で管理限界を評価する計数値の管理図は特に問題ない
となります。

(2) 検出力の影響
データを合成すると、管理限界 3σ の方が、管理図係数表の値より大きくなるため、管理限界に入る確率が低下します。逆をいえば、管理限界を超える確率が増えます。



図のように、管理限界を超える部分が増えると赤色部がデータの一部しかかからないことがわかります。つまり、検出力が低下することがわかります。

【3】計量値の管理図の注意点
(1) 計量値の管理図は、X 管理図、R 管理図、s 管理図があります。それぞれ、管理限界は管理図係数表で決まっていますね。管理図係数表の値の導出方法は、関連記事にあります。ご確認ください。

【関連記事】【重要】管理図(計量値)の変数の導出がわかる
https://qcplanets.com/method/control-chart/constants/

ここで、重要なのは、

X 管理図、R 管理図、s 管理図はそれぞれ正規分布、順序統計量、χ2 乗分布を仮定。
計数値はサンプル数 n(自由度)の変数で導出されている。管理限界は 3σ に対応する値としているが、データの合成後の σ’ までは考えられていない。

つまり、データ合成前のデータだけ、管理図係数表の値が使えるわけです。

(2) データ合成後の σ’ を使って計量値の管理図を使いたい場合

データの合成後の σ’ をベースに平均±3σ’ を管理限界とする管理図を自分で定義して管理図を作ればよいです。

JIS 規格から離れて、自作の管理図になりますが、特に問題はありません。
管理したい対象と、異常の定義は管理図を管理する人が決めればよいです。JIS 規格を活用することもできますが、JIS どおりやる義務はありません。

【4】計数値の管理図の注意点は無い
(1) 二項分布、ポアソン分布の管理図の管理限界は標準偏差を使う
計数値においては、二項分布、ポアソン分布を仮定した管理図を作成します。

●二項分布
(i)pn管理図 平均μ=pn,標準偏差σ=$\sqrt{np(1-p)}$より
管理限界 pn±3$\sqrt{np(1-p)}$=μ±3σ
(ii)p管理図 平均μ=p,標準偏差σ=$\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$ より
管理限界 p±3$\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$ =μ±3σ
と平均±3σで管理限界が定義されている。

●二項分布の期待値Eと分散Vはそれぞれ、
E=np
V=np(1-p)
ですね。

●ポアソン分布
(i)c管理図 平均μ=c,標準偏差σ=cより
管理限界 c±3$\sqrt{c}$=μ±3σ
(ii)u管理図 平均μ=u,標準偏差σ=$\sqrt{\frac{u}{n}}$より
管理限界 u±3$\sqrt{\frac{u}{n}}$=μ±3σ
と平均±3σで管理限界が定義されている。

●ポアソンの期待値Eと分散Vはそれぞれ、
E=c
V=c
ですね。ポアソン分布の確率密度関数は難しい式ですが、期待値と分散が同じとシンプルになるのが特徴的です。

(2) 計数値の管理図の管理限界はデータ合成も活用できる
●計量値の場合は、管理限界を決める係数は、管理図係数表から決まっています。しかし、サンプル数 n だけ変化する値なので、データの合成には対応していません。

●一方、計数値の場合は、管理限界は自分のデータの標準偏差σで決めるので、データ合成した場合は、データ合成後の標準偏差σを使えばよいです。

まとめると、

計量値の場合は、管理限界はJISの管理図係数表で決めるので、データ合成した場合は、管理図係数表の値ではなく、データ合成後の標準偏差σ’を使って管理限界を平均±3σ’と自分で定義する。

計数値の場合は、管理限界は自分のデータの標準偏差σで決めるので、データ合成した場合は、データ合成後の標準偏差σ’を使えばよい

データの状態や特徴によって、管理図や管理限界の作り方をよく考える必要があります。

以上、2つのデータを管理図にするときの注意点について解説しました。

減点数の管理図の作り方がわかる(ポアソン分布、分散の加法性)

管理図とポアソン分布と分散の加法性をまぜた応用事例を解説します。

【1】複数に区分された欠点数を評価したい場合
(1) 減点数のデータ
品質特性を調べるときに、「外観の傷などの欠点数」や「組立上の欠点」などを調べます。欠点の状態によって、いくつかの階級に分けて評価したい場合を考えます。

(2) 階級分けして評価する例
たとえば、

1. 致命的欠点(使用不可、ユーザに悪影響)
2. 重欠点(特性に欠陥があるが、修理可能)
3. 軽欠点(動作に問題ないが、気になる程度)
4. 微欠点(誤差範囲で問題無いレベル)

などの、程度によって分けて評価することを考えます。基本的には、点数分けして区別するでしょう。

階級	点数
致命的欠点	100
重欠点	50
軽欠点	10
微欠点	2

●合格点は 70 点以下とかにして、ある製品の欠点数が
◎致命的欠点は 0 つ
◎重欠点は 1 つ
◎軽欠点は 1 つ
◎微欠点は 3 つ
あった場合、評価点数は、
100×0+50×1+10×1+2×3=66 点と 70 点以下のなので、出荷 OK とするとか評価できますね。

では、階級別に点数化された評価点を管理図で管理することを考えます。

【2】ポアソン分布と分散の加法性
(1) 欠点数はポアソン分布を活用
管理図は、3 種類ありますね。

	変数	確率分布	管理図
	計量値	正規分布	X,R,s
	計数値	二項分布	np,p
⇒	計数値	ポアソン分布	c,u

本記事は、欠点数を扱うので、ポアソン分布をベースに考えます。

(2) 階級別の欠点数はポアソン分布と分散の加法性を活用
①仮定条件を設定
●1 つの製品に、Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ、Ⅳの 4 種の欠点の階級を考え、それぞれの階級にある欠点数はそれぞれ別々に以下のポアソン分布に従うと仮定します。

階級	評価点(A)	欠点数(B)	平均(C)	点数合計(A×B)
I (致命的欠点)	p_1 (例：100)点	d_1 (例:1個)	m_1	p_1d_1 (例：100×1=100点)
II (重欠点)	p_2 (例：50)点	d_2 (例:3個)	m_2	p_2d_2 (例：50×3=150点)
III (軽欠点)	p_3 (例：10)点	d_3 (例:5個)	m_3	p_3d_3 (例：10×5=50点)
IV (微欠点)	p_4 (例：2)点	d_4 (例:10個)	m_4	p_4d_4 (例：2×10=20点)
–	–	合計	合計	$p_1d_1+...+p_4d_4$ (例：320点)

●上表の場合の製品の欠点数 q は、
q=$p_1d_1+p_2d_2+p_3d_3+p_4d_4$
で具体例でいうと、
q=100×1+50×3+10×5+2×10=320
ですね。

②欠点数合計の期待値、分散を導出
●欠点数合計 q の期待値と分散を考えます。
●欠点数合計 q の期待値μ_q=E[q]は、

μ_q=E[q]
= p_1E[d_1]+p_2E[d_2]+p_3E[d_3]+p_4E[d_4]
=p_1m_1+p_2m_2+p_3m_3+p_4d_4

になります。欠点数 d が変数になるので、E[d_i]⇒m_iと変形します。

●欠点数合計 q の分散\(σ_q^2)=V[q]は、

σ_q^2=V[q]
= p_1^2V[d_1]+p_2^2V[d_2]+p_3^2V[d_3]+p_4^2V[d_4]
=$p_1^2m_1$+$p_2^2m_2$+$p_3^2m_3$+$p_4^2d_4$

になります。

●期待値Eと分散Vの定義は、
E=$\sum_i x_i f(x_i)$
V=$\sum_i x_i^2 f(x_i)$
ですね。この定義どおり、立式するので、
期待値Eはp_iV[d_i]の和、
分散Vはp_i^2V[d_i]の和、
となります。

●ポアソン分布の期待値と分散は一致しますね。
つまり、平均がm_iなら、
期待値 E =m_iV
分散 V=m_i)
と一致します。

欠点数合計の期待値、分散は、
●期待値E=$p_1 m_1 + p_2 m_2 + p_3 m_3 + p_4 d_4$
●分散V=$p_1^2 m_1 + p_2^2 m_2 + p_3^2 m_3 + p_4^2 d_4$
です。

【3】減点数の管理図を作成
(1) データ事例
次のデータを管理図に描きます。

ある製品の 1 年間のデータをまとめると下表のとおりになった。検査サンプル数は 20,000 である。また、サンプル数 n=500 単位の規模の管理図を作成し、品質管理したい。

欠点の階級	減点評価 p_i	欠点数d_i	積$p_i d_i$	積$p_i^2 d_i$
I	100	235	23,500	2,350,000
II	50	2,585	129,250	6,462,500
III	10	7,126	71,260	712,600
IV	2	13,602	27,204	54,408
–	合計	23,548	251,214	9,579,508

(2) 管理図と管理限界の計算
1 サンプルあたりの欠点数で評価します。c 管理図を作成します。
①欠点数合計の期待値、分散を導出

●期待値Eは
E=$\sum_{i=1}^{4} p_i d_i$/N
=251,214/20000=12.56

●分散Vは、サンプル数n=500を考慮して、
V=$\sum_{i=1}^{4} \frac{p_i^2 d_i}{N}$/n
=9,579,508/(20,000×500)=0.958
●標準偏差σは
σ=$\sqrt{V}$=0.979

(3) 管理図を作成
まとめると、

平均 12.56、管理限界 3×0.979 に入る c 管理図を作成。

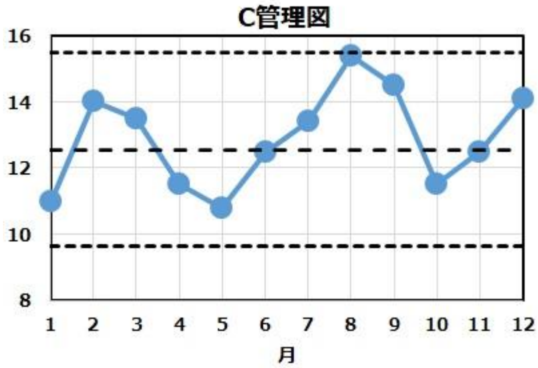
ここで 1 つ問題があります。⇒管理図がまだ描けない！

今、管理図の縦軸である平均と管理限界が出ましたが、横軸データがまだありません。どんなデータを用意すればいいか？

●例えば、月ごとの欠点数データを横軸にとって、管理すればよいでしょう。
次のような月ごとの欠点数データを取ります。

月	月ごとの欠点数A (サンプル数n=500 あたり)
1	11
2	14
3	13.5
4	11.5
5	10.8
6	12.5
7	13.4
8	15.4
9	14.5
10	11.5
11	12.5
12	14.1

このデータと、期待値と標準偏差を使って管理限界を入れた管理図を作成します。



ポアソン分布と分散の加法性を活用して管理図を作る応用事例になります。

以上、ポアソン分布と分散の加法性を活用して管理図を作る方法を解説しました。

カイ2乗管理図がわかる

【1】カイ2乗管理図とは

(1) カイ2乗管理図がなぜ必要？

元々はp管理図やnp管理図で不良品、良品を管理しますが、「良か不良か」の2択しかありません。
中には、2 択以上の複数選択をした管理図を作りたいニーズもあるでしょう。これをかなえるために作られたのが、カイ2乗管理図です。

(2) カイ2乗管理図の数理

いろいろ疑問に思うでしょう。1つずつ解説します。

疑問1：カイ2乗の式使うの？ 疑問2：中心、管理限界のCL,LCL,UCLはどう決めるの？

(3) カイ2乗の式使うの？

適合性の検定のようにカイ2乗式を使います。

次の式を使います。

●$\chi^2=\sum\frac{(\text{実測値}—\text{期待値})^2}{\text{期待値}}$

具体的に4つの階級がある場合は、

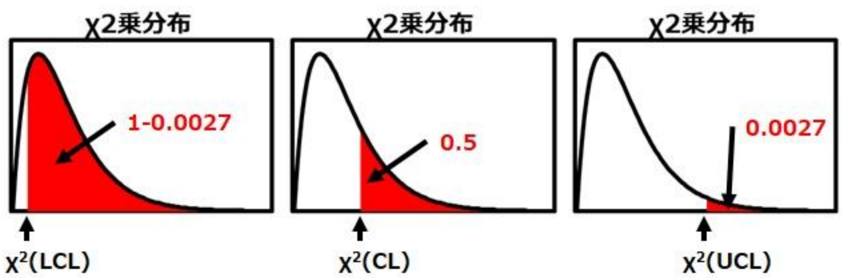
●$\chi^2=\frac{(r_A-\bar{r_A})^2}{\bar{r_A}}+\frac{(r_B-\bar{r_B})^2}{\bar{r_B}}$
$+\frac{(r_C-\bar{r_C})^2}{\bar{r_C}}+\frac{(r_D-\bar{r_D})^2}{\bar{r_D}}$

となります。

(4) 中心、管理限界のCL,LCL,UCLはどう決めるの？

カイ2乗分布の ●0.5点がCL、 ●1-0.0027点がLCL、 ●0.0027点をUCL とします。0.0027は正規分布の3σの点です。

χ2乗分布と確率について下図のとおりです。



χ2乗分布表にて、自由度と確率点をみれば、χ2の値がわかります。
ただし、0.0027点や、1-0.0027点はχ2乗分布表では読み取れません。

Excelの関数を使って導出します。
●CHISQ.INV.RT(確率,自由度)で計算してくれます。
確率が1-0.0027で自由度が3の場合は、
●CHISQ.INV.RT(1-0.0027, 3)＝0.047
となります。ほぼ0ですね。

まとめると、

カイ２乗分布の
●CL⇒Excel で CHISQ.INV.RT(0.5, 自由度)の値
●LCL⇒Excel で CHISQ.INV.RT(1-0.0027, 自由度)の値
●UCL⇒Excel で CHISQ.INV.RT(0.0027, 自由度)の値
とします。0.0027 は正規分布の 3σ の点です。

【2】カイ２乗管理図の描き方
(1) データの用意
カイ 2 乗管理図と比較のための pn 管理図を作成します。データは次の表のとおりです。

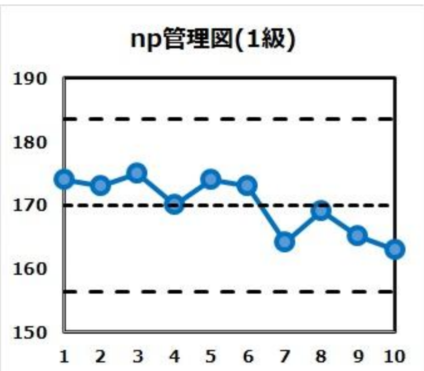
―	１級	2級	3級	x2
1	174	10	16	0.89
2	173	8	19	0.5
3	175	9	16	1.05
4	170	14	16	2.4
5	174	6	20	1.69
6	173	6	21	1.7
7	164	11	25	1.56
8	169	13	18	1.11
9	165	15	20	2.65
10	163	8	29	4.74
合計	1700	100	200	2000
平均	170	10	20	200

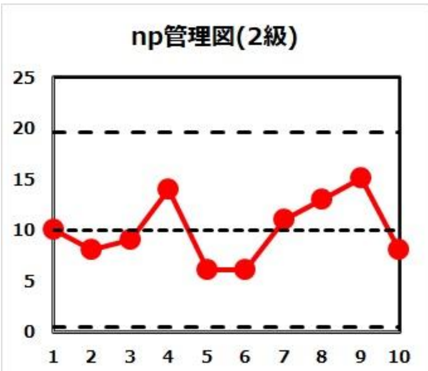
(2) 4 つの管理図を作る
●1 級だけの np 管理図
●2 級だけの np 管理図
●3 級だけの np 管理図
●1 級、２級、3 級をまとめたカイ２乗管理図

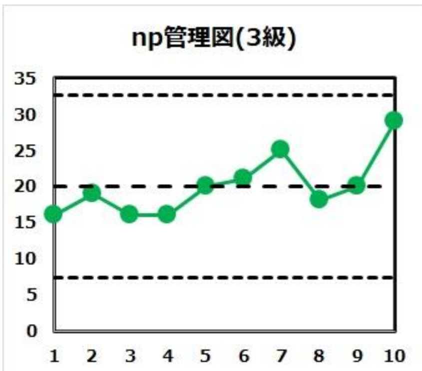
●必要な値をそれぞれ求めます。表にまとめます。

―	１級	2級	3級
平方和S	186	92	160
分散V	20.67	10.22	17.78
標準偏差s	4.54	3.2	4.21
平均CL	170	10	20
LCL	156.38	0.40	7.37
UCL	183.62	19.6	32.63

●np 管理図を描きましょう。







(3) 1 級、 2 級、3 級をまとめたカイ 2 乗管理図
(i) 必要な値を求める。
●必要な値をそれぞれ求めます。表にまとめます。
まず、自由度は 1 級、2 級,3 級の 3 つから 1 つ引いた、2 です。
自由度 2 のカイ 2 乗分布を考えます。

●次に、データから各群の χ2 を計算します。
例えば、群 1 の場合、
データが、174,10,16 で、
それぞれの平均が 170,10,20
です。

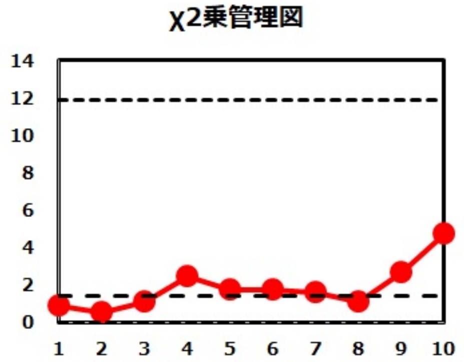
●$\chi^2 = \frac{(r_A-\bar{r_A})^2}{\bar{r_A}} + \frac{(r_B-\bar{r_B})^2}{\bar{r_B}}$
$+\frac{(r_C-\bar{r_C})^2}{\bar{r_C}}$
$=\frac{(174-170)^2}{170}+\frac{(10-10)^2}{10}+\frac{(16-20)^2}{20}$
=0.89
となります。
同様に群 1 から群10まで計算します。

●自由度2のx2乗分布からLCL,CL,UCLを求めます。
◎LCL=CHISQ.INV.RT(1-0.0027,2)=0.0054
◎CL=CHISQ.INV.RT(0.5,2)=1.38
◎UCL=CHISQ.INV.RT(0.0027,2)=11.83
となります。

●結果を下表にまとめます。

-	x2	LCL	CL	UCL
1	0.89	0.01	1.39	11.83
2	0.5	0.01	1.39	11.83
3	1.05	0.01	1.39	11.83
4	2.4	0.01	1.39	11.83
5	1.69	0.01	1.39	11.83
6	1.7	0.01	1.39	11.83
7	1.56	0.01	1.39	11.83
8	1.11	0.01	1.39	11.83
9	2.65	0.01	1.39	11.83
10	4.74	0.01	1.39	11.83

●カイ 2 乗管理図を描きましょう。



np 管理図とカイ２乗管理図を比較してどちらも工程異常はないことがわかりました。np 管

【3】カイ２乗管理図のメリット、デメリット

(1) カイ２乗管理図のメリット

複合条件をまとめたデータで管理図が作れること。

(2) カイ２乗管理図のデメリット

カイ２乗管理図の LCL,CL,UCL の定義の妥当性が怪しい。つまり、 ●CL⇒Excel で CHISQ.INV.RT(0.5, 自由度)の値 ●LCL⇒Excel で CHISQ.INV.RT(1-0.0027, 自由度)の値 ●UCL⇒Excel で CHISQ.INV.RT(0.0027, 自由度)の値 は妥当なのか？よく吟味する必要があります。

個別に作った np 管理図で十分となると、カイ２乗管理図の出番はなさそう。

以上から、デメリットの方が多いため、有名にならないマニアックな管理図になってしまったかもしれません。

カイ２乗管理図からχ2 乗分布、適合性の検定、pn 管理図を複合した応用事例として勉強できたので、カイ２乗管理図を学ぶ価値はあります！

以上、カイ 2 乗管理図について、解説しました。